量子ホール効果
— 多体系への数学的厳密なアプローチ —

学習院大学 理学部　高麗 徹 [1]

団栗のスタビリチーを論じて併せて天体の運行に及ぶ [2]

1　量子ホール効果の普遍性

量子ホール効果は、今や、超伝導、磁性と並び固体物理の最重要研究課題の１つであると言っても過言ではないだろう。それがどのような現象なのかを説明する必要はもはや無いと思われるが、簡単に振り返っておこう [3]。 半導体界面において実現される２次元電子系に、その面に垂直に一様強磁場をかけ、さらに電流を流し、電気抵抗（あるいは抵抗率）を測定する。正確に言うと、電位差をその電流の強さで割ったものが電気抵抗である。この場合、電流と垂直および平行方向の２つの電位差を測り、それぞれに対応する電気抵抗をホール抵抗、対角抵抗と言う。面白い事に、十分低温において、電子の占有率あるいは磁場の強さを変化させても、ホール抵抗が変化せず一定の値を取るプラトーと呼ばれる領域が出現する。しかも、そこでは対角抵抗がほとんど零となっている。線型応答を仮定し、電気抵抗をコンダクタンスに書き直すと、そこではホール抵抗に対応するホール・コンダクタンスは普遍コンダクタンス（ e^2/h ：素電荷の２乗をプランク定数で割ったもの）の整数または分数倍に量子化する、また、対角抵抗に対応する対角コンダクタンスはほとんど零となる。さらに驚くべき事は、そのホール・コンダクタンスの量子化の精度が、良い場合には、測定精度の限界に迫る８桁や９桁にも達する事である。

この量子ホール効果という現象を普遍性という観点から見ると、如何にこの現象が驚嘆に値するか、また、物理学において重要な位置を占めるか、を再確認させられる。実際、このホール抵抗の量子化は、試料に依らないのは言うに及ばず、磁場中の２次元電子系ならばどのような系だろうと例外無しに必ず生じている。すなわち、不純物の種類や電子間相互作用の形には依存していない。但し、不純物無しではプラトーは出現しない、また、電子間相互作用無しでは分数量子化は起こらない。しかも、直接観測にかかるホール抵抗が普遍量となる。例えば、磁性体の相転移に代表される臨界現象では臨界指数が普遍量となる。しかし、量子ホール効果のように非自明な普遍量が直接観測量として現れる例はそう多くはない。実際、マクロなスケールでの普遍性の例は摩擦、表面張力、静電気、熱現象などに見られる定性的な法則であり、普遍性として意識されない事がしばしばである。この意味で、量子ホール効果の普遍性は「強い」と言える。後で見るように、この強い普遍性は数学的取り扱いをも容易にする。このように、量子ホール効果という

