

光子計数過程におけるエントロピー変化と情報量

番 雅司

日立製作所基礎研究所

〒 350-0395 埼玉県比企郡鳩山町赤沼 2520

e-mail: m-ban@harl.hitachi.co.jp

1 はじめに

物理系に対して量子測定を行なうと、その測定結果から物理系に関する何らかの情報が得られる。一方、測定された物理系は測定の影響によってその量子状態が変化する為に物理系のエントロピーも変化する。従って、量子測定によって得られる情報量と測定された物理系のエントロピー変化の間には何らかの関係が存在すると考えられる。古典系に対してはこのような関係は詳しく調べられているが [1,2]、量子系に対しては殆ど調べられていない。このような情報量とエントロピー変化の間関係は、盗聴者がいる量子通信路の問題や量子計算における誤り訂正符号の問題など、最近活発に研究されている量子情報理論においても重要になってくる [3,4]。そこで、本報告ではまず光子計数過程における情報量とエントロピー変化の間関係を調べ、その後により一般の量子測定過程における情報量とエントロピー変化の間関係を調べる。研究結果の詳細な導出や解析に関しては、筆者の最近の論文を参照されたい [5,6]。以下では、量子 Markov 過程の基づいた光子計数過程の理論を紹介すし [7,8]、本報告で必要なエントロピーの定義とエントロピーに対して成り立つ関係式を纏めておく [9]。

量子 Markov 過程に基づく光子計数過程は2つの基礎過程からなる。一つは1光子検出過程と呼ばれ、微少時間 dt の間に検出器が共振器内の光子を1個検出する過程である。もう一つの過程は無検出過程と呼ばれ、時間 t の間に光子が全く検出されない過程である。1光子検出過程が起った場合の光子系の量子状態の変化を記述する作用素を \hat{J} と表わすと、量子状態の変化は次の式で与えられる。

$$\hat{\rho} \longrightarrow \hat{\rho}_1 = \frac{\hat{J}\hat{\rho}}{\text{Tr}[\hat{J}\hat{\rho}]} \quad (1)$$

ここで、 $\hat{\rho}$ は光子系の統計作用素である。また、微少時間 dt の間に1光子検出過程が起こる確率は次の式で与えられる。

$$P_1 dt = \text{Tr}[\hat{J}\hat{\rho}] dt. \quad (2)$$

一方、無検出過程における光子系の量子状態の時間発展作用素を $\hat{S}(t)$ と表わそう。

$$\hat{\rho} \longrightarrow \hat{\rho}_0(t) = \frac{\hat{S}(t)\hat{\rho}}{\text{Tr}[\hat{S}(t)\hat{\rho}]} \quad (3)$$

このとき、時間 t の間無検出過程が起こる確率は次の式で与えられる。

$$P_0(t) = \text{Tr}[\hat{S}(t)\hat{\rho}]. \quad (4)$$

量子 Markov 過程に従う光子計数理論では、 $\{\hat{S}(t) | t \in \mathbb{R}\}$ は 1 パラメータ半群となり、次の関係式を満足する生成作用素 $\hat{\mathcal{L}}$ が存在する。

$$\hat{S}(t) = \exp[t\hat{\mathcal{L}}]. \quad (5)$$

さらに、微小時間 dt の間には検出器が 2 個以上の光子を検出することはないという仮定を置く。このとき光子検出確率の規格化条件 $P_0(dt) + P_1 dt = 1$ から、作用素 $\hat{\mathcal{J}}$ と $\hat{\mathcal{L}}$ に対して次の条件が課せられる。

$$\text{Tr}[(\hat{\mathcal{L}} + \hat{\mathcal{J}})\hat{\rho}] = 0. \quad (6)$$

作用素 $\hat{\mathcal{J}}$ と $\hat{S}(t)$ を用いると、時間 t の間に検出器が m 個の光子を検出する “ m 光子検出過程” は次の作用素によって記述される。

$$\hat{\mathcal{N}}_m(t) = \int_0^t dt_m \int_0^{t_m} dt_{m-1} \cdots \int_0^{t_2} dt_1 \hat{S}(t - t_m) \hat{\mathcal{J}} \hat{S}(t_m - t_{m-1}) \hat{\mathcal{J}} \cdots \hat{S}(t_2 - t_1) \hat{\mathcal{J}} \hat{S}(t_1). \quad (7)$$

そして、 m 光子検出過程が起こる確率 $P_m(t)$ と m 光子検出過程が起こった後の光子系の量子状態 $\hat{\rho}_m(t)$ はそれぞれ次の式で与えられる。

$$P_m(t) = \text{Tr}[\hat{\mathcal{N}}_m(t)\hat{\rho}], \quad \hat{\rho}_m(t) = \frac{\hat{\mathcal{N}}_m(t)\hat{\rho}}{\text{Tr}[\hat{\mathcal{N}}_m(t)\hat{\rho}].} \quad (8)$$

一方、検出器によって検出された光子数を参照しない場合、量子状態の時間発展作用素 $\hat{T}(t)$ は次のようになる。

$$\hat{T}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \hat{\mathcal{N}}_m(t) = \exp[t(\hat{\mathcal{L}} + \hat{\mathcal{J}})]. \quad (9)$$

この場合、光子系の量子状態は $\hat{\rho} \rightarrow \hat{T}(t)\hat{\rho}$ と変化する。(6) 式から $\text{Tr}[\hat{T}(t)\hat{\rho}] = 1$ が成り立つことがわかる。また、作用素 $\hat{\mathcal{J}}$ 、 $\hat{S}(t)$ 、 $\hat{T}(t)$ の間には次の関係式が成り立つ。

$$\hat{T}(t) = \hat{S}(t) + \int_0^t d\tau \hat{T}(t - \tau) \hat{\mathcal{J}} \hat{S}(\tau). \quad (10)$$

作用素 $\hat{T}(t)$ による時間発展は、絶対零度の熱浴と相互作用した調和振動子の時間発展と等価である。

1 光子検出過程は検出器が共振器内の光子を 1 個だけ吸収した場合に起こり、このとき共振器内から 1 個の光子が消滅すると仮定しよう。この仮定の下で 1 光子検出過程を記述する作用素 $\hat{\mathcal{J}}$ は次の式で与えられる [7, 8]。

$$\hat{\mathcal{J}}\hat{\rho} = \lambda\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger. \quad (11)$$

実際、 $|n\rangle\langle n| \rightarrow \hat{\mathcal{J}}(|n\rangle\langle n|) \propto |n-1\rangle\langle n-1|$ が成り立つ。この場合、作用素 $\hat{S}(t)\hat{\rho}$ のエルミート性と関係式 (6) から無検出過程の生成作用素 $\hat{\mathcal{L}}$ と時間発展作用素 $\hat{S}(t)$ はそれぞれ次のように求められる。

$$\hat{\mathcal{L}}\hat{\rho} = -\frac{1}{2}\lambda(\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} + \hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a}), \quad (12)$$

$$\hat{S}(t)\hat{\rho} = \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda t\hat{a}^\dagger\hat{a}\right)\hat{\rho}\exp\left(-\frac{1}{2}\lambda t\hat{a}^\dagger\hat{a}\right). \quad (13)$$

ここで、本研究では重要ではない光子系の自由なユニタリ-時間発展は省略した。従って、1光子検出過程と無検出過程における光子系の量子状態の変化は次の式で与えられる。

$$\hat{\rho} \longrightarrow \hat{\rho}_1 = \frac{\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger}{\text{Tr}[\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho}]}, \quad (14)$$

$$\hat{\rho} \longrightarrow \hat{\rho}_0(t) = \frac{\exp(-\frac{1}{2}\lambda t\hat{a}^\dagger\hat{a})\hat{\rho}\exp(-\frac{1}{2}\lambda t\hat{a}^\dagger\hat{a})}{\text{Tr}[\exp(-\lambda t\hat{a}^\dagger\hat{a})\hat{\rho}]}. \quad (15)$$

また、1光子検出過程と無検出過程が起こる確率はそれぞれ次の式で与えられる。

$$P_1 dt = \lambda \text{Tr}[\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho}] dt, \quad P_0(t) = \text{Tr}[\exp(-\lambda t\hat{a}^\dagger\hat{a})\hat{\rho}]. \quad (16)$$

