量子Kramers方程式の基礎となる量子確率微分方程式の微視的導出

斎藤 健，有光 敏彦*
茨城大学理工学研究科，*筑波大学物理

1 はじめに

微視的な運動方程式から出発してマスター方程式や確率微分方程式などの巨視的な方程式を導出する際，時間と空間の粗視化が重要である(以下では，時間の粗視化のみを扱う)。ただし，確率微分方程式とはランジュバン方程式と確率Liouville方程式を意味するものとする。量子系でもHeisenberg方程式から量子マスター方程式や量子確率微分方程式(QSDE)を導出する際に，同様の事情が存在する。

量子マスター方程式は，通常，熱浴と相互作用ハミルトニアン$H_1 = \sum_k (ab_k^\dagger + a^\dagger b_k)$により**線形散逸結合**する系に対して，減衰理論[1]-[3]により系統的に時間の粗視化を行うことで導出される。ただし，aは注目する系の演算子，b_kは熱浴の演算子である。粗視化は注目する系と熱浴の間の結合に関する**弱結合極限**を，**長時間極限**と合わせてとることにより行われる(van Hove極限[4])。Accardi等は[5]-[9] 波動関数の時間発展演算子がvan Hove極限で確率演算子に収束することを示し，Schrödinger方程式から同じモデルに対するQSDEを得た。

注目する系と熱浴の間の相互作用がx–X型のハミルトニアン$H_1 \sim x \sum_k x_k$で与えられる系に対して，著者の一人(T.A)[10]により量子マスター方程式が導出された。ただし，x, x_kはそれぞれ注目する系と熱浴の位置演算子である。そこで得られた量子マスター方程式を**量子*Kramers*方程式**と呼ぶ。量子Kramers方程式は，熱浴のスペクトル関数$J(\omega)$がωに比例する$(J(\omega) \sim \omega)$とき$\hbar \to 0$の極限をとると，古典系のKramers方程式に帰着する[11]。このときの条件を***Kramers*方程式極限**という[10]。同じ条件がCaldeiraとLeggett[12, 13]により摩擦が速度に比例する**オーム的散逸**の条件として提出されている。x–X型のハミルトニアンは回転波近似により線形散逸結合の相互作用ハミルトニアンに帰着する。

QSDEをミクロな視点から導出する試みが数多くなされている。その多くは，Heisenberg方程式をLangevin方程式型に書き換えるもので[14, 15]，通常の微分方程式がどのようにして確率微分方程式に変化するのかは明らかではない。

この論文では，確率的時間発展演算子を得る際に適切な時間の粗視化を行うことにより，量子

Kramers 方程式に対応する QSDE を導出する。導出にあたっては，量子マスター方程式と QSDE に対する適切な枠組みを提供する [16]-[26] 系統的な正準演算子形式である非平衡Thermo Field Dynamics (NETFD)[27]-[31] を用いることにする。

2 微視的モデル

熱浴と相互作用する調和振動子を考える。系のハミルトニアンは

$$H_{tot} = H_0 + \lambda H_1, \quad H_0 = H_S + H_R, \tag{1}$$

と与えられる。ただし，H_SおよびH_Rはそれぞれ注目する振動子および熱浴の自由ハミルトニアンで,

$$H_S = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2}{2}x^2, \quad H_R = \sum_k \left(\frac{p_k^2}{2m_k} + \frac{m_k\omega_k^2}{2}x_k^2 \right), \tag{2}$$

と与えられる。H_1は振動子と熱浴の相互作用ハミルトニアンで

$$H_1 = x\sum_k \mu_k x_k, \tag{3}$$

と与えられる。x, pおよびx_k, p_kは交換関係

$$[x,\ p] = i\hbar, \quad [x_k,\ p_l] = i\hbar\delta_{kl}, \tag{4}$$

を満たす。

ハミルトニアンH_S, H_RおよびH_1はそれぞれ

$$H_S = \hbar\omega_0 \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right), \quad H_R = \sum_k \hbar\omega_k \left(b_k^\dagger b_k + \frac{1}{2} \right), \tag{5}$$

$$H_1 = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}} \sum_k \mu_k \sqrt{\frac{\hbar}{2m_k\omega_k}} (ab_k^\dagger + a^\dagger b_k + ab_k + a^\dagger b_k^\dagger), \tag{6}$$

と書き換えられる。ただし，正準変換

$$a = \sqrt{\frac{m\omega_0}{2\hbar}} \left(x + i\frac{p}{m\omega_0} \right), \quad b_k = \sqrt{\frac{m_k\omega_k}{2\hbar}} \left(x_k + i\frac{p_k}{m_k\omega_k} \right), \tag{7}$$