---

[1] E-mail:koma@riron.gakushuin.ac.jp

[2] 夏目漱石「吾輩は猫である」より。

[3] 実験や理論の歴史的な事については、例えば、文献 [1] を見られたい。

現象は、**普遍性という観点から自然現象を見る事の重要性**を如実に物語っている。すなわち、それは神が我々のために密かに用意した珠玉の作品なのである。

2 普遍性と数学的構造

一般に[4]、ある共通の性質を持つ無数の系からなる集まりを考える。その系の集まりはある非自明な数学的構造を持ち、個々の系はある統一的かつ数学的原理に従うとする[5]。このとき、その系の集まりを普遍クラスと呼び、その構造を数学的普遍構造と言おう[6]。しかし、これはゲームのルールのようなもので、より重要なのは次に述べる論理的普遍構造であろう。囲碁でたとえるなら前者は単なるルールに過ぎないが、後者は究極の戦略と言える。一般に、ある非自明な共通の性質を示す無数の系からなる集まりを考える。その共通の非自明な性質は別のより基本的な共通の性質あるいはある隠れた共通の性質のみによって必然的に決まっているとする。但し、その別の共通の性質と元の非自明な性質の繋がりは自明ではなく、深いところにあるとする。このとき、この系の集まりもまた普遍クラスと呼び、その繋がりを論理的普遍構造と言おう[7]。このような構造は普遍クラスが見せる異なる２つの顔を繋ぐ「紐」とも言えよう[8]。言うまでもなく、自然界の複雑な系たちに共通に「宿っている」その普遍構造を解き明かす事は物理学の大きな目的の１つである。そして、自然界にこのような普遍クラスは無数に存在し、それに応じて普遍構造も無数に存在する。さらに、それら普遍クラスどうし「相互作用」もする。すなわち、無数の異なる普遍クラスはさらに論理的普遍構造の「紐」で繋がった網のような「普遍性の宇宙」を形作っているのである。これらの繋がりを明らかにする事もまた物理学の大切な目的の１つである。例えば、物理学の中で、古典力学、電磁気学、熱力学、統計力学、量子力学などはそれぞれある理想化された状況で数学的普遍構造を持った普遍クラスを成しており、普遍クラスどうしは論理的普遍構造の「紐」で堅固に繋がっている。この考え方では Newton 力学が量子力学や相対性理論と比べて劣っているという事は決してない、すなわち、Newton 力学も他の普遍クラスと同等な１つの普遍クラスなのである。物理学はこれら普遍クラスを次々と発見し、それらの数学的構造およびクラス間の繋がりを解き明かして来た。そして、量子ホール効果はその数有る普遍クラスの中でも一際強力な一員なのである。

3 コンダクタンスの普遍性

さて、量子ホール効果は、しばしば、整数、分数を分けて扱われがちであるが、本来、磁場中の相互作用する２次元電子ガスから出発し、整数、分数を分けず統一的に理解するのが望ましい。我々は普遍性の立場を踏襲すべく、次の N 電子系のハミルトニアンから出発する。但し、系を一

[4] ここでの議論は田崎晴明氏（学習院大・理）との日頃の議論や彼の「熱力学講義ノート」に負うところが大きい。特に、このノートは専門家と言えども一読の価値あり！彼の web page http://www.gakushuin.ac.jp/ ~881791/ 参照。

[5] 必要ならばある理想化を考えても良い。例えば、光速に比べて十分おそく動く物について、光速を無限大とする極限を考える。

[6] 例えば、２次元電子系ならば量子力学で記述され、その系の波動関数は Schrödinger 方程式に従う。

[7] 例えば、量子ホール効果を示す半導体ならば、その現象は磁場中の２次元電子系という性質のみによって決まる。

[8] １つの顔しか持たない系の集まり、つまり単なる似たものの寄せ集めを普遍クラスとは呼ばない。

辺 L の周期的箱に入れ、簡単のため、電子のスピンや多層構造は考えない[9]。

$$H=\sum_{j=1}^{N}\left\{\frac{1}{2m}\left[(p_{x,j}-eBy_j)^2+p_{y,j}^2\right]+V_\omega(\mathbf{r}_j)\right\}+\sum_{i\neq j}U(x_i-x_j,y_i-y_j)+\sum_{j=1}^{N}eFy_jP_j. \quad (1)$$

ここに、$\mathbf{r}_j=(x_j,y_j)$ は j 番目の座標、$m,-e$ はそれぞれ電子の質量、電荷、$(p_{x,j},p_{y,j})$ は磁場が無いときの運動量演算子、B は2次元面に垂直にかけた磁場の強さである。量子ホール効果が強い普遍性を示すのであれば、ランダム・ポテンシャル V_ω と2体の電子間相互作用 U は極めて一般的にとれるはずであるが、技術的理由によりそうも行かない。ランダム・ポテンシャル V_ω は2階連続微分可能で、そのノルムは系のサイズ L に依らない定数で上から抑えられているとする。また、電子間相互作用 U は座標の差のみの正の関数で2階連続微分可能とし、電子の入れ替えについて対称、また、遠くでべき的に減衰しその指数は2よりも大きいとする。ハミルトニアンの3つ目の和は y 軸方向にかけた電場（強さ F ）からのポテンシャルである。射影演算子 P_j によって境界での電場の発散を正則化する。これらポテンシャルおよび正則化の正確な定義については文献 [2] を見られたい。次にコンダクタンスの定義について述べる。以下、絶対零度のみを考える。ハミルトニアン (1) の基底状態について電流密度の期待値をとり、さらに、それを電場の強さ F について漸近展開する[10]。その1次の係数をコンダクタンスと定義する。