この式から1光子検出過程が起こる確率は光子系の平均光子数に比例することが分かる。さらに、 m 光子検出過程が起こった後の光子系の量子状態と m 光子検出過程が起こる確率はそれぞれ次の式で与えられる。

$$\hat{\rho}_m(t) = \frac{\exp(-\frac{1}{2}\lambda t\hat{a}^\dagger\hat{a})\hat{a}^m\hat{\rho}\hat{a}^{\dagger m}\exp(-\frac{1}{2}\lambda t\hat{a}^\dagger\hat{a})}{\text{Tr}[\hat{a}^{\dagger m}\exp(-\lambda t\hat{a}^\dagger\hat{a})\hat{a}^m\hat{\rho}]} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} P_m(t) &= \frac{1}{m!} [1 - \exp(-\lambda t)]^m \text{Tr}[\hat{a}^{\dagger m}\exp(-\lambda t\hat{a}^\dagger\hat{a})\hat{a}^m\hat{\rho}] \\ &= \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{m!(n-m)!} \gamma_\tau^m (1 - \gamma_\tau)^{n-m} \langle n|\hat{\rho}|n \rangle. \end{aligned} \quad (18)$$

ここで、パラメータ γ_τ は検出器の有効量子効率と呼ばれ、次の式で定義される。

$$\gamma_\tau = 1 - \exp(-\lambda t). \quad (19)$$

以下では光子計数過程によって得られる情報量と光子系のエントロピー変化を考察するので、エントロピーの定義とエントロピーの間に成り立つ関する幾つかの公式を纏めておこう [9]。確率分布 $P_X(j)$ と $P_Y(k)$ で定められる2つの確率事象 X と Y に対して、エントロピー $H(X)$ 、結合エントロピー $H(X, Y)$ 、条件付きエントロピー $H(X|Y)$ 、相互エントロピー $H(X; Y)$ はそれぞれ次の式で与えられる。

$$H(X) = - \sum_j P_X(j) \ln P_X(j), \quad (20)$$

$$H(X, Y) = - \sum_j \sum_k P_{XY}(j, k) \ln P_{XY}(j, k), \quad (21)$$

$$H(X|Y) = - \sum_j \sum_k P_{XY}(j, k) \ln P_{XY}(j|k), \quad (22)$$

$$H(X; Y) = \sum_j \sum_k P_{XY}(j, k) \ln \left[\frac{P_{XY}(j, k)}{P_X(j)P_Y(k)} \right]. \quad (23)$$

ここで、 $P_{XY}(j, k)$ は2つの確率事象の結合確率であり、 $P_{XY}(j|k)$ は条件付き確率を表す。また、各エントロピーの間には次の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned} H(X; Y) &= H(X) + H(Y) - H(X, Y) \\ &= H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X), \end{aligned} \quad (24)$$

$$H(X, Y) = H(Y) + H(X|Y) = H(X) + H(Y|X). \quad (25)$$

さらに、確率分布の間には次のベイズ規則が成り立つ。

$$P_{XY}(j, k) = P_{XY}(j|k)P_Y(k) = P_{YX}(k|j)P_X(j). \quad (26)$$

2 無検出過程におけるエントロピー変化

まず、無検出過程における光子系のエントロピー変化を調べよう。前節の結果から無検出過程における光子系の量子状態の時間発展は次の式で与えられる。

$$\hat{\rho}_0(t) = \frac{\exp(-\frac{1}{2}\tau\hat{a}^\dagger g e^{\tau\hat{a}} \hat{a}) \hat{\rho} \exp(-\frac{1}{2}\tau\hat{a}^\dagger \hat{a})}{\text{Tr}[\exp(-\tau\hat{a}^\dagger \hat{a}) \hat{\rho}]} \quad (27)$$

ここで、 $\tau = \lambda t$ である。従って、光子数の確率分布 $P_0(n; t)$ は次のようになる。

$$P_0(n; t) = \langle n | \hat{\rho}_0(t) | n \rangle = \frac{\exp(-\tau n) \langle n | \hat{\rho} | n \rangle}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\tau n) \langle n | \hat{\rho} | n \rangle} \quad (28)$$

このとき光子系の光子数に関するエントロピー $H_0(t) = -\sum_{n=0}^{\infty} P_0(n; t) \ln P_0(n; t)$ を計算すると次の結果が得られる。

$$H_0(t) = \left(1 - \tau \frac{\partial}{\partial \tau}\right) \ln \left[\sum_{n=0}^{\infty} \langle n | \hat{\rho} | n \rangle \exp(-\tau n) \right] - \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\tau n) \langle n | \hat{\rho} | n \rangle \ln \langle n | \hat{\rho} | n \rangle}{\sum_{n=0}^{\infty} \langle n | \hat{\rho} | n \rangle \exp(-\tau n)} \quad (29)$$

無検出過程における光子系のエントロピーの減少量は $\Delta H(t) = H_0(0) - H_0(t)$ で与えられる。光子系が熱平衡状態 $\hat{\rho} = \frac{1}{1+\bar{n}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}}{1+\bar{n}}\right)^n |n\rangle\langle n|$ にある場合のエントロピーの減少量は次の式で与えられる。

$$\begin{aligned} \Delta H(t) &= \ln\{1 + \bar{n}[1 - \exp(-\tau)]\} - \frac{\tau \bar{n} \exp(-\tau)}{1 + \bar{n}[1 - \exp(-\tau)]} \\ &\quad + \frac{\bar{n}(1 + \bar{n})[1 - \exp(-\tau)]}{1 + \bar{n}[1 - \exp(-\tau)]} \ln\left(1 + \frac{1}{\bar{n}}\right). \end{aligned} \quad (30)$$

一方、光子系がコヒーレント状態 $\hat{\rho} = |\alpha\rangle\langle\alpha|$ ($\bar{n} = |\alpha|^2$) にある場合のエントロピーの減少量は次の式で与えられる。

$$\begin{aligned} \Delta H(t) &= \bar{n}[1 - \exp(-\tau)](1 - \ln \bar{n}) - \tau \bar{n} \exp(-\tau) \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln n!}{n!} \{\bar{n}^n \exp(-\tau) - \bar{n}^n \exp[-\tau n - \bar{n} \exp(-\tau)]\}. \end{aligned} \quad (31)$$

これらのエントロピーの減少量を時間の関数としてプロットすると第1図のようになる。

3 1光子検出によるエントロピー変化

次に1光子検出過程における光子系のエントロピー変化を考えよう。1光子検出過程が起こった場合の光子系の量子状態の変化は次の式で与えられる。

$$\hat{\rho} \rightarrow \hat{\rho}_+ = \frac{\hat{a} \hat{\rho} \hat{a}^\dagger}{\text{Tr}[\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho}]} \quad (32)$$

従って、1光子検出過程が起こる前後での光子系における光子数の確率分布 $P(n) = \langle n | \hat{\rho} | n \rangle$ と $P_+(n) = \langle n | \hat{\rho}_+ | n \rangle$ の間には次の関係式が成り立つ。

$$P_+(n) = \frac{1+n}{\langle \hat{n} \rangle} P(n+1). \quad (33)$$

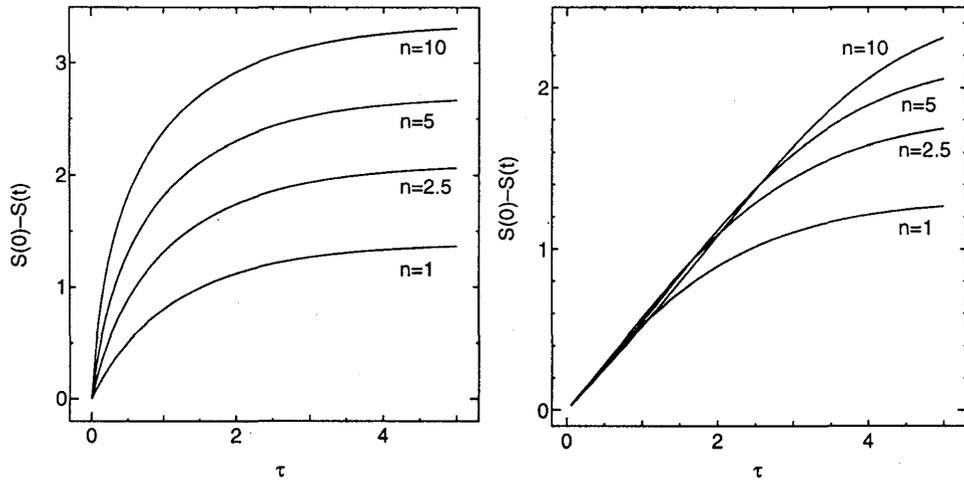


図 1: 無検出過程における光子系のエントロピー減少量の時間変化（熱平衡状態：左図、コヒーレント状態：右図）

ここで、 $\langle \hat{n} \rangle = \text{Tr}[\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho}]$ は平均光子数である。この関係式を用いて 1 光子検出過程における光子系のエントロピーの減少量 $\Delta H_+ = H - H_+$ を求めると次のようになる。

$$\Delta H_+ = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{n}{\langle \hat{n} \rangle} \ln \left(\frac{n}{\langle \hat{n} \rangle} \right) \right] P(n) + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{\langle \hat{n} \rangle} - 1 \right) P(n) \ln P(n). \quad (34)$$