により，演算子a, b_kを導入した。これらは，正準交換関係

$$[a,\ a^\dagger] = 1, \quad [b_k,\ b_l^\dagger] = \delta_{kl}, \tag{8}$$

を満たす。

NETFD では，演算子a, $a^\dagger$, b_k, $b_k^\dagger$ の他にティルド付き演算子$\tilde{a}$, $\tilde{a}^\dagger$, $\tilde{b}_k$, $\tilde{b}_k^\dagger$ を考える。ただし，ティルド共役~は次のように定義される。

$$(A_1A_2)^\sim = \tilde{A}_1\tilde{A}_2, \tag{9}$$

$$(c_1A_1+c_2A_2)^{\sim}=c_1^*\tilde{A}_1+c_2^*\tilde{A}_2, \tag{10}$$

$$(\tilde{A})^{\sim}=A, \tag{11}$$

$$(A^{\dagger})^{\sim}=\tilde{A}^{\dagger}. \tag{12}$$

A_1, A_2およびAは演算子，c_1およびc_2はc-数である。以下では，$(a,a^{\dagger},\tilde{a},\tilde{a}^{\dagger})$ の表現空間を$\mathcal{H}_S$と記し，$(b_k,b_k^{\dagger},\tilde{b}_k,\tilde{b}_k^{\dagger})$の表現空間を$\Gamma_R$と記すことにする。

熱浴は熱平衡状態にあると仮定する。熱平衡状態は$\langle 1_R|b_k^{\dagger}b_l|0_R\rangle=\bar{n}_k\delta_{kl}$ を満たす**熱真空**により表される。ただし，$\bar{n}_k$はプランク分布

$$\bar{n}_k=\frac{1}{\mathrm{e}^{\hbar\omega_k/(k_BT)}-1}, \tag{13}$$

である。Γ_R上の消滅演算子$(c_k,\tilde{c}_k)$ および生成演算子$(c_k^{\natural},\tilde{c}_k^{\natural})$は*Bogoliubov*変換

$$\begin{pmatrix} c_k \\ \tilde{c}_k^{\natural} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \bar{n}_k+1 & -\bar{n}_k \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_k \\ \tilde{b}_k^{\dagger} \end{pmatrix}, \tag{14}$$

により導入される。それらは，熱真空を消す，すなわち

$$c_k|0_R\rangle=\tilde{c}_k|0_R\rangle=0, \quad \langle 1_R|c_k^{\natural}=\langle 1_R|\tilde{c}_k^{\natural}=0, \tag{15}$$

が成り立ち，また，正準交換関係

$$[c_k,\ c_l^{\natural}]=[\tilde{c}_k,\ \tilde{c}_l^{\natural}]=\delta_{kl}, \tag{16}$$

を満たす。Γ_Rは，$(c_k^{\natural},\tilde{c}_k^{\natural})$を$|0_R\rangle$に，$(c_k,\tilde{c}_k)$を$\langle 1_R|$に繰り返し作用して得られる基底ベクトルにより張られる。

3 量子確率微分方程式の導出

NETFDでは任意の演算子Aに対するHeisenberg演算子は

$$A^H(t)=\mathrm{e}^{i\hat{H}_{tot}t/\hbar}A\mathrm{e}^{-i\hat{H}_{tot}t/\hbar}=\hat{U}_{\lambda}^{-1}(t)\mathrm{e}^{i\hat{H}_0t/\hbar}A\mathrm{e}^{-i\hat{H}_0t/\hbar}\hat{U}_{\lambda}(t), \tag{17}$$

と与えられる。ただし，

$$\hat{H}_{tot}=H_{tot}-\tilde{H}_{tot}, \quad \hat{H}_0=H_0-\tilde{H}_0, \tag{18}$$

である。相互作用表示の時間発展演算子$\hat{U}_{\lambda}(t)$を

$$\hat{U}_{\lambda}(t)=\mathrm{e}^{i\hat{H}_0t/\hbar}\mathrm{e}^{-i\hat{H}_{tot}t/\hbar}, \tag{19}$$

により定義した。$\hat{U}_\lambda(t)$ は**熱空間**$\mathcal{H}_S\otimes\Gamma_R$に作用する。$\hat{U}_\lambda(t)$ の時間発展方程式は

$$\frac{d}{dt}\hat{U}_\lambda(t)=-\frac{i}{\hbar}\lambda\hat{H}_1^I(t)\hat{U}_\lambda(t), \tag{20}$$

と与えられる。ただし，

$$\hat{H}_1^I(t)=\mathrm{e}^{i\hat{H}_0t/\hbar}(H_1-\tilde{H}_1)\mathrm{e}^{-i\hat{H}_0t/\hbar}, \tag{21}$$

