

角運動量を持ったボース・アインシュタイン凝縮体の基底状態

広大工^A, 科技団^B 木村 敬^{A,B}, 斎藤 弘樹^A, 上田 正仁^A

トラップされた原子系でボース・アインシュタイン凝縮体 (BEC) の角運動量 (vortex) を持った状態は実験ではまだ実現していない。理論的にはその安定性も含めて盛んに研究されている [1-3]。現状の理論では、vortex のある系では全ての凝縮体原子が z 軸の周りの角運動量 $m = 1$ をもった波動関数に属するとされているが、系に 1 粒子当たり平均で \hbar の角運動量を与えた際に、凝縮体が角運動量 $N\hbar$ の固有状態にあることが原理的に保証されているわけではない。我々は、系の全角運動量が $N\hbar$ の条件下で、凝縮体の波動関数が 3 つの異なる角運動量 $m(=0,1,2)$ をもつ波動関数の重ね合わせで表せることを仮定し、それが単一の角運動量をもった BEC よりも低いエネルギーを与えるかどうかを調べた。

我々は球対称対称トラップを考え (軸対称には容易に拡張できる)、平均場波動関数を

$$\Psi(\vec{r}) = \Psi_0(\rho, z) + \Psi_1(\rho, z)\exp(i\phi + i\chi_1) + \Psi_2(\rho, z)\exp(2i\phi + i\chi_2)$$

のように角運動量 $m = 0, 1, 2$ の固有関数で分解して Gross-Pitaevskii 汎関数を以下のように書き直し、角運動量一定の条件 ($m = 0, 1, 2$ に属する原子数 $N_0, N_1, N_2 = N_0$ を一定、全原子数 $N = N_0 + N_1 + N_2$) の下で停留条件 $\frac{\delta E[\Psi]}{\delta \Psi_0(\rho, z)} = \frac{\delta E[\Psi]}{\delta \Psi_1(\rho, z)} = \frac{\delta E[\Psi]}{\delta \Psi_2(\rho, z)} = 0$ を満たす波動関数を求めた。

$$\begin{aligned} E[\Psi] &= \int d\vec{r} [\Psi_0(\rho, z)\hat{H}_0\Psi_0(\rho, z) + \Psi_1(\rho, z)(\hat{H}_0 + \frac{1}{2\rho^2})\Psi_1(\rho, z) + \Psi_2(\rho, z)(\hat{H}_0 + \frac{2}{\rho^2})\Psi_2(\rho, z)] \\ &+ \frac{g}{2} \int d\vec{r} [\Psi_0^4 + \Psi_1^4 + \Psi_2^4 + 4(\Psi_0^2\Psi_1^2 + \Psi_1^2\Psi_2^2 + \Psi_2^2\Psi_0^2)] \\ &+ g \cos(2\chi_1 - \chi_2) \int d\vec{r} \Psi_0\Psi_1^2\Psi_2 - \int d\vec{r} (\mu_0\Psi_0^2 + (\mu_1 - \Omega)\Psi_1^2 + (\mu_2 - 2\Omega)\Psi_2^2) \\ H_0 &\equiv -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) + \frac{1}{2}(\rho^2 + z^2) \end{aligned}$$

ここでは、長さの単位として調和振動子長 $d \equiv \sqrt{\hbar/M\omega}$ (M は原子質量、 ω はトラップ周波数) を、エネルギーの単位として $\hbar\omega$ をそれぞれ 1 としている。 $g = 4\pi a/d$ (a は s 波散乱長) は相互作用パラメータである。また、 μ_0, μ_1, μ_2 はそれぞれ $m = 0, 1, 2$ に属する原子数 N_0, N_1, N_2 に対応する未定乗数である。 Ω は ω で規格化された外力によるトラップの円運動の角周波数であるが、表式から分かるように μ_1, μ_2 に繰り込まれる。エネルギーを下げるために、位相 χ_1 と χ_2 は g の正負に応じて n を整数として、 $2\chi_1 - \chi_2 = (2n + 1)\pi$ もしくは $2n\pi$ の関係を満たすように定められる。

数値計算の結果 (図 1 参照)、斥力相互作用を考えた場合は、全原子が $m = 1$ の固有状態に存在する場合は、エネルギーが最小になることが示された。その逆に引力相互作用を考えた場合には原子分布が 3 つの状態に分裂した方がエネルギーが下がることが分かった。これは、原子が複数の状態に分かれた際の原子間の Fock 交換相互作用の効果によるものとして直観的に理解できる。