まず光子系がコヒーレント状態にある場合を考えよう。このとき、 $P(n)$ はポアソン分布になり、 $\Delta H_+ = 0$ であることが分かる。即ち、光子系がコヒーレント状態にある場合には 1 光子検出過程が起ってもエントロピーは不変である。次に光子系が熱平衡状態にある場合、 $P(n) = \bar{n}^n / (1 + \bar{n})^n$ を (34) 式に代入すれば次の式が得られる。

$$\Delta H_+ = -(1 + \bar{n}) \ln(1 + \bar{n}) + \bar{n} \ln \bar{n} + \frac{1}{\bar{n}(1 + \bar{n})} \sum_{n=0}^{\infty} n \ln n \left(\frac{\bar{n}}{1 + \bar{n}} \right)^n. \quad (35)$$

次に、光子系が 2 項分布状態 (binomial state: $\hat{\rho} = |\psi_{\text{bin}}(m, p)\rangle \langle \psi_{\text{bin}}(m, p)|$) にある場合を考えよう。ここで、 $|\psi_{\text{bin}}(m, p)\rangle$ は次の式で与えられる。

$$|\psi_{\text{bin}}(m, p)\rangle = \sum_{n=0}^m \sqrt{p(m, n)} |n\rangle, \quad p(m, n) = \binom{m}{n} p^n (1-p)^{m-n}. \quad (36)$$

このとき、光子系のエントロピーの減少量は次のようになる。

$$\Delta H_+ = H_{\text{bin}}(p) + F(p; m-1) - F(p; m). \quad (37)$$

ここで、 $H_{\text{bin}}(p)$ と $F(m; p)$ は次の式で与えられる。

$$H_{\text{bin}} = -p \ln p - (1-p) \ln(1-p), \quad F(m; p) = \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} p^n (1-p)^{m-n} \ln \binom{m}{n}. \quad (38)$$

(35) 式と (37) 式に対して数値計算を行った結果を纏めると次のようになる。

コヒーレント状態	Poisson 分布	$\Delta H_+ = 0$
熱平衡状態	super-Poisson 分布	$\Delta H_+ < 0$
2 項分布状態	sub-Poisson 分布	$\Delta H_+ > 0$

ところで、各量子状態における1光子検出過程の前後での光子数の揺らぎを調べると次のようになる。

1. コヒーレント状態： $(\Delta\hat{n})_+^2 = \bar{n} = (\Delta\hat{n})^2$
2. 熱平衡状態： $(\Delta\hat{n})_+^2 = 2\bar{n}(1 + \bar{n}) > \bar{n}(1 + \bar{n}) = (\Delta\hat{n})^2$
3. 2項分布状態： $(\Delta\hat{n})_+^2 = p(1-p)(m-1) < p(1-p)m = \bar{n} = (\Delta\hat{n})^2$

これらの結果とエントロピーの減少量の結果を纏めると次のようになる。

コヒーレント状態	$(\Delta\hat{n})_+^2 = (\Delta\hat{n})^2$	$\Delta H_+ = 0$
熱平衡状態	$(\Delta\hat{n})_+^2 > (\Delta\hat{n})^2$	$\Delta H_+ < 0$
2項分布状態	$(\Delta\hat{n})_+^2 < (\Delta\hat{n})^2$	$\Delta H_+ > 0$

これらのことから、一般に1光子検出過程における光子系のエントロピー変化と光子系の量子状態の光子統計に関して次の結果が成り立つと考えられる。

super-Poisson 状態	1光子検出 → 揺らぎ増大	エントロピー増加
Poisson 状態	1光子検出 → 揺らぎ不変	エントロピー不変
sub-Poisson 状態	1光子検出 → 揺らぎ減少	エントロピー減少

ただし、Fock 状態 $|n\rangle$ に対しては、 $H = H_+ = \Delta H_+ = 0$ である。

4 エントロピーの減少と情報量

この節では光子検出過程による光子系のエントロピー減少量 $\Delta H(t)$ と m 光子検出過程によって得られる光子系に関する情報量 I の間の関係を調べる。 m 光子検出過程が起った後の光子系における光子数の確率分布は次の式で与えられる。

$$\begin{aligned} \langle n|\hat{\rho}_m(t)|n\rangle &= \frac{(m+n)! \exp(-\tau n) \langle m+n|\hat{\rho}|m+n\rangle}{n! \text{Tr}[\hat{a}^\dagger{}^m \exp(-\tau \hat{a}^\dagger \hat{a}) \hat{a}^m \hat{\rho}]} \\ &= \frac{1}{P_m(t)} \frac{(m+n)!}{m!n!} \gamma_\tau^m (1-\gamma_\tau)^n P_{\text{in}}(n+m). \end{aligned} \quad (39)$$

ここで、 $P_{\text{in}}(n) = \langle n|\hat{\rho}|n\rangle$ は初期状態における光子数の確率分布であり、 $P_m(t)$ は検出器が時間 t の間に m 個の光子を検出する確率である。

$$P_m(t) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{m!(n-m)!} \gamma_\tau^m (1-\gamma_\tau)^{n-m} \langle n|\hat{\rho}|n\rangle. \quad (40)$$

これらの結果から光子検出過程が起った後の光子系のエントロピーは次のように計算される。

$$\begin{aligned} H(t) &= \sum_{m=0}^{\infty} P_m(t) (-1) \sum_{n=0}^{\infty} \langle n|\hat{\rho}_m(t)|n\rangle \ln \langle n|\hat{\rho}_m(t)|n\rangle \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} P_m(t) \ln P_m(t) - \sum_{n=0}^{\infty} P_{\text{in}}(n) \ln P_{\text{in}}(n) - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} P(m|n) P_{\text{in}}(n) \ln P(m|n), \end{aligned} \quad (41)$$

ここで、 $P(m|n)$ は光子系の光子数が n 個に確定している場合に検出器が m 個の光子を検出する条件付き確率を表わす。

$$P(m|n) = \frac{n!}{m!(n-m)!} \gamma_\tau^m (1-\gamma_\tau)^{n-m}. \quad (42)$$

ところで、光子系の初期状態におけるエントロピーを $H(X_{\text{in}})$ 、光子計数の結果に関するエントロピーを $H(Y_{\text{out}})$ と表わせば、(41) 式は次のように表わすことができる。

$$H(t) = -H(Y_{\text{out}}) + H(X_{\text{in}}) - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} P(m|n)P_{\text{in}}(n) \ln P(m|n). \quad (43)$$

従って、光子検出過程における光子系のエントロピー減少量 $\Delta H(t)$ は次の式で与えられる。

$$\begin{aligned} \Delta H(t) &= H(X_{\text{in}}) - H(t) \\ &= -H(Y_{\text{out}}) + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} P(m|n)P_{\text{in}}(n) \ln P(m|n) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} P(m|n)P_{\text{in}}(n) \ln \left[\frac{P(m|n)}{P_m(t)} \right]. \end{aligned} \quad (44)$$

次に、 m 光子検出過程によって得られる光子系の情報量 $I(t)$ を求めよう。ここで、 m 光子系検出過程が起こる確率 $P_m(t)$ が次のように表わされることに注意しよう。

$$\begin{aligned} P_m(t) &= \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{m!(n-m)!} \gamma_{\tau}^m (1-\gamma_{\tau})^{n-m} P_{\text{in}}(n) \\ &= \sum_{n=m}^{\infty} P(m|n)P_{\text{in}}(n). \end{aligned} \quad (45)$$