である。

$\tau=\lambda^2t$ により定義される巨視的な時間τを導入し，時間発展演算子$\hat{U}_\lambda(\tau/\lambda^2)$ の van Hove 極限に対応する$\lambda\to 0$ 極限を考える。この極限を評価するために，$\hat{U}_\lambda(\tau/\lambda^2)$ をΓ_R内の集団的指数ベクトル (collective exponential vectors) または集団的コヒーレント状態 (collective coherent states) と呼ばれるベクトル

$$|e_\lambda(z[S,T],w[S',T'])\rangle=\exp\left[\sum_k\left(z_k[S,T]c_k^\dagger+w_k^*[S',T']\tilde{c}_k^\dagger\right)\right]|0_R\rangle, \tag{22}$$

$$\langle e_\lambda(z[S,T],w[S',T'])|=\langle 1_R|\exp\left[\sum_k\left(z_k^*[S,T]c_k+w_k[S',T']\tilde{c}_k\right)\right], \tag{23}$$

を導入する。ただし，$z_k[S,T]$, $w_k[S',T']$ は c-数 z_k, w_k を用いて

$$z_k[S,T]=\mu_k\sqrt{\frac{\hbar}{2m_k\omega_k}}\lambda\int_{S/\lambda^2}^{T/\lambda^2}du\ z_k\mathrm{e}^{i(\omega_k-\omega_0)u}, \tag{24}$$

および

$$w_k[S',T']=\mu_k\sqrt{\frac{\hbar}{2m_k\omega_k}}\lambda\int_{S'/\lambda^2}^{T'/\lambda^2}du\ w_k\mathrm{e}^{i(\omega_k-\omega_0)u}, \tag{25}$$

と与えられる。$\hat{U}_\lambda(\tau/\lambda^2)$ の集団的指数ベクトルに関する行列要素を$\hat{K}_\lambda(\tau)$ と記す。すなわち，

$$\hat{K}_\lambda(\tau)\equiv\langle e_\lambda(z_1[S_1,T_1],w_1[S_1',T_1'])|\hat{U}_\lambda(\tau/\lambda^2)|e_\lambda(z_2[S_2,T_2],w_2[S_2',T_2'])\rangle, \tag{26}$$

である。

$d\hat{K}_\lambda(\tau)/d\tau$の$\lambda\to 0$ 極限を評価する。指数ベクトルが生成消滅演算子 c_k, $c_k^\dagger$とそのティルド共役演算子の固有ベクトルであることを用いると，

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}\hat{K}_\lambda(\tau)&=-\frac{i}{\hbar\lambda}\langle e_\lambda(z_1[S_1,T_1],w_1[S_1',T_1'])|\hat{H}_1^I(\tau/\lambda^2)\hat{U}_\lambda(\tau/\lambda^2)|e_\lambda(z_2[S_2,T_2],w_2[S_2',T_2'])\rangle\\&=-\frac{i}{\hbar}(\hat{I}_\lambda+\hat{I}I_\lambda),\end{aligned} \tag{27}$$

を得る。ただし，$\hat{I}_\lambda$は熱真空の消滅演算子 $(c_k,\tilde{c}_k)$ と生成演算子 $(c_k^\dagger,\tilde{c}_k^\dagger)$ に関する正規順序積で構成される項であり，$\hat{I}I_\lambda$は交換関係 $[c_k,\ \hat{U}_\lambda(\tau/\lambda)]$ および $[\tilde{c}_k,\ \hat{U}_\lambda(\tau/\lambda)]$ から得られる項である。$\hat{I}_\lambda$ と$\hat{I}I_\lambda$の代表的な項を書くと次のようになる:

$$\hat{I}_\lambda=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}(a\mathrm{e}^{-2i\omega_0\tau/\lambda^2}+a^\dagger)\frac{\hbar}{\pi}\int_0^\infty d\omega\ J(\omega)\bar{n}(\omega)w_1(\omega)\int_{(S_1'-\tau)/\lambda^2}^{(T_1'-\tau)/\lambda^2}dv\ \mathrm{e}^{i(\omega-\omega_0)v}\hat{K}_\lambda(\tau)+\cdots, \tag{28}$$

$$\hat{I}I_\lambda = -i\frac{\hbar}{2m\omega_0}a a \mathrm{e}^{-2i\omega_0\tau/\lambda^2}\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\omega\ J(\omega)[\bar{n}(\omega)+1]\int_{-\tau/\lambda^2}^0 dv\ \mathrm{e}^{i(\omega-\omega_0)v}\hat{K}_\lambda(\tau+\lambda^2 v)+\cdots. \quad (29)$$

ただし，$J(\omega)$ は

$$J(\omega)=\frac{\pi}{2}\sum_k \frac{\mu_k^2}{m_k\omega_k}\delta(\omega-\omega_k), \quad (30)$$