我々は次の結果を得た [2]：基底状態の上に有限のエネルギー・ギャップがあるならば、V_ω について平均したホールおよび対角コンダクタンス σ_{xy},σ_{yy} はそれぞれ次の不等式を満たす：

$$\left|\sigma_{xy}+e^2\nu/h\right|\le \mathrm{const.}L^{-1/12},\quad |\sigma_{yy}|\le \mathrm{const.}L^{-1/12}. \quad (2)$$

ここに ν はランダウ準位の占有率である。特に、無限体積極限で $\sigma_{xy}=-e^2\nu/h,\sigma_{yy}=0$ となる。

従って、占有率 ν が分数のときにギャップが開いているならば、ホール・コンダクタンス σ_{xy} は分数に量子化され、対角コンダクタンス σ_{yy} は零となる。結果 (2) は上のような広いクラスのランダム・ポテンシャル V_ω および電子間相互作用 U について成り立つ。そして、その広いクラスの系に対し、不等式 (2) が数学的厳密に証明できたのは普遍性の威力であろう。

4 エネルギー・ギャップ

上の結果ではエネルギー・ギャップの存在は仮定されており、どの占有率 ν でギャップが開くかは別に調べる必要がある。特に、ちょうど分数占有で基底状態の上にギャップが開くかどうかが問題である。そこで、さらに、Lieb-Schultz-Mattis の方法 [3] を用いて、どの占有率 ν ならギャップが開く可能性があるかを調べた。但し、この方法は系に並進対称性がないと適用できないので、相互作用は残す[11]がランダムネス無しの系を考える。また、系の x 方向のサイズ L_x を大きな有限の値に固定し、y 方向のサイズ L_y を無限大とする1次元的な無限体積極限をとる。さらにヒルベルト空間を下から $(n_{\max}+1)$ 番目までのランダウ準位に制限する。その量子数 $n_{\max}$ は幾ら大きくても良いが有限に固定する。

[9] 電子のスピンや多層構造を持つ系へ以下の議論を一般化する事も可能である。但し、ここでの結論は変わらない。

[10] 基底状態の上にエネルギー・ギャップがあればこの計算は漸近展開の意味で正当化される。その際、基底状態に有限の縮退があってもよい。詳しくは、文献 [2] を見られたい。

[11] 但し、相互作用についての仮定はかなり緩める事ができる。詳しくは文献 [4] を見られたい。

我々は次の結果を得た [4]：相分離のような並進対称性を完全に破ってしまう相転移が起こらないと仮定する。このとき、基底状態の上にエネルギー・ギャップが開いているならば、占有率 ν は整数もしくは分数でなければならない。

この結果はランダムネス無しについてであるが、ランダムネスを入れたとき基底状態の上に開いたギャップが潰れなければ、前の結果 (2) と合わせてエネルギー・ギャップに起因するホール・コンダクタンスの量子化は普遍コンダクタンスの整数または分数倍に限られる事になる[12]。

5 波動関数の局在とコンダクタンス・プラトー

上の２つの結果ではまだ不満足である。すなわち、ある特定の占有率 ν でのコンダクタンスの量子化であり、占有率を少し変化させたとき、その量子化コンダクタンスが変化しないというプラトーの存在を示すものではない。プラトーの存在を示すには波動関数の局在を考える必要がある。電子間相互作用が無い場合については、波動関数がバンド端で局在する事（指数関数的減衰）が数学的に証明されている [5]。この事を使うと、バンド端でのプラトーの存在を示す事ができる [6]。