そして、 $P_m(t)$ が出力確率、 $P(m|n)$ が条件付き確率、 $P_{\text{in}}(n)$ が入力確率に対応することから、相互エントロピーで表わされる情報量 $I(t)$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} I(t) &= H(X_{\text{in}}) - H(X_{\text{in}}|Y_{\text{out}}) = H(Y_{\text{out}}) - H(Y_{\text{out}}|X_{\text{in}}) \\ &= -\sum_{m=0}^{\infty} P_m(t) \ln P_m(t) + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} P(m|n)P_{\text{in}}(n) \ln P(m|n) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} P(m|n)P_{\text{in}}(n) \ln \left[\frac{P(m|n)}{P_m(t)} \right]. \end{aligned} \quad (46)$$

従って、光子系のエントロピーの減少量 $\Delta H(t)$ と測定結果から得られる光子系に関する情報量 $I(t)$ は等しい。即ち、次の関係式が成り立つ。

$$\Delta H(t) = I(t). \quad (47)$$

ところで、光子系検出過程において全エントロピーが増加することは容易に確かめることができる。

最後に、光子系が熱平衡状態とコヒーレント状態にある場合に光子系検出過程によって得られる光子数に関する情報量を求めよう。熱平衡状態の場合に得られる情報量は次の式で与えられる。

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{1}{1+\bar{n}} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n}{n} \left(\frac{\gamma_{\tau}\bar{n}}{1+\bar{n}} \right)^m \left[\frac{(1-\gamma_{\tau})\bar{n}}{1+\bar{n}} \right]^n \ln \binom{m+n}{n} \\ &\quad + (1+\gamma_{\tau}\bar{n}) \ln(1+\gamma_{\tau}\bar{n}) - \gamma_{\tau}\bar{n} \ln \bar{n} - \tau(1-\gamma_{\tau})\bar{n}. \end{aligned} \quad (48)$$

一方、コヒーレント状態の場合に得られる情報量は次のようになる。

$$I_{\text{co}}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln[(n+m)!]}{m!n!} (\gamma_{\tau}\bar{n})^m [(1-\gamma_{\tau})\bar{n}]^n \exp(-\bar{n})$$

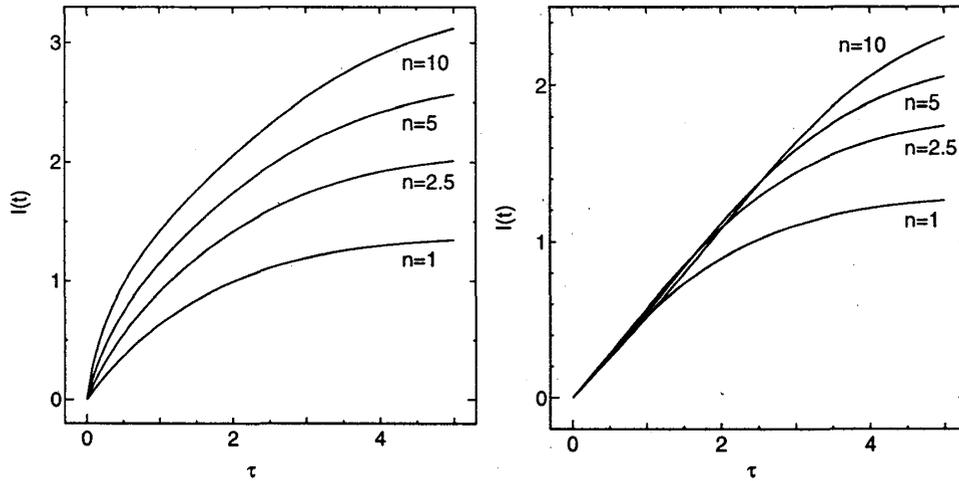


図 2: 光子計数過程による熱平衡状態 (左図)、及びコヒーレント状態 (右図) における光子数に関する情報量

$$- \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{n!} [(1 - \gamma_{\tau})\bar{n}]^n \exp[-(1 - \gamma_{\tau})\bar{n}] - \gamma_{\tau}\bar{n} \ln \bar{n} + [\gamma - \tau(1 - \gamma_{\tau})]\bar{n}. \quad (49)$$

これらの結果を $\tau = \lambda t$ の関数としてプロットすると第 2 図のようになる。尚、光子計数過程におけるエントロピー変化と情報量に関しては文献 [10] を参照されたい。

5 量子測定におけるエントロピー変化と情報量

これまでは光子計数過程における情報量とエントロピー変化について考察してきたが、ここではもう少し一般的な量子測定について調べる。そこで物理系 S の物理量 $\hat{\mathcal{X}}_S$ の測定過程を考えよう。測定過程のステップを簡単に纏めると次のようになる。

1. 測定装置 A をある初期状態 $\hat{\rho}_{\text{in}}^A$ に準備する。
2. 測定装置 A を物理系 S と相互作用させる。このとき相互作用後の合成系の量子状態は次の式で与えられる。

$$\hat{\rho}_{\text{out}}^{SA} = \hat{U}_{SA}(\hat{\rho}_{\text{in}}^S \otimes \hat{\rho}_{\text{in}}^A)\hat{U}_{SA}^\dagger. \quad (50)$$

ここで、 $\hat{\rho}_{\text{in}}^S$ は測定しようとしている物理系の量子状態であり、 \hat{U}_{SA} は物理系と測定装置の相互作用を表わすユニタリー作用素である。

3. 測定装置 A のある物理量 $\hat{\mathcal{Y}}_A$ (pointer observable) の値を読み出す。

ここでは議論を簡単にする為に、物理量 $\hat{\mathcal{X}}_S$ と $\hat{\mathcal{Y}}_A$ に関して次のようなスペクトル分解を仮定する。

$$\hat{\mathcal{X}}_S = \sum_{\mu \in \mathcal{M}} \mu |\psi_S(\mu)\rangle\langle\psi_S(\mu)| = \sum_{\mu \in \mathcal{M}} \mu \hat{E}_{\mathcal{X}}^S(\mu), \quad (51)$$

$$\hat{\mathcal{Y}}_A = \sum_{\nu \in \mathcal{N}} \nu |\phi_A(\nu)\rangle\langle\phi_A(\nu)| = \sum_{\nu \in \mathcal{N}} \nu \hat{E}_{\mathcal{Y}}^A(\nu). \quad (52)$$

測定結果 ν が得られた場合の測定後の物理系 S の量子状態は次の式で与えられる [11]。

$$\hat{\rho}_{\text{out}}^S(\nu) = \frac{\text{Tr}_A[(\hat{I}_S \otimes \hat{E}_Y^A(\nu))\hat{\rho}_{\text{out}}^{SA}]}{\text{Tr}_{SA}[(\hat{I}_S \otimes \hat{E}_Y^A(\nu))\hat{\rho}_{\text{out}}^{SA}]} \quad (53)$$

また、測定結果 ν が得られる確率は次のように表わされる。

$$P_{\text{out}}^A(\nu) = \text{Tr}_{SA}[(\hat{I}_S \otimes \hat{E}_Y^A(\nu))\hat{\rho}_{\text{out}}^{SA}] \quad (54)$$

さらに、測定結果 ν が得られた後の物理系 S における物理量 $\hat{\mathcal{X}}_S$ に関する条件付き確率は次の式で与えられる。

$$P_{\text{out}}^S(\mu|\nu) = \text{Tr}_S[\hat{E}_{\hat{\mathcal{X}}}^S(\mu)\hat{\rho}_{\text{out}}^S(\nu)] \quad (55)$$

ところで、(50) 式を (54) 式に代入すれば、確率分布 $P_{\text{out}}^A(\nu)$ は次のように表すことができる。

$$P_{\text{out}}^A(\nu) = \text{Tr}_S[\hat{\Pi}_S(\nu)\hat{\rho}_{\text{in}}^S], \quad (56)$$

$$\hat{\Pi}_S(\nu) = \text{Tr}_A[\hat{\mathcal{U}}_{SA}^\dagger(\hat{I}_S \otimes \hat{E}_Y^A(\nu))\hat{\mathcal{U}}_{SA}(\hat{I}_S \otimes \hat{\rho}_{\text{in}}^S)]. \quad (57)$$

ここで、 $\hat{\Pi}_S(\nu)$ は次の条件を満足する確率作用素測度である。

$$\hat{\Pi}_S(\nu) \geq 0, \quad \sum_{\nu \in \mathcal{N}} \hat{\Pi}_S(\nu) = \hat{I}. \quad (58)$$