で定義されるスペクトル関数である。

$\lambda\to 0$ 極限をとる際，時間に関する粗視化の意味を注意深く考慮しなければならない。すなわち，巨視的な時間発展因子 $\mathrm{e}^{\pm 2i\omega_0\tau/\lambda^2}$ と微視的な時間発展因子 $\mathrm{e}^{i(\omega\pm\omega_0)v}$ との時間スケールの違いを保ちながら $\lambda\to 0$ 極限をとらなければならない。これは，次の手続きによりなされる。

P1 $\mathrm{e}^{\pm 2i\omega_0 t/\lambda^2}$ の中の ω_0 を繰り込まれた量 $\omega_0^r=\omega_0/\lambda^2$ で表す。$\mathrm{e}^{\pm i(\omega-\omega_0)v}$ の中の ω_0 はそのままにしておく。

P2 関数 $J(\omega)$, $z_{1,2}(\omega)$, $w_{1,2}(\omega)$, $\bar{n}(\omega)$ を

$$J(\omega)=\lambda^2 J^r(\omega^r), \quad z_{1,2}(\omega)=z_{1,2}^r(\omega^r)/\lambda, \quad w_{1,2}(\omega)=w_{1,2}^r(\omega^r)/\lambda, \quad (31)$$

$$\bar{n}(\omega)=\bar{n}^r(\omega^r)=\frac{1}{\mathrm{e}^{\hbar\omega^r/(k_B T^r)}-1}, \quad (32)$$

のように繰り込まれた量 $J^r(\omega^r)$, $z_{1,2}^r(\omega^r)$, $w_{1,2}^r(\omega^r)$, $\bar{n}^r(\omega^r)$ で表す。ただし,

$$\omega^r=\omega/\lambda^2, \quad T^r=T/\lambda^2, \quad (33)$$

である。

時間に関する粗視化の手続き **P1** と **P2** により，注目する系に対して散逸のある時間発展が導入さる。その時間発展は次の緩和係数 (輸送係数) により特徴付けられる：

$$\kappa(\omega_0)=\frac{1}{m\omega_0}\Im\lim_{\epsilon\to 0+}\int_0^\infty dt\frac{1}{i\hbar}\sum_k \mu_k^2\langle 1_R|[x_k(0),\ x_k(t)]|0_R\rangle \mathrm{e}^{i(\omega_0+i\epsilon)t}=\frac{J(\omega_0)}{m\omega_0}. \quad (34)$$

上記の手続き **P2** において導入された繰り込まれた量を用いると緩和係数 $\kappa(\omega_0)$ は

$$\kappa(\omega_0)=\kappa^r(\omega_0^r)=\frac{J^r(\omega_0^r)}{m\omega_0^r}, \quad (35)$$

となることが分かる。これは，緩和係数 $\kappa(\omega_0)$ が繰り込まれた量であることを示している。

これらの手続きにより，$\hat{I}_\lambda$ および $\hat{I}I_\lambda$ はそれぞれ,

$$\hat{I}=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0^r}}2\hbar J^r(\omega_0^r)(a\mathrm{e}^{-2i\omega_0^r\tau}+a^\dagger)\bar{n}^r(\omega_0^r)w_1^r(\omega_0^r)\chi_{[S_1',T_1']}(\tau)\hat{K}(\tau)+\cdots, \quad (36)$$

および

$$\hat{I}I=-i\frac{\hbar}{2m\omega_0^r}a a\mathrm{e}^{-2i\omega_0^r\tau}\left\{J^r(\omega_0^r)[\bar{n}^r(\omega_0^r)+1]-i\frac{1}{\pi}\wp\int_0^\infty d\omega^r\ \frac{J^r(\omega^r)}{\omega^r-\omega_0^r}[\bar{n}^r(\omega^r)+1]\right\}\hat{K}(\tau)+\cdots, \quad (37)$$

に収束することが分かる。ただし，$\chi_{[S,T]}(\tau)$ はステップ関数$\theta(\tau)$ を用いて

$$\chi_{[S,T]}(\tau) = \theta(\tau - S)\theta(T - \tau), \tag{38}$$

と定義される。$\hat{K}(\tau)$ は$\hat{K}_\lambda(\tau)$ の$\lambda \to 0$極限

$$\hat{K}(\tau) = \lim_{\lambda \to 0} \hat{K}_\lambda(\tau), \tag{39}$$

である。結局，(27) の$\lambda \to 0$極限は

$$\frac{d}{d\tau}\hat{K}(\tau) = -\frac{i}{\hbar}(\hat{I} + \hat{I}I). \tag{40}$$

