希薄ボーズ原子気体の二流体力学

東京工業大学理学部　　二国徹郎

絶対零度におけるボーズ凝縮気体のダイナミクス（集団振動）は、凝縮体波動関数 $\Phi(\mathbf{r},t)$ に対する Gross-Pitaevskii(GP) 方程式によって記述される。一方、有限温度では、熱的に励起された非凝縮原子のダイナミクスを考慮しなければならない。最近我々は有限温度における凝縮体波動関数の運動方程式と、非凝縮原子に対する運動方程式を導き、さらに粒子間の衝突が頻繁な流体力学的領域における二流体方程式を導出した [1,2]。

非凝縮原子を記述する準古典分布関数 $f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)$ は次の量子 Boltzmann 方程式に従う：

$$\frac{\partial f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)}{\partial t}+\frac{\mathbf{p}}{m}\cdot\nabla f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)-\nabla U\cdot\nabla_{\mathbf{p}}f(\mathbf{r},\mathbf{p},t) = C_{12}[f]+C_{22}[f]. \tag{1}$$

ここで $U(\mathbf{r},t)\equiv U_{\rm ext}(\mathbf{r})+2g[n_c(\mathbf{r},t)+\tilde{n}(\mathbf{r},t)]$ は自己無撞着な Hartree-Fock 平均場を含む有効ポテンシャルである。相互作用定数は s 波散乱近似により $g=4\pi a/m$ で与えられる。また、$n_c(\mathbf{r},t)$ は凝縮体密度、$\tilde{n}(\mathbf{r},t)=\int\frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)$ は非凝縮体密度である。式 (1) の右辺は非凝縮原子間及び非凝縮原子と凝縮原子の散乱を表しており、それぞれ

$$\begin{aligned}C_{22}[f]\equiv 4\pi g^2\int\frac{d\mathbf{p}_2}{(2\pi)^3}\int\frac{d\mathbf{p}_3}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{p}_4\\ \times\delta(\mathbf{p}+\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_3-\mathbf{p}_4)\delta(\tilde{\varepsilon}_p+\tilde{\varepsilon}_{p_2}-\tilde{\varepsilon}_{p_3}-\tilde{\varepsilon}_{p_4})\\ \times[(1+f)(1+f_2)f_3f_4-ff_2(1+f_3)(1+f_4)]\,,\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}C_{12}[f]\equiv 4\pi g^2 n_c\int\frac{d\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{p}_2\int d\mathbf{p}_3\\ \times\delta(m\mathbf{v}_c+\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_3)\delta(\varepsilon_c+\tilde{\varepsilon}_{p_1}-\tilde{\varepsilon}_{p_2}-\tilde{\varepsilon}_{p_3})\\ \times[\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1)-\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}_2)-\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}_3)]\\ \times[(1+f_1)f_2f_3-f_1(1+f_2)(1+f_3)],\end{aligned} \tag{3}$$

で与えられる。ここで $f\equiv f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)$, $f_i\equiv f(\mathbf{r},\mathbf{p}_i,t)$ である。式 (3) では、凝縮原子は局所エネルギー $\varepsilon_c(\mathbf{r},t)=\mu_c(\mathbf{r},t)+\frac{1}{2}mv_c^2(\mathbf{r},t)$ と運動量 $m\mathbf{v}_c$ を持つ。ただし、凝縮体化学ポテンシャル μ_c と速度 $\mathbf{v}_c$ は次の段落で定義する。一方、非凝縮原子は局所的な Hartree-Fock 励起エネルギー $\tilde{\varepsilon}_p(\mathbf{r},t)=\frac{p^2}{2m}+U(\mathbf{r},t)$ を持つ。このような粒子的な励起エネルギーは、比較的温度が高い領域では正しい。

次に、凝縮体波動関数 $\Phi(\mathbf{r},t)\equiv\sqrt{n_c(\mathbf{r},t)}e^{i\theta(\mathbf{r},t)}$. に対する方程式が必要である。変数として凝縮体密度 $n_c(\mathbf{r},t)$ と凝縮体速度 $\mathbf{v}_c=\nabla\theta(\mathbf{r},t)/m$ を用いると、凝縮体方程式は

$$\frac{\partial n_c}{\partial t}+\nabla\cdot(n_c\mathbf{v}_c)=-\Gamma_{12}[f]\,, \tag{4a}$$

$$m\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}_c\cdot\nabla\right)\mathbf{v}_c=-\nabla\mu_c, \tag{4b}$$

と書ける。ここで凝縮体化学ポテンシャルは Thomas-Fermi 近似では

$$\mu_c(\mathbf{r},t)=U_{\rm ext}(\mathbf{r})+g[n_c(\mathbf{r},t)+2\tilde{n}(\mathbf{r},t)]\,, \tag{5}$$

で与えられる。式 (4a) の右辺に現れる $\Gamma_{12}[f]$ は凝縮体の非凝縮体への転化率を表しており、

$$\Gamma_{12}[f]\equiv\int\frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}C_{12}[f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)], \tag{6}$$

によって与えられる。この項のために凝縮原子数と非凝縮原子数は別々には保存しない。

ここでは C_{22} の衝突が非常頻繁であるような流体力学的領域を考えることにする。このような状況では、局所熱平衡 Bose 分布関数

$$\tilde{f}(\mathbf{r},\mathbf{p},t)=\frac{1}{e^{\beta[\frac{1}{2m}(\mathbf{p}-m\mathbf{v}_n)^2+U-\tilde{\mu}]}-1}\,. \tag{7}$$