この確率作用素測度 $\hat{\Pi}_S(\nu)$ を用いて物理系 S の作用素 $\hat{\mathcal{X}}_S^{\text{op}}(n)$ を次の式で定義する。

$$\hat{\mathcal{X}}_S^{\text{op}}(n) = \sum_{\nu \in \mathcal{N}} \nu^n \hat{\Pi}_S(\nu) = \text{Tr}_A[\hat{\mathcal{U}}_{SA}^\dagger(\hat{I}_S \otimes \hat{\mathcal{Y}}_A^n)\hat{\mathcal{U}}_{SA}(\hat{I}_S \otimes \hat{\rho}_{\text{in}}^S)]. \quad (59)$$

このような作用素は “operational observable”, “unsharp observable”, “fuzzy observable” 等と呼ばれる [12]。これに対して、作用素 $\hat{\mathcal{X}}_S$ は “intrinsic observable” と呼ばれる。確率作用素測度 $\hat{\Pi}_S(\nu)$ は射影作用素ではないので、“operational observable” は Hermite 作用素にならない。

$$\hat{\mathcal{X}}_S^{\text{op}}(n) \neq [\hat{\mathcal{X}}_S^{\text{op}}(1)]^n. \quad (60)$$

以下では、次の条件を満足する量子測定を考える。

$$[\hat{\mathcal{X}}_S^m, \hat{\mathcal{X}}_S^{\text{op}}(n)] = 0. \quad (61)$$

即ち、“intrinsic observable” と “operational observable” が可換になるような量子測定を考える。このとき、(57) 式から次の関係式が成り立つ。

$$P_{\text{out}}^A(\nu) = \sum_{\mu \in \mathcal{M}} P_{SA}(\nu|\mu)P_{\text{in}}^S(\mu). \quad (62)$$

ここで、条件付き確率 $P_{SA}(\nu|\mu)$ は次の式で与えられる。

$$P_{SA}(\nu|\mu) = \langle \psi_S(\mu) | \hat{\Pi}_S(\nu) | \psi_S(\mu) \rangle. \quad (63)$$

この式で与えられる $P_{SA}(\nu|\mu)$ が次の条件を満足することは明らかである。

$$P_{SA}(\nu|\mu) \geq 0, \quad \sum_{\nu \in \mathcal{N}} P_{SA}(\nu|\mu) = 1. \quad (64)$$

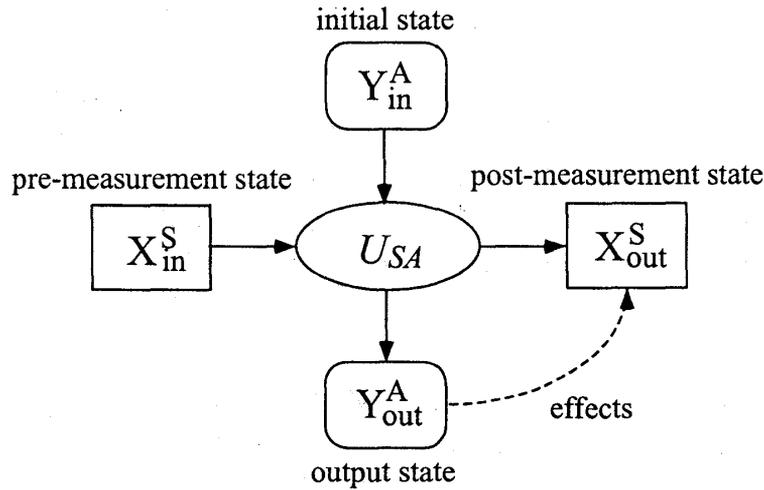


図 3: 量子測定過程の概念図

従って、物理量 $\hat{\mathcal{X}}_S$ の初期状態における確率 $P_{in}^S(\mu) = \langle \psi_S(\mu) | \hat{\rho}_{in}^S | \psi_S(\mu) \rangle$ 、測定結果の確率 $P_{out}^A(\nu)$ 、条件付き確率 $P_{SA}(\nu|\mu)$ を用いると量子測定によって得られる情報量 $I(Y_{out}^A; X_{in}^S)$ は次のように表わすことができる。

$$I(Y_{out}^A; X_{in}^S) = \sum_{\mu \in \mathcal{M}} \sum_{\nu \in \mathcal{N}} P_{SA}(\nu|\mu) P_{in}^S(\mu) \ln \left[\frac{P_{SA}(\nu|\mu)}{P_{out}^A(\nu)} \right]. \quad (65)$$

第3図は量子測定過程の概念図を示したものである。

次に測定結果が得られた後の物理系 S における物理量 $\hat{\mathcal{X}}_S$ の Shannon エントロピーを求める。この Shannon エントロピーは次の式で与えられる。

$$H(X_{out}^S | Y_{out}^A) = - \sum_{\mu \in \mathcal{M}} \sum_{\nu \in \mathcal{N}} P_{out}^A(\nu) P_{out}^S(\mu|\nu) \ln P_{out}^S(\mu|\nu). \quad (66)$$

従って、Shannon エントロピーの減少量は次のようになる。

$$\Delta H(X_{out}^S, X_{in}^S | Y_{out}^A) = H(X_{in}^S) - H(X_{out}^S | Y_{out}^A). \quad (67)$$

また、エントロピー関数 $(-x \ln x)$ の凸性を用いれば、量子測定過程における Shannon エントロピーの減少量 $\Delta H(X_{out}^S, X_{in}^S | Y_{out}^A)$ と von Neumann エントロピーの減少量 $\Delta S(X_{out}^S, X_{in}^S | Y_{out}^A)$ の間には次の関係式が成り立つことが分かる。

$$[\hat{\mathcal{X}}_S, \hat{\rho}_{in}^S] = 0 \rightarrow \Delta H(X_{out}^S, X_{in}^S | Y_{out}^A) \leq \Delta S(X_{out}^S, X_{in}^S | Y_{out}^A), \quad (68)$$

$$[\hat{\mathcal{X}}_S, \hat{\rho}_{out}^S(\nu)] = 0 \rightarrow \Delta H(X_{out}^S, X_{in}^S | Y_{out}^A) \geq \Delta S(X_{out}^S, X_{in}^S | Y_{out}^A). \quad (69)$$

ここで、等号が成り立つのは $[\hat{\mathcal{X}}_S, \hat{\rho}_{in}^S] = [\hat{\mathcal{X}}_S, \hat{\rho}_{out}^S(\nu)] = 0$ の場合である。また、各 von Neumann エントロピーは次の式で与えられる。

$$\Delta S(X_{out}^S, X_{in}^S | Y_{out}^A) = S(X_{in}^S) - S(X_{out}^S | Y_{out}^A), \quad (70)$$

$$S(X_{in}^S) = -\text{Tr}_S[\hat{\rho}_{in}^S \ln \hat{\rho}_{in}^S], \quad (71)$$

$$S(X_{out}^S | Y_{out}^A) = - \sum_{\nu \in \mathcal{N}} P_{out}^A(\nu) \text{Tr}_S[\hat{\rho}_{out}^S(\nu) \ln \hat{\rho}_{out}^S(\nu)]. \quad (72)$$

以下では、量子測定過程における Shannon エントロピーの減少量 $\Delta H(X_{out}^S, X_{in}^S | Y_{out}^A)$ と測定結果から得られる情報量 $I(Y_{out}^A; X_{in}^S)$ の間の関係を幾つかの量子測定に対して調べる。

5.1 ビームスプリッタを用いた光子数測定

量子測定の例としてビームスプリッタを用いた光子数の測定を考える。任意の量子状態 $\hat{\rho}_{\text{in}}^S$ にある物理系 S の光子数に関する情報を求めるものとする。従って、 $\hat{X}_S = \hat{a}_S^\dagger \hat{a}_S$ 及び $\hat{E}_\lambda^S(n) = |n_S\rangle \langle n_S|$ である。測定装置 A は真空状態 ($\hat{\rho}_{\text{in}}^A = |0_A\rangle \langle 0_A|$) に準備されもの仮定する。また、測定装置 A の“pointer observable”は光子数 ($\hat{Y}_A = \hat{a}_A^\dagger \hat{a}_A$, $\hat{E}_\lambda^A(n) = |n_A\rangle \langle n_A|$) である。物理系 S と測定装置 A の相互作用を表わすユニタリー作用素 \hat{U}_{SA} は次の式で与えられる。

$$\hat{U}_{SA} = \exp[-\theta(\hat{a}_S^\dagger \hat{a}_A - \hat{a}_S \hat{a}_A^\dagger)]. \quad (73)$$