となることが分かる。

$\hat{K}(\tau)$ が量子Wiener過程 (付録A参照) の表現空間内で定義される指数ベクトル $\langle e(z_1^r[S_1, T_1], w_1^r[S_1', T_1'])|$ および $|e(z_2^r[S_2, T_2], w_2^r[S_2', T_2'])\rangle$ に関する確率的時間発展演算子$\hat{U}(\tau)$ の行列要素として表現できると仮定する。すなわち，

$$\hat{K}(\tau) \equiv \langle e(z_1^r[S_1, T_1], w_1^r[S_1', T_1'])|\hat{U}(\tau)|e(z_2^r[S_2, T_2], w_2^r[S_2', T_2'])\rangle, \tag{41}$$

である。指数ベクトル $\langle e(z^r[S, T], w^r[S', T'])|$ および $|e(z^r[S, T], w^r[S', T'])\rangle$ が，量子Wiener過程の生成消滅演算子 (付録A) の固有ベクトルであることを表す性質 (66)–(69) を用いると，$\hat{U}(\tau)$ に対するIto型のQSDE

$$d\hat{U}(\tau) = -\frac{i}{\hbar}\left\{[\hat{\Delta}^r(\tau) + i\hat{\Pi}^r(\tau)]d\tau + d'\hat{M}^r(\tau)\right\}\hat{U}(\tau), \tag{42}$$

が得られる。ただし，$\hat{\Delta}^r(\tau)$, $\hat{\Pi}^r(\tau)$ および$d'\hat{M}^r(\tau)$ は，

$$\hat{H}_S^r = H_S^r - \tilde{H}_S^r, \quad H_S^r = \frac{(p^r)^2}{2m} + \frac{m(\omega_0^r)^2}{2}(x^r)^2, \tag{43}$$

$$\hat{\Delta}^r = -\delta_1(x^r - \tilde{x}^r)\frac{x^r + \tilde{x}^r}{2} + \frac{i}{\hbar}\delta_2(\omega_0^r)(x^r - \tilde{x}^r)(p^r - \tilde{p}^r), \tag{44}$$

$$\hat{\Pi}^r = -i\kappa^r(\omega_0^r)(x^r - \tilde{x}^r)\frac{p^r + \tilde{p}^r}{2} - \frac{1}{\hbar}D(\omega_0^r)(x^r - \tilde{x}^r)^2, \tag{45}$$

$$d\hat{M}_\tau^r = \sqrt{2\hbar m\omega_0^r\kappa^r(\omega_0^r)}\left(x^r dX_\tau - \tilde{x}^r d\tilde{X}_\tau\right). \tag{46}$$

により定義される演算子を用いて

$$\hat{\Delta}^r(\tau) = \mathrm{e}^{i\hat{H}_S^r\tau/\hbar}\hat{\Delta}^r\mathrm{e}^{-i\hat{H}_S^r\tau/\hbar}, \tag{47}$$

$$\hat{\Pi}^r(\tau) = \mathrm{e}^{i\hat{H}_S^r\tau/\hbar}\hat{\Pi}^r\mathrm{e}^{-i\hat{H}_S^r\tau/\hbar}, \tag{48}$$

$$d'\hat{M}^r(\tau) = \mathrm{e}^{i\hat{H}_S^r\tau/\hbar}dM_\tau^r\mathrm{e}^{-i\hat{H}_S^r\tau/\hbar}, \tag{49}$$

と与えられる。ここで，x^r, p^rは

$$x^r = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0^r}}(a + a^\dagger), \quad p^r = -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega_0^r}{2}}(a - a^\dagger), \tag{50}$$

である。また，次の量を導入した。

$$\delta_1(\omega_0^r) = \frac{1}{\pi}\wp\int_0^\infty d\omega^r \ J^r(\omega^r)\left(\frac{1}{\omega^r + \omega_0^r} + \frac{1}{\omega^r - \omega_0^r}\right) \tag{51}$$

$$\delta_2(\omega_0^r) = \frac{1}{m\omega_0^r}\frac{1}{\pi}\wp\int_0^\infty d\omega^r \ \frac{J^r(\omega^r)}{\omega^r}E_\beta(\omega^r)\left(\frac{1}{\omega^r + \omega_0^r} - \frac{1}{\omega^r - \omega_0^r}\right), \tag{52}$$

$$D(\omega_0^r) = m\kappa^r(\omega_0^r)E_\beta(\omega_0^r), \quad E_\beta(\omega^r) = \hbar\omega^r\left[\bar{n}^r(\omega^r) + \frac{1}{2}\right], \tag{53}$$

$$dX_\tau = dB_\tau \mathrm{e}^{-i\omega_0^r\tau} + dB_\tau^\dagger \mathrm{e}^{i\omega_0^r\tau}. \tag{54}$$

dB_τおよび$dB_\tau^\dagger$は(72)により定義される量子Wiener過程B_τおよび$B_\tau^\dagger$の増分である(付録A参照)。