次に電子間相互作用がある場合について考えよう。そもそも、電子間相互作用がある場合、「局在」とは何かを考える必要がある。我々は拡散の意味で電子の局在を仮定する。すなわち、ある N 電子状態に局在した電子を１つ加える。その $(N+1)$ 電子状態を時間発展させたとき、１つ加えた電子の波束が無限に広がってしまわなければ、「局在軌道」が１つ存在すると考える事ができる。さて、N 電子基底状態に対し、うまく ΔN 個の局在状態をそれらが広がってしまわないように付け加える事ができ、かつ、その全エネルギーが最低になるならば、その $(N+\Delta N)$ 電子状態は ΔN 個の局在軌道を持つ基底状態と考える事ができる。この局在の仮定に加えて、元の N 電子基底状態の上にはエネルギー・ギャップが開いていると仮定しよう。そのとき、電子数をそれら局在軌道を埋めながら N から $(N+\Delta N)$ まで増やしていっても、その間コンダクタンスは変化しない事が期待できる。しかし、これを証明するのは技術的にかなり難しい。我々は、ギャップに関する仮定を技術的な都合により少し変更し、さらに電荷密度の揺らぎが小さいという仮定を置き、相互作用がある場合のプラトーの存在を示した [6]。この電荷密度に関する仮定はランダムネスの性質から自然に出てくるべきものであるが、技術的な理由により仮定せざるをえなかった。正直なところ、この議論には、数学的に不満な個所が多々あり、まだまだ、改良の余地がある。しかし、電子間相互作用がある場合について、比較的緩い仮定の下でプラトーの存在が示せたのは意義のある事である。

6 奇数分母規則

以上で量子ホール効果の本質的な部分は尽きていると思われるが、奇数分母規則と呼ばれる面白い実験事実があるので少し考察しよう。以下の話は必ずしも数学的に厳密ではないが、簡単な現象論でその奇数分母規則が説明できるので紹介する [4]。基底状態の上にエネルギー・ギャップが開き、

[12] 一般に、ランダムネスの無い系でエネルギー・スペクトルにエネルギー・ギャップのような非自明な構造が現れなければ、ホール・コンダクタンスの量子化は起こらないと考えられている。従って、エネルギー・ギャップを仮定したと敢えて言う必要はないかもしれない。

ホール・コンダクタンスの分数量子化が起こった状況を考えよう。すなわち、$\sigma_{xy} = -e^2(p/q)/h$ で、p, q は互いに素な正の整数とする。面白い実験事実として、このように分数量子化が起こる場合、数少ない例外を除くと、q は奇数となる。例外があるので普遍法則とは言えないが、偶数に比べて圧倒的に奇数が現れるのには何か理由がありそうである。

この理由を説明するための準備をしよう。まず、上で出てきた Lieb-Schultz-Mattis の方法を使うと、そのときと同じ模型について、次の事が証明できる [4]：占有率 ν が整数でないとき、基底状態の上にエネルギー・ギャップが開いているならば、並進対称性が破れていなければならない。

従って、前と同じように相分離のような並進対称性を完全に破ってしまう相転移が起こらないと仮定すると、その並進対称性の破れた基底状態はある周期構造を持つ事になる。一方、良く知られているように、ランダムネス無しのハミルトニアンの１電子固有関数は平面波と調和振動子の固有関数の積の形に書け、調和振動子部分の中心は１次元格子を組む。よって、並進対称性の破れた基底状態はこの格子と整合的なある周期構造を持つ事になる。ここまでは、厳密に証明できるが、これから先は残念ながら正当化できていない。その周期はより短い方が安定と考えられるから、占有率 ν が p/q ならば、その周期は格子点の数にして q 個となる事が期待できる[13]。このとき、q が偶数ならば、１周期当たりの電子数 p は仮定から奇数でなければならない。よって、１周期当たりのホールの数 $q-p$ も奇数となる。q が奇数の場合は次の二通りがある：(i) p が奇数で $q-p$ が偶数、(ii) p が偶数で $q-p$ が奇数。従って、q が奇数の場合、１周期当たりのホールの数もしくは電子の数が偶数となる。

さて、２電子問題を考えよう。電子間に斥力が働くとすると、電子は互いに離れようとする。しかし、今、磁場が２次元平面を垂直に貫いているので、電子は互いの周りをくるくる回ってしまい離れる事ができない。この事から、N 電子状態においても、電子はある種の対をつくった方が安定であると考えられている。しかし、上の結果から、q が偶数の場合、１周期内において、電子もホールも奇数個であるから、どちらも２つずつの組に分ける事はできない。対に組み分けできるためには少なくとも２倍の周期が必要である。一方、q が奇数ならば、１周期内において、電子またはホールのどちらかが偶数であるから、どちらか一方は必ず対に組み分けできる。よって、q が奇数の方が偶数の場合に比べてより安定である事が期待できる。これが奇数分母が偶数分母に比べて圧倒的に多く現れた理由であろう。