このユニタリー作用素は透過率 $\mathcal{T} = \cos^2 \theta$ (反射率 $\mathcal{R} = \sin^2 \theta$) の損失の無いビームスプリッタによる量子状態の変化を記述する。以上のように設定された測定系において、相互作用後の合成系 $S + A$ の量子状態は次のようになる [13-15]。

$$\hat{\rho}_{\text{out}}^{SA} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{m!n!} \left(\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{T}}\right)^{m+n}} \hat{a}_S^m \mathcal{T}^{\frac{1}{2}} \hat{a}_S^\dagger \hat{a}_S \hat{\rho}_{\text{in}}^S \mathcal{T}^{\frac{1}{2}} \hat{a}_S^\dagger \hat{a}_S \hat{a}_S^{\dagger n} \otimes |m_A\rangle \langle n_A|. \quad (74)$$

従って、測定装置 A の光子数が m であったときの物理系 S の量子状態と測定装置 A の光子数が m である確率はそれぞれ次の式で与えられる。

$$\hat{\rho}_{\text{out}}^S(m) = \frac{\hat{a}_S^m \mathcal{T}^{\frac{1}{2}} \hat{a}_S^\dagger \hat{a}_S \hat{\rho}_{\text{in}}^S \mathcal{T}^{\frac{1}{2}} \hat{a}_S^\dagger \hat{a}_S \hat{a}_S^{\dagger m}}{\text{Tr}_S[\hat{a}_S^m \mathcal{T}^{\frac{1}{2}} \hat{a}_S^\dagger \hat{a}_S \hat{\rho}_{\text{in}}^S \mathcal{T}^{\frac{1}{2}} \hat{a}_S^\dagger \hat{a}_S \hat{a}_S^{\dagger m}]}, \quad (75)$$

$$P_{\text{out}}^A(m) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{m!(n-m)!} \mathcal{R}^m \mathcal{T}^{n-m} \langle n_S | \hat{\rho}_{\text{in}}^S | n_S \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} P_{SA}(m|n) P_{\text{in}}^S(n). \quad (76)$$

ここで、条件付き確率 $P_{SA}(m|n)$ と初期確率分布 $P_{\text{in}}^S(n)$ は次の式で与えられる。

$$P_{SA}(m|n) = \frac{n!}{m!(n-m)!} \mathcal{R}^m \mathcal{T}^{n-m}, \quad P_{\text{in}}^S(n) = \langle n_S | \hat{\rho}_{\text{in}}^S | n_S \rangle. \quad (77)$$

また、この測定系における“operational observable”は次のようになる。

$$\hat{\mathcal{N}}_S^{\text{op}}(n) = \left. \frac{\partial^n}{\partial \xi^n} [1 + \mathcal{R}(e^\xi - 1)]^{\hat{a}_S^\dagger \hat{a}_S} \right|_{\xi=0}. \quad (78)$$

従って、“operational observable”は“intrinsic observable ($\hat{a}_S^\dagger \hat{a}_S$)”と可換であることが分かる。以上のことから、この測定によって得られる物理系 S の光子数に関する情報量 $I(Y_{\text{out}}^A | X_{\text{in}}^S)$ は次の式で与えられる。

$$I(Y_{\text{out}}^A; X_{\text{in}}^S) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} P_{SA}(m|n) P_{\text{in}}^S(n) \ln \left[\frac{P_{SA}(m|n)}{P_{\text{out}}^A(m)} \right]. \quad (79)$$

一方、測定過程における物理系 S の光子数に関するエントロピーの減少量 $\Delta H(X_{\text{out}}^S, X_{\text{in}}^S | Y_{\text{out}}^A)$ は次の式で与えられる。

$$\begin{aligned} \Delta H(X_{\text{out}}^S, X_{\text{in}}^S | Y_{\text{out}}^A) &= - \sum_{n=0}^{\infty} P_{\text{in}}^S(n) \ln P_{\text{in}}^S(n) \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} P_{\text{out}}^A(m) \langle n_S | \hat{\rho}_{\text{out}}^S(m) | n_S \rangle \ln \langle n_S | \hat{\rho}_{\text{out}}^S(m) | n_S \rangle. \end{aligned} \quad (80)$$

ここで、行列要素 $\langle n_S | \hat{\rho}_{\text{out}}^S(m) | n_S \rangle$ が次のように表わされることに注意しよう。

$$\langle n_S | \hat{\rho}_{\text{out}}^S(m) | n_S \rangle = \frac{P_{SA}(m|n+m)P_{\text{in}}^S(n+m)}{\sum_{n=0}^{\infty} P_{SA}(m|n+m)P_{\text{in}}^S(n+m)} = \frac{P_{SA}(m|n+m)P_{\text{in}}^S(n+m)}{P_{\text{out}}^A(m)}. \quad (81)$$

この関係式を用いるとエントロピーの減少量 $\Delta H(X_{\text{out}}^S, X_{\text{in}}^S | Y_{\text{out}}^A)$ は次のように計算ができる。

$$\begin{aligned} \Delta H(X_{\text{out}}^S, X_{\text{in}}^S | Y_{\text{out}}^A) &= - \sum_{n=0}^{\infty} P_{\text{in}}^S(n) \ln P_{\text{in}}^S(n) \\ &\quad + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} P_{SA}(m|n+m) P_{\text{in}}^S(n+m) \ln \left[\frac{P_{SA}(m|n+m) P_{\text{in}}^S(n+m)}{P_{\text{out}}^A(m)} \right] \\ &= - \sum_{n=0}^{\infty} P_{\text{in}}^S(n) \ln P_{\text{in}}^S(n) + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} P_{SA}(m|n) P_{\text{in}}^S(n) \ln \left[\frac{P_{SA}(m|n) P_{\text{in}}^S(n)}{P_{\text{out}}^A(m)} \right] \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} P_{SA}(m|n) P_{\text{in}}^S(n) \ln \left[\frac{P_{SA}(m|n)}{P_{\text{out}}^A(m)} \right] \\ &= I(Y_{\text{out}}^A; X_{\text{in}}^S). \end{aligned} \quad (82)$$

従って、測定過程による物理系 S の光子数に関するエントロピーの減少量が測定結果から得られる物理系 S の光子数に関する情報量に等しい。

$$\Delta H(X_{\text{out}}^S, X_{\text{in}}^S | Y_{\text{out}}^A) = I(Y_{\text{out}}^A; X_{\text{in}}^S). \quad (83)$$

5.2 非縮退パラメトリック増幅を用いた光子数測定

次に非縮退パラメトリック増幅器を用いた光子数の測定を考えよう。この場合の測定系の構成は、物理系 S と測定装置 A の相互作用以外はビームスプリッタの場合と同じである。非縮退パラメトリック増幅器を用いた光子数の測定の場合、ユニタリー作用素 \hat{U}_{SA} は次の式で与えられる。

$$\hat{U}_{SA} = \exp[\theta(\hat{a}_S^\dagger \hat{a}_A^\dagger - \hat{a}_S \hat{a}_A)]. \quad (84)$$

このとき、相互作用後の合成系 $S + A$ の量子状態は次の式で与えられる [15]。

$$\hat{\rho}_{\text{out}}^{SA} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathcal{L}^{\frac{1}{2}(m+n)}}{\sqrt{m!n!}} \hat{a}_S^{\dagger m} \mathcal{K}^{\frac{1}{2} \hat{a}_S \hat{a}_S^\dagger} \hat{\rho}_{\text{in}}^S \mathcal{K}^{\frac{1}{2} \hat{a}_S \hat{a}_S^\dagger} \hat{a}_S^n \otimes |m_A\rangle \langle n_A|. \quad (85)$$

ここで、パラメータ λ と χ は次の式で定義される。

$$\mathcal{L} = \tanh^2 \theta, \quad \mathcal{K} = \frac{1}{\cosh^2 \theta} \quad (\mathcal{L} + \mathcal{K} = 1). \quad (86)$$