4 量子確率微分方程式

確率的時間発展演算子$\hat{V}_f(\tau) = \mathrm{e}^{-i\hat{H}_S^r\tau/\hbar}\hat{U}(\tau)$ は確率微分方程式

$$d\hat{V}_f(\tau) = -\frac{i}{\hbar}\hat{\mathcal{H}}_{f,\tau}d\tau\hat{V}_f(\tau), \quad \hat{\mathcal{H}}_{f,\tau}d\tau = (\hat{H}_S^r + \hat{\Delta}^r + i\hat{\Pi}^r)d\tau + d\hat{M}_\tau^r, \tag{55}$$

を満たす。この方程式をもとにQSDEの体系を構成することができる。

量子確率Liouville方程式は熱真空$|0_f(\tau)\rangle = \hat{V}_f(\tau)|0_f(0)\rangle$ に対する方程式として与えられ，

$$d|0_f(\tau)\rangle = -\frac{i}{\hbar}\hat{\mathcal{H}}_{f,\tau}d\tau|0_f(\tau)\rangle, \tag{56}$$

となる。

量子Wiener過程の表現空間内の熱ブラ真空$\langle|$(付録A参照)を確率Liouville方程式(56)に作用することにより，熱真空$|0(\tau)\rangle = \langle|0_f(\tau)\rangle$に対する方程式である量子マスター方程式を得る。その表式は,

$$\frac{\partial}{\partial\tau}|0(\tau)\rangle = -\frac{i}{\hbar}\hat{H}|0(\tau)\rangle, \quad \hat{H} = \hat{H}_S^r + \hat{\Delta}^r + i\hat{\Pi}^r, \tag{57}$$

となる。この方程式は量子Kramers方程式を表す。

量子Langevin方程式は任意の注目する系の演算子Aに対するHeisenberg演算子

$$A^H(\tau) = \hat{V}_f^{-1}(\tau)A\hat{V}_f(\tau) \tag{58}$$

の従う方程式として，

$$dA^H(\tau) = \frac{i}{\hbar}\left[\hat{\mathcal{H}}_f^H(\tau)d\tau, \ A^H(\tau)\right] - \frac{1}{\hbar^2}d\hat{M}^{rH}(\tau)\left[d\hat{M}^{rH}(\tau), \ A^H(\tau)\right], \tag{59}$$

と与えられる。

5 まとめと議論

この論文では，時間に関する適切な粗視化を行うことにより，微視的なモデルから量子 Kramers 方程式に対応する QSDE を導出した。

時間に関する粗視化の手続きは van Hove 極限の操作を，注目する系の振動数ω_0の繰り込みとともに行うことによりなされる。すなわち，巨視的な時間発展を表す因子に現れるω_0/λ^2を繰り込まれた振動数ω_0^rに置き換え，微視的な時間発展を表す因子に現れる振動数ω_0はそのままにして van Hove 極限をとる。

もし繰り込みの操作をせずに$\lambda \to 0$極限をとると，量子 Kramers 方程式に対応する QSDE は得られず，線形散逸結合系に対する QSDE が得られる。これは，微視的なモデルから出発して正しい QSDE を導出するには，時間の粗視化の情報を適切に考慮することが重要であることを示している。

この論文では，NETFD の枠組みを用いて熱空間で QSDE を構成した。これは密度演算子のダイナミクスをもとに QSDE を構成することに対応する。一方，Accardi 等の数学者は，波動関数に対する確率微分方程式である確率 Schrödinger 方程式をもとに QSDE を構成した [5]-[9], [32]-[36]。しかし，そのようにして構成された確率 Schrödinger 方程式は線形散逸系に対するものに限られている。量子 Kramers 方程式に対応する確率 Schrödinger 方程式が構成することができるかどうかを調べることは，今後の課題である。

A 量子 Wiener 過程

次の交換関係を満たすボゾン演算子c_τ, $c_\tau^{\dagger}$およびそのティルド共役$\tilde{c}_\tau$, $\tilde{c}_\tau^{\dagger}$を導入する [26]:

$$[c_\tau,\ c_{\tau'}^{\dagger}] = [\tilde{c}_\tau,\ \tilde{c}_{\tau'}^{\dagger}] = \delta(\tau - \tau'). \tag{60}$$

これらは真空$|\rangle$と$\langle|$を消す:

$$c_\tau|\rangle = \tilde{c}_\tau|\rangle = 0, \quad \langle|c_\tau^{\dagger} = \langle|\tilde{c}_\tau^{\dagger} = 0. \tag{61}$$