ところで、実際の系には量的には明かではないが異方性があると考えられる。また、最近では異方性のあるトラップを回すことによって vortex を励起する方法も提案されている [2]。

系の異方性を考慮に入れるために我々は動系方向のトラップ周波数が $\omega_x = \sqrt{1 + \Delta}\omega, \omega_y = \sqrt{1 - \Delta}\omega$ ($|\Delta| \ll 1$) のように異なる場合を仮定した。このずれによるトラップポテンシャルの効果を一次摂動として考慮すると、全ての原子が $m = 1$ の状態に存在する場合には、その効果が0であるのに対し、 $m = 0$ と $m = 2$ に外れた原子を含む波動関数を考慮すると、そのエネルギーは $E' = -\Delta \cos \chi_2 \int d\vec{r} \Psi_0(\rho, z) \rho^2 \Psi_2(\rho, z)$ だけずれる。位相 χ_2 は系のエネルギーを減少させるように定まるので、 Δ が正の場合 $\chi_2 = 2n\pi$ に定まる。即ち、この分布の分かれた波動関数は、各角運動量の波動関数が位相の相関をもっているため、全体が一つの波動関数にボース凝縮しており、複数の波動関数に巨視的な数の原子が存在するボース凝縮状態とは区別されなければならない。この E' の減少分が分布がずれることによるエネルギーの損失を上回れば分布がずれた状態が実現する。

そのずれる原子数を異方性の関数としてプロットしたのが図2である。原子数のずれは比較的小さい異方性に対しても十分観測可能であると思われる。

以上をまとめると、角運動量 $N\hbar$ を持った状態では、斥力相互作用の場合に原子は角運動量 $m = 1$ の状態に属した方がエネルギーが下がることを確認した。また、動系方向のトラップ周波数の異方性の効果によって原子分布は $m = 0, m = 2$ にも分かれる得ることを示した。

本研究は科学技術振興事業団による戦略的基礎研究推進事業の補助を受けて行なわれた。

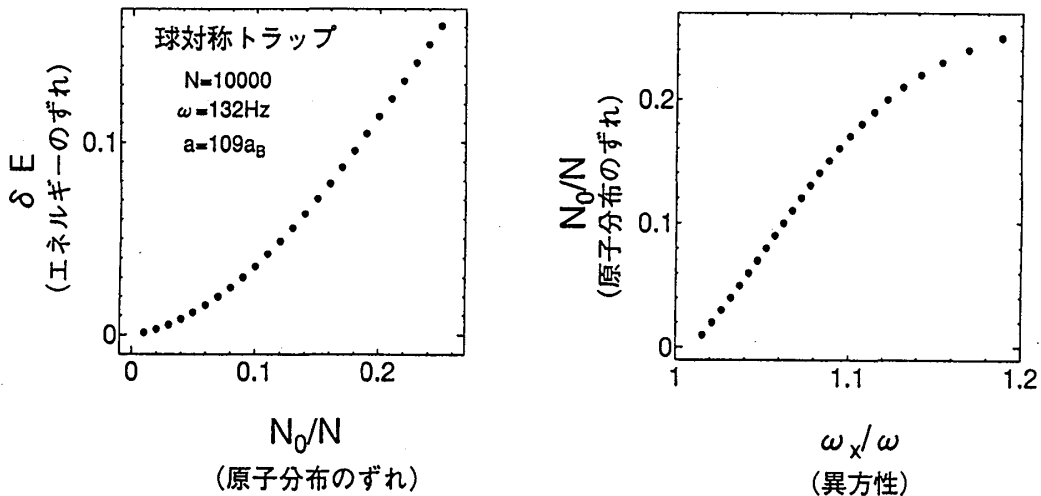


図1. 原子分布が全て $m = 1$ に集中している状態と、 $m = 0$ と $m = 2$ に分かれた状態のエネルギー差 δE を $\hbar\omega$ を単位として表している。 N_0 のは $m = 0$ の原子数であり、 N は全原子数である。パラメータは図中に示されている。

図2. 動系方向のトラップの異方性による $m = 0$ と $m = 2$ への原子分布のずれを $m = 0$ の原子数 N_0 と全原子数 N の比で表している。パラメータは図1と同じである。

参考文献

[1] D.S. Rokhsar, Phys. Rev. Lett. **79**, 2164 (1997).
 [2] A.A. Svidzinsky and A.L. Fetter, preprint (cond-mat/9811348).
 [3] T. Isoshima and K. Machida, preprint (cond-mat/9903002).