従って、測定装置 A の光子数が m であったときの物理系 S の量子状態と測定装置の光子数が m である確率はそれぞれ次の式で与えられる。

$$\hat{\rho}_{\text{out}}^S(m) = \frac{\hat{a}_S^{\dagger m} \mathcal{K}^{\frac{1}{2} \hat{a}_S \hat{a}_S^\dagger} \hat{\rho}_{\text{in}}^S \mathcal{K}^{\frac{1}{2} \hat{a}_S \hat{a}_S^\dagger} \hat{a}_S^m}{\text{Tr}_S[\hat{a}_S^{\dagger m} \mathcal{K}^{\frac{1}{2} \hat{a}_S \hat{a}_S^\dagger} \hat{\rho}_{\text{in}}^S \mathcal{K}^{\frac{1}{2} \hat{a}_S \hat{a}_S^\dagger} \hat{a}_S^m]}, \quad (87)$$

$$P_{\text{out}}^A(m) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+m)!}{m!n!} \mathcal{L}^m \mathcal{K}^{n+1} \langle n_S | \hat{\rho}_{\text{in}}^S | n_S \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} P_{SA}(m|n) P_{\text{in}}^S(n). \quad (88)$$

ここで、条件付き確率 $P_{SA}(m|n)$ は次の式で与えられる。

$$P_{SA}(m|n) = \frac{(n+m)!}{m!n!} \mathcal{L}^m \mathcal{K}^{n+1}. \quad (89)$$

また、この測定系における “operational observable” は次のようになる。

$$\hat{\mathcal{N}}_S^{\text{op}}(n) = \sum_{m=0}^{\infty} m^n \hat{\Pi}_S(m) = \frac{\partial^n}{\partial \xi^n} \left(\frac{\mathcal{K}}{1 - \mathcal{L}e\xi} \right)^{\hat{a}_S \hat{a}_S^\dagger} \Big|_{\xi=0}. \quad (90)$$

従って、“operational observable” は “intrinsic observable ($\hat{a}_S^\dagger \hat{a}_S$)” と可換であることがわかる。更に、関係式

$$\begin{aligned} \langle n_S | \hat{\rho}_{\text{out}}^S(m) | n_S \rangle &= \frac{P_{SA}(m|n-m) P_{\text{in}}^S(n-m)}{\sum_{n=0}^{\infty} P_{SA}(m|n-m) P_{\text{in}}^S(n-m)} \\ &= \frac{P_{SA}(m|n-m) P_{\text{in}}^S(n-m)}{P_{\text{out}}^A(m)}. \end{aligned} \quad (91)$$

を用いれば、測定過程による物理系 S の光子数に関するエントロピーの減少量 $\Delta H(X_{\text{out}}^S, X_{\text{in}}^S | Y_{\text{out}}^A)$ は次のように計算することができる。

$$\begin{aligned} \Delta H(X_{\text{out}}^S, X_{\text{in}}^S | Y_{\text{out}}^A) &= - \sum_{n=0}^{\infty} P_{\text{in}}^S(n) \ln P_{\text{in}}^S(n) \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} P_{\text{out}}^A(m) \langle n_S | \hat{\rho}_{\text{out}}^S(m) | n_S \rangle \ln \langle n_S | \hat{\rho}_{\text{out}}^S(m) | n_S \rangle \\ &= - \sum_{n=0}^{\infty} P_{\text{in}}^S(n) \ln P_{\text{in}}^S(n) \\ &\quad + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} P_{SA}(m|n-m) P_{\text{in}}^S(n-m) \ln \left[\frac{P_{SA}(m|n-m) P_{\text{in}}^S(n-m)}{P_{\text{out}}^A(m)} \right] \\ &= - \sum_{n=0}^{\infty} P_{\text{in}}^S(n) \ln P_{\text{in}}^S(n) + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} P_{SA}(m|n) P_{\text{in}}^S(n) \ln \left[\frac{P_{SA}(m|n) P_{\text{in}}^S(n)}{P_{\text{out}}^A(m)} \right] \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} P_{SA}(m|n) P_{\text{in}}^S(n) \ln \left[\frac{P_{SA}(m|n)}{P_{\text{out}}^A(m)} \right] \\ &= I(Y_{\text{out}}^A; X_{\text{in}}^S). \end{aligned} \quad (92)$$

従って、測定過程による物理系 S の光子数に関するエントロピーの減少量が測定結果から得られる物理系 S の光子数に関する情報量に等しい。

$$\Delta H(X_{\text{out}}^S, X_{\text{in}}^S | Y_{\text{out}}^A) = I(Y_{\text{out}}^A; X_{\text{in}}^S). \quad (93)$$

以上の考察では、測定装置 A の光子数の測定を射影作用素 $\hat{E}_Y^A(m) = |m_A\rangle\langle m_A|$ を用いて記述したが、光子計数によって光子数を測定する場合には $\hat{E}_Y^A(m)$ の代わりに次の確率作用素測度を用いればよい。

$$\hat{E}_Y^A(m; \gamma_\tau) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{m!(n-m)!} \gamma_\tau^m (1 - \gamma_\tau)^{n-m} \hat{E}_Y^A(n). \quad (94)$$

この場合にも、測定過程による物理系 S の光子数に関するエントロピーの減少量が測定結果から得られる物理系 S の光子数に関する情報量に等しいことを示すことができる。

5.3 位置測定、及び運動量測定

最後に、連続的な値を取る物理量の量子測定の例として、物理系 S の位置の測定を考える。そこで、任意の量子状態 $\hat{\rho}_{\text{in}}^S$ にある物理系 S の位置に関する情報を求めるものとしよう。この場合、 $\hat{\mathcal{X}}_S = \hat{x}_S$ 及び $\hat{E}_x^S(x) = |x_S\rangle\langle x_S|$ である。一方、測定装置 A の初期状態 $\hat{\rho}_{\text{in}}^A$ も任意とする。勿論、測定精度は測定装置 A の初期状態に依存する。また、測定装置 A の“pointer observable”は位置作用素 ($\hat{Y}_A = \hat{x}_A \hat{E}_y^A(x) = |x_A\rangle\langle x_A|$) である。物理系 S と測定装置 A の相互作用を表わすユニタリ作用素 \hat{U}_{SA} を次のように仮定する。

$$\hat{U}_{SA} = \exp(-i\hat{x}_S\hat{p}_A). \quad (95)$$

このとき、相互作用後の合成系 $S + A$ の量子状態は次の式で与えられる。

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{\text{out}}^{SA} &= \exp(-i\hat{x}_S\hat{p}_A)(\hat{\rho}_{\text{in}}^S \otimes \hat{\rho}_{\text{in}}^A) \exp(i\hat{x}_S\hat{p}_A) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dy' \langle x_S | \hat{\rho}_{\text{in}}^S | x'_S \rangle \langle y_A | \hat{\rho}_{\text{in}}^A | y'_A \rangle \\ &\quad \times |x_S\rangle\langle x'_S| \otimes |x_A + y_A\rangle\langle x'_A + y'_A|. \end{aligned} \quad (96)$$

従って、測定装置 A の位置変数が値 r を示した場合の物理系 S の量子状態と測定結果が値 r である確率 $P_{\text{out}}^A(r)$ はそれぞれ次の式で与えられる。

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{\text{out}}^S(r) &= \frac{\text{Tr}_A[(\hat{I}_S \otimes \hat{E}_y^A(r))\hat{\rho}_{\text{out}}^{SA}]}{\text{Tr}_{SA}[(\hat{I}_S \otimes \hat{E}_y^A(r))\hat{\rho}_{\text{out}}^{SA}]} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy |x_S\rangle \left[\frac{\langle x_S | \hat{\rho}_{\text{in}}^S | y_S \rangle \langle r_A - x_A | \hat{\rho}_{\text{in}}^A | r_A - y_A \rangle}{P_{\text{out}}^A(r)} \right] \langle y_S|, \end{aligned} \quad (97)$$

$$\begin{aligned} P_{\text{out}}^A(r) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \langle x_S | \hat{\rho}_{\text{in}}^S | x_S \rangle \langle r_A - x_A | \hat{\rho}_{\text{in}}^A | r_A - x_A \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx P_{SA}(r|x) P_{\text{in}}^S(x). \end{aligned} \quad (98)$$

ここで、条件付き確率 $P_{SA}(r|x)$ は次の式で与えられる。

$$P_{SA}(r|x) = \langle r_A - x_A | \hat{\rho}_{\text{in}}^A | r_A - x_A \rangle. \quad (99)$$

また、位置測定における“operational observable”は次のようになる。

$$\hat{\mathcal{X}}_S^{\text{op}}(n) = \int_{-\infty}^{\infty} dx (\hat{x}_S + x)^n \langle x_A | \hat{\rho}_{\text{in}}^A | x_A \rangle. \quad (100)$$