指数ベクトルを次のように定義する:

$$|e(z^r[S,T], w^r[S',T'])\rangle = \exp\left[\int_0^\infty d\tau\ \left\{z^r[S,T](\tau)c_\tau^{\dagger} + w^{r*}[S',T'](\tau)\tilde{c}_\tau^{\dagger}\right\}\right]|\rangle, \tag{62}$$

$$\langle e(z^r[S,T], w^r[S',T'])| = \langle|\exp\left[\int_0^\infty d\tau\ \{z^{r*}[S,T](\tau)c_\tau + w^r[S',T'](\tau)\tilde{c}_\tau\}\right]. \tag{63}$$

ただし，$z^r[S,T](\tau)$と$w^r[S',T'](\tau)$は繰り込まれた量ω_0^r, $\kappa^r(\omega_0^r)$, $z^r(\omega_0^r)$, $w^r(\omega_0^r)$を用いてそれぞれ

$$z^r[S,T](\tau) \equiv \sqrt{2\hbar m\omega_0^r\kappa^r(\omega_0^r)}\chi_{[S,T]}(\tau)z^r(\omega_0^r), \tag{64}$$

および

$$w^r[S',T'](\tau) \equiv \sqrt{2\hbar m\omega_0^r \kappa^r(\omega_0^r)}\chi_{[S',T']}(\tau)w^r(\omega_0^r), \tag{65}$$

と定義される。

指数ベクトルは，消滅演算子 $(c_\tau, \tilde{c}_\tau)$ と生成演算子 $(c_\tau^{\text{♀}}, \tilde{c}_\tau^{\text{♀}})$ の固有ベクトルあり，次の性質をもつ:

$$c_\tau|e(z[S,T],w[S',T'])\rangle = z^r[S,T](\tau)|e(z[S,T],w[S',T'])\rangle, \tag{66}$$

$$\tilde{c}_\tau|e(z[S,T],w[S',T'])\rangle = w^{r*}[S',T'](\tau)|e(z[S,T],w[S',T'])\rangle, \tag{67}$$

$$\langle e(z[S,T],w[S',T'])|c_\tau^{\text{♀}} = \langle e(z[S,T],w[S',T'])|z^{r*}[S,T](\tau), \tag{68}$$

$$\langle e(z[S,T],w[S',T'])|\tilde{c}_\tau^{\text{♀}}(\omega_0^r) = \langle e(z[S,T],w[S',T'])|w^r[S',T'](\tau). \tag{69}$$

量子 Wiener 過程を

$$C_\tau = \int_0^\tau ds\ c_s, \quad C_\tau^{\text{♀}} = \int_0^\tau ds\ c_s^{\text{♀}}, \tag{70}$$

とそのティルド共役により定義する。増分 dC_τ, $dC_\tau^{\text{♀}}$ とそのティルド共役の積の規則は次の表のようにまとめられる [26]:

$$\begin{array}{c|ccccc} & dC_\tau & dC_\tau^{\text{♀}} & d\tilde{C}_\tau & d\tilde{C}_\tau^{\text{♀}} & d\tau \\ \hline dC_\tau & 0 & d\tau & 0 & 0 & 0 \\ dC_\tau^{\text{♀}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d\tilde{C}_\tau & 0 & 0 & 0 & d\tau & 0 \\ d\tilde{C}_\tau^{\text{♀}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d\tau & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}. \tag{71}$$

量子 Wiener 過程 B_τ, $B_\tau^\dagger$ とそのティルド共役を

$$B_\tau = C_\tau + \bar{n}^r(\omega_0^r)\tilde{C}_\tau^{\text{♀}}, \quad B_\tau^\dagger = \tilde{C}_\tau + [\bar{n}^r(\omega_0^r)+1]C_\tau^{\text{♀}}, \tag{72}$$

とそのティルド共役により定義する。B_τ と $B_\tau^\dagger$ の定義 (72) と積の規則 (71) より，増分 dB_τ, $dB_\tau^\dagger$ とそのティルド共役に関する積の規則が次の表のようになることが分かる [26]:

$$\begin{array}{c|ccccc} & dB_\tau & dB_\tau^\dagger & d\tilde{B}_\tau & d\tilde{B}_\tau^\dagger & d\tau \\ \hline dB_\tau & 0 & [\bar{n}^r(\omega_0^r)+1]d\tau & \bar{n}^r(\omega_0^r)d\tau & 0 & 0 \\ dB_\tau^\dagger & \bar{n}^r(\omega_0^r)d\tau & 0 & 0 & [\bar{n}^r(\omega_0^r)+1]d\tau & 0 \\ d\tilde{B}_\tau & \bar{n}^r(\omega_0^r)d\tau & 0 & 0 & [\bar{n}^r(\omega_0^r)+1]d\tau & 0 \\ d\tilde{B}_\tau^\dagger & 0 & [\bar{n}^r(\omega_0^r)+1]d\tau & \bar{n}^r(\omega_0^r)d\tau & 0 & 0 \\ d\tau & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}. \tag{73}$$

参考文献

[1] F. Haake, *Springer Tracts in Modern Physics*, vol. 66 (Springer-Verlag, 1973) 98.