7 磁石のスタビリチーを論じて併せて普遍性の宇宙に及ぶ

普遍性という概念は、磁性体の相転移を代表とする臨界現象で鍛えられ成長してきた。しかし、それは他の分野にはそれほど浸透していないし、臨界現象においてさえもその重要性が深く認識されているとは言い難い。実際、特殊なミクロの模型が扱われる事が多く、マクロな現象論との関係は埋めようもない。普遍クラスとしての模型の集まりではなく、特殊な幾つかの模型のみが扱われる背景には、計算機の過度の利用や定量的な計算に対する極度の信仰があると思われる。計算機実験の有用性は言うまでもないが、ある普遍クラスの模型すべてについて計算機実験を実行する事は不可能であるし、まして、その幾つかの模型について計算機実験を行なっただけでそ

[13]同じ模型について、周期と占有率の積は整数でなければならない事が証明される。詳しくは文献 [4] を見られたい。

の普遍構造が論理的に明らかになる事は有り得ない。また、物理であるからには、定量的な結果を出し、実験結果と比べるのは当たり前であるが、ある特殊なミクロの模型から出発し、ある特殊な近似の下に出した答えと実験結果を比較する意味があるかどうかは、甚だ疑わしい。答えが一致してもしなくても、その理由が分からない事がしばしばである。

問題は、我々物理学者が、過去何十年か、熱力学をその代表格とするマクロな現象論を真剣に鍛えてこなかった事にありはしないか？[14] 普遍的な現象の本質的な部分を抽出し、かつ、論理的に構成されたマクロな現象論はそれ自体普遍クラスと成り得る。例えば、熱力学がそうであるように！マクロな現象論とミクロな理論が平行して育ってきても、ある程度ミクロな理論で実験結果が説明できてしまうと、マクロな現象論は、しばしば、そのまま捨て置かれる。本来、マクロな現象論とミクロな理論は相補い合う関係にあり、その２つの整合性こそが重視されるべきである。ミクロな理論と言えどもそれは１つの有効理論に過ぎず、普遍クラスの宇宙を離れて独り歩きする事は有り得ない。そして、その整合性こそがあるミクロな理論をその普遍クラスの一員に加えるべく試金石となるのである。また、優れたマクロな現象論はミクロな理論に対し、その普遍構造を解き明かす指針も与えよう[15]。一般に、普遍クラスどうしの有機的繋がりこそが個々の普遍クラスあるいはその中の系を生き生きとさせる。我々は改めて普遍性という観点に立ち個々の自然現象、いや、物理学全体を見直すべきではなかろうか？

参考文献

[1] R. E. Prange, and S. M. Girvin (eds), *The Quantum Hall Effect*, 2nd ed. Springer, 1990.

[2] T. Koma, *Insensitivity of Quantized Hall Conductance to Disorder and Interactions*, Preprint, cond-mat/9811112.

[3] E. H. Lieb, T. Schultz, and D. C. Mattis, *Ann. Phys. (N.Y.)* **16** (1961) 407; I. Affleck, and E. H. Lieb, *Lett. Math. Phys.* **12** (1986) 57.

[4] T. Koma, *Spectral Gaps of Quantum Hall Systems with Interactions*, Preprint, cond-mat/9809228.

[5] J. M. Barbaroux, J. M. Combes, and P.D. Hislop, *Localization near Band Edges for Random Schrödinger Operators*, Preprint.

[6] T. Koma, *Localization and conductance plateaus in Quantum Hall Systems*, in preparation.

[7] E. H. Lieb, and J. Yngvason, *The Physics and Mathematics of the Second Law of Thermodynamics*, *Phys. Rep.*, to appear, Preprint, cond-mat/9708200.

[8] 大野克嗣, 日本物理学会誌, **52** (1997) 501.

[14] しかし、熱力学は着実に進歩しているようである [7]。また、現象論の意義について、文献 [8] も見られたい。

[15] 今思うと、私は量子ホール効果の優れた現象論の多くを川路紳治先生（学習院大・理）から学生時代に学んだ。私の最近の仕事はそれら現象論をミクロな立場から数学化したに過ぎないとも言える。しかし、それら量子ホール効果の現象論は、誰もが理解できる洗練された形にはまだ遠いように思える。