この式から“operational observable”と“intrinsic observable”の可換性は明らかである。次に、物理系 S に対する位置測定によるエントロピーの減少量と測定結果から得られる情報量が等しいことを示そう。連続変数の場合、測定結果から得られる物理系 S に関する情報量 $I(Y_{\text{out}}^A; X_{\text{in}}^S)$ は次の式で与えられる。

$$I(Y_{\text{out}}^A; X_{\text{in}}^S) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy P_{SA}(x|y) P_{\text{in}}^S(y) \ln \left[\frac{P_{SA}(x|y)}{P_{\text{out}}^A(x)} \right]. \quad (101)$$

また、エントロピー $H(X_{\text{in}}^S)$ 、 $H(Y_{\text{out}}^A)$ 、及び $H(X_{\text{out}}^S, Y_{\text{out}}^A)$ は次の式で与えられる。

$$H(X_{\text{in}}^S) = - \int_{-\infty}^{\infty} dx P_{\text{in}}^S(x) \ln P_{\text{in}}^S(x), \quad (102)$$

$$H(Y_{\text{out}}^A) = - \int_{-\infty}^{\infty} dx P_{\text{out}}^A(x) \ln P_{\text{out}}^A(x), \quad (103)$$

$$H(X_{\text{out}}^S, Y_{\text{out}}^A) = - \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy P_{\text{out}}^{SA}(x, y) \ln P_{\text{out}}^{SA}(x, y). \quad (104)$$

ここで、相互作用後の量子状態における同時確率分布 $P_{\text{out}}^{SA}(x, y)$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} P_{\text{out}}^{SA}(x, y) &= \text{Tr}_{SA}[(|x_S\rangle\langle x_S| \otimes |y_A\rangle\langle y_A|)\hat{\rho}_{\text{out}}^{SA}] \\ &= \langle x_A - y_A | \hat{\rho}_{\text{in}}^A | x_A - y_A \rangle \langle y_S | \hat{\rho}_{\text{in}}^S | y_S \rangle \\ &= P_{SA}(x|y) P_{\text{in}}^S(y). \end{aligned} \quad (105)$$

一方、位置測定にともなう物理系 S のエントロピーの減少量 $\Delta H(X_{\text{out}}^S, X_{\text{in}}^S | Y_{\text{out}}^A)$ は次のように表わされる。

$$\begin{aligned} \Delta H(X_{\text{out}}^S, X_{\text{in}}^S | Y_{\text{out}}^A) &= H(X_{\text{in}}^S) - H(X_{\text{out}}^S | Y_{\text{out}}^A) \\ &= H(X_{\text{in}}^S) + H(Y_{\text{out}}^A) - H(X_{\text{out}}^S, Y_{\text{out}}^A). \end{aligned} \quad (106)$$

位置測定における結合エントロピー $H(X_{\text{out}}^S, Y_{\text{out}}^A)$ は次のように計算することができる。

$$\begin{aligned} H(X_{\text{out}}^S, Y_{\text{out}}^A) &= - \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy P_{SA}(x|y) P_{\text{in}}^S(y) \ln P_{SA}(x|y) P_{\text{in}}^S(y) \\ &= H(X_{\text{in}}^S) - \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy P_{SA}(x|y) P_{\text{in}}^S(y) \ln P_{SA}(x|y) \\ &= H(X_{\text{in}}^S) + H(Y_{\text{out}}^A) - \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy P_{SA}(x|y) P_{\text{in}}^S(y) \ln \left[\frac{P_{SA}(x|y)}{P_{\text{out}}^A(x)} \right] \\ &= H(X_{\text{in}}^S) + H(Y_{\text{out}}^A) - I(Y_{\text{out}}^A; X_{\text{in}}^S). \end{aligned} \quad (107)$$

従って、位置測定によって得られる物理系 S に関する情報量と位置測定による物理系 S のエントロピーの減少量が等しいことが分かる。

$$I(Y_{\text{out}}^A; X_{\text{in}}^S) = \Delta H(X_{\text{out}}^S, X_{\text{in}}^S | Y_{\text{out}}^A). \quad (108)$$

ところで、位置測定によって得られる物理系 S に関する情報量は次のように計算することができる。

$$\begin{aligned} I(Y_{\text{out}}^A; X_{\text{in}}^S) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy P_{SA}(x|y) P_{\text{in}}^S(y) \ln \left[\frac{P_{SA}(x|y)}{P_{\text{out}}^A(x)} \right] \\ &= H(Y_{\text{out}}^A) + \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \langle x_A - y_A | \hat{\rho}_{\text{in}}^A | x_A - y_A \rangle P_{\text{in}}^S(y) \\ &\quad \times \ln \langle x_A - y_A | \hat{\rho}_{\text{in}}^A | x_A - y_A \rangle \\ &= H(Y_{\text{out}}^A) + \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \langle x_A | \hat{\rho}_{\text{in}}^A | x_A \rangle P_{\text{in}}^S(y) \ln \langle x_A | \hat{\rho}_{\text{in}}^A | x_A \rangle \\ &= H(Y_{\text{out}}^A) - H(Y_{\text{in}}^A). \end{aligned} \quad (109)$$

ここで、 $H(Y_{\text{in}}^A)$ は測定装置 A の初期状態におけるエントロピーである。

$$H(Y_{\text{in}}^A) = - \int_{-\infty}^{\infty} dx \langle x_A | \hat{\rho}_{\text{in}}^A | x_A \rangle \ln \langle x_A | \hat{\rho}_{\text{in}}^A | x_A \rangle. \quad (110)$$

従って、位置測定によって得られる物理系 S に関する情報量 $I(Y_{\text{out}}^A; X_{\text{in}}^S)$ は測定過程における測定装置 A のエントロピーの増加量に等しいことがわかる。

$$I(Y_{\text{out}}^A; X_{\text{in}}^S) = H(Y_{\text{out}}^A) - H(Y_{\text{in}}^A). \quad (111)$$

運動量測定の場合には物理系 S と測定装置 A の相互作用を表わすユニタリー作用素は次のようになる。

$$\hat{U}_{SA} = \exp(-i\hat{p}_S \hat{x}_A). \quad (112)$$

この場合にも全く同様にして次の結果が得られる。

$$I(Y_{\text{out}}^A; X_{\text{in}}^S) = \Delta H(X_{\text{out}}^S, X_{\text{in}}^S | Y_{\text{out}}^A) = H(Y_{\text{out}}^A) - H(Y_{\text{in}}^A). \quad (113)$$

以上のことから、幾つかの量子測定過程において、測定結果から得られた情報量が測定された物理系のエントロピーの減少量と等しくなることが分かった。このように測定結果から得られる情報量が物理系のエントロピー減少量と等しくなる為に、量子測定過程が満たさなければならない条件を一般的に求めることができる。この一般的な結果やその応用に関しては文献 [5, 6] を参照されたい。

参考文献

- [1] L. Szilard, *Zeitschrift für Physik* **53**, 840 (1929).
- [2] L. Brillouin, *Science and Information* (Academic Press, New York, 1956).
- [3] V. P. Belavkin, O. Hirota and R. L. Hudson, eds., *Quantum Communication and Measurement* (Plenum, New York, 1995).
- [4] O. Hirota, A. S. Holevo and C. M. Caves, eds., *Quantum Communication, Computation and Measurement* (Plenum, New York, 1997).
- [5] M. Ban, "Information Gain and Entropy Change in Quantum Measurement Processes of Discrete and Continuous Observables", to be submitted (1998).
- [6] M. Ban, "Classical Information and Entropy Change in Quantum Measurement Processes", to be submitted (1998).
- [7] M. D. Srinivas and E. B. Davies, *Optica Acta* **28**, 981 (1981).
- [8] M. D. Srinivas *Pramana-Journal Physics* **47**, 1 (1991).
- [9] T. M. Cover and J. A. Thomas, *Elements of Information Theory* (Wiley, New York, 1991).
- [10] M. Ban, *Physics Letters A* **235**, 209 (1997).
- [11] K. Kraus, *States, Effects, and Operations* (Springer-Verlag, Berlin, 1983).
- [12] M. Ban, *International Journal of Theoretical Physics* **36**, 2583 (1997).
- [13] M. Ban, *Physical Review A* **49**, 5078 (1994).
- [14] M. Ban, *Journal of Modern Optics* **43**, 1281 (1996).
- [15] M. Ban, *Optics Communications* **143**, 225 (1997).