[2] F. Shibata and T. Arimitsu, J. Phys. Soc. Japan. **49** (1980) 891, and references therein.

[3] T. Arimitsu, J. Phys. Soc. Japan **51** (1982) 1720.

[4] L. van Hove, Physica **21** (1955) 617.

[5] L. Accardi, A. Frigerio and Y. G, Lu, Lect. Notes in Math. **1396** (Springer 1989) 20.

[6] L. Accardi, A. Frigerio and Y. G, Lu, Commun. Math. Phys. **131** (1990) 537.

[7] L. Accardi and Y. G, Lu, Ann. Inst. Henri Poincaré **54** (1991) 435.

[8] L. Accardi and L. Y. Gang, *Quantum Measurements in Optics*, eds. P. Tombesi and D. F. Walls, (Plenum Press, New York 1992) 247.

[9] L. Accardi, J. Gough and Y. G, Lu, Rep. Math. Phys. **36** (1995) 155.

[10] T. Arimitsu, J. Phys. Soc. Japan **51** (1982) 1054.

[11] H. Kramers, Physica **7** (1940) 174.

[12] A. O. Caldeira and A. J. Leggett, Phys. Rev. Lett. **46** (1981) 211.

[13] A. O. Caldeira and A. J. Leggett, Ann. Phys. (N.Y.) **149** (1983) 374.

[14] H. Mori, Prog. Theor. Phys. **33** (1965) 423.

[15] C. W. Gardiner and M. Collett, Phys. Rev. A **31** (1985) 3761.

[16] T. Arimitsu, Phys. Lett. **A153** (1991) 163.

[17] T. Saito and T. Arimitsu, Modern Phys. Lett. B **6** (1992) 1319.

[18] T. Arimitsu and T. Saito, Bussei Kenkyu **59-2** (1992) 213, in Japanese.

[19] T. Arimitsu and T. Saito, in Proceedings of the Conference on Field Theory and Collective Phenomena in Memory of Prof. Hiroomi Umezawa, eds. F. C. Khanna and G. W. Semenoff (World Scientific) (1995) 250.

[20] T. Arimitsu and T. Saito, Vistas in Astronomy **37** (1993) 99.

[21] T. Arimitsu, M. Ban and T. Saito, Physica **A177** (1991) 329.

[22] T. Arimitsu, M. Ban and T. Saito, in *Structure: from Physics to General Systems*, eds. M. Marinaro and G. Scarpetta (World Scientific, 1991) 163.

[23] T. Saito and T. Arimitsu, Modern Phys. Lett. B **7** (1993) 623.

[24] T. Saito and T. Arimitsu, Modern Phys. Lett. B **7** (1993) 1951.

[25] T. Saito and T. Arimitsu, Bussei Kenkyu **62-1** (1994) 215, in Japanese.

[26] T. Saito and T. Arimitsu, J. Phys. A: Math. Gen. **30** (1997) 7573.

[27] T. Arimitsu and H. Umezawa, Prog. Theor. Phys. **74** (1985) 429.

[28] T. Arimitsu and H. Umezawa, Prog. Theor. Phys. **77** (1987) 32.

[29] T. Arimitsu, in *Thermal Field Theories*, eds. H. Ezawa, T. Arimitsu and Y. Hashimoto (North-Holland, 1991) 207.

[30] T. Arimitsu, 物性研究 **60** (1993) 491.

[31] T. Arimitsu, Condensed Matter Physics (Lviv, Ukraine) **4** (1994) 26.

[32] R. L. Hudson and K. R. Parthasarathy, Commun. Math. Phys. **93** (1984) 301.

[33] R. L. Hudson and K. R. Parthasarathy, Acta Appl. Math. **2** (1984) 353.

[34] R. L. Hudson and J. M. Lindsay, in *Quantum Probability and Applications II*, eds. L. Accardi and W. von Waldenfels, Lecture Notes in Mathematics **1136** (Springer-Verlag, 1984) 276.

[35] K. R. Parthasarathy, Rev. Math. Phys. **1** (1989) 89.

[36] K. R. Parthasarathy, Monographs in Mathematics Vol. 85, *An Introduction to Quantum Stochastic Calculus* (Birkhäuser Verlag, 1992).