が良い近似となる。ここで、β, $\mathbf{v}_n$, $\tilde{\mu}$ はそれぞれ非凝縮原子に対する局所的な温度、速度及び化学ポテンシャルを表し、全て $\mathbf{r}$ と t の関数である。局所平衡分布 $\tilde{f}$ は $\tilde{\mu}$ の値によらず $C_{22}[\tilde{f}]=0$ を満たす。一方 $C_{12}[\tilde{f}]\neq 0$ であるために、局所熱平衡状態においても $\Gamma_{12}[f]$ は有限に残り、凝縮体と非凝縮体の間で粒子のやりとりが起こる。具体的な Γ_{12} の表式は

$$\Gamma_{12}[\tilde{f}]=-\left\{1-e^{-\beta[\tilde{\mu}-\frac{1}{2}m(\mathbf{v}_n-\mathbf{v}_c)^2-\mu_c]}\right\}\frac{n_c}{\tau_{12}}, \tag{8}$$

である。ここで、C_{12} 項による平均衝突時間

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tau_{12}}\equiv 4\pi g^2\int\frac{d\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3}\int\frac{d\mathbf{p}_2}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{p}_3(1+\tilde{f}_1)\tilde{f}_2\tilde{f}_3\\ \times\delta(m\mathbf{v}_c+\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_3)\delta(\varepsilon_c+\tilde{\varepsilon}_{p_1}-\tilde{\varepsilon}_{p_2}-\tilde{\varepsilon}_{p_3})\,.\end{aligned} \tag{9}$$

を導入した。もしも $\tilde{\mu}=\mu_c+\frac{1}{2}m(\mathbf{v}_n-\mathbf{v}_c)^2$ であれば $\Gamma_{12}[\tilde{f}]$ は消える。しかしながら、凝縮体と非凝縮体の局所熱平衡状態を仮定する場合においても Γ_{12} を単純に 0 とおくことは出来ない。式 (8) と同様な表式は、凝縮体の成長を議論した他の論文でも得られている [3]。

非凝縮体に対する流体力学方程式は、通常の気体運動論の処方に従い式 (1) のモーメントをとることによって得られる。ここでは特に、平衡状態のまわりでの微少振動を議論するために線形化された方程式

$$\frac{\partial\delta\tilde{n}}{\partial t}=-\nabla\cdot(\tilde{n}_0\delta\mathbf{v}_n)+\delta\Gamma_{12}\,, \tag{10a}$$

$$\begin{aligned}m\tilde{n}_0\frac{\partial\delta\mathbf{v}_n}{\partial t}=-\nabla\delta\tilde{P}-\delta\tilde{n}\nabla U_0\\ -2g\tilde{n}_0\nabla(\delta\tilde{n}+\delta n_c)\,,\end{aligned} \tag{10b}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\delta\tilde{P}}{\partial t}=-\frac{5}{3}\tilde{P}_0\nabla\cdot\delta\mathbf{v}_n-\delta\mathbf{v}_n\cdot\nabla\tilde{P}_0\\ -\frac{2}{3}gn_{c0}\delta\Gamma_{12}\,,\end{aligned} \tag{10c}$$

を考える。ここで、

$$\tilde{n}(\mathbf{r},t) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\tilde{f}(\mathbf{r},\mathbf{p},t) = \frac{1}{\Lambda^3}g_{3/2}(z), \tag{11}$$

$$\tilde{P}(\mathbf{r},t) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{p^2}{3m}\tilde{f}(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\big|_{\mathbf{v}_n=0} = \frac{1}{\beta\Lambda^3}g_{5/2}(z), \tag{12}$$

ただし $z \equiv e^{\beta(\tilde{\mu}-U)}$, $\Lambda \equiv \sqrt{2\pi/mk_{\mathrm{B}}T}$, そして $g_n(z) \equiv \sum_{l=1}^{\infty} z^l/l^n$ である。熱平衡状態では $\mathbf{v}_{n0} = \mathbf{v}_{c0} = 0$, $\mu_{c0} = \tilde{\mu}_0$ であり、従って $\Gamma_{12}[\tilde{f}^0] = 0$ となる。同様に、線形化された凝縮体方程式 (4) は

$$\frac{\partial \delta n_c}{\partial t} = -\nabla\cdot(n_{c0}\delta\mathbf{v}_c) - \delta\Gamma_{12}, \tag{13a}$$

$$m\frac{\partial \delta\mathbf{v}_c}{\partial t} = -g\nabla(\delta n_c + 2\delta\tilde{n}), \tag{13b}$$

となる。さらに、$\delta\Gamma_{12}$ 項は、化学ポテンシャル差 $\mu_{\mathrm{diff}} \equiv \tilde{\mu} - \mu_c$ を用いて次のように表される：

$$\delta\Gamma_{12} = -\frac{\beta_0 n_{c0}}{\tau_{12}^0}\delta\mu_{\mathrm{diff}}. \tag{14}$$

ここで τ_{12}^0 は平衡状態における平均衝突時間である。

ここで、最も簡単な例として空間的に一様な系 ($U_{\mathrm{ext}}(\mathbf{r}) = 0$) を考えてみよう。簡単な計算によって、流体力学方程式は $\delta\mathbf{v}_c$, $\delta\mathbf{v}_n$ 及び $\delta\mu_{\mathrm{diff}}$ の 3 つの変数に対する方程式に帰着することがわかる：

$$m\frac{\partial^2 \delta\mathbf{v}_c}{\partial t^2} = gn_{c0}\nabla(\nabla\cdot\delta\mathbf{v}_c) + 2g\tilde{n}_0\nabla(\nabla\cdot\delta\mathbf{v}_n) + \frac{\beta_0 g n_{c0}}{\tau_{12}^0}\nabla\delta\mu_{\mathrm{diff}}, \tag{15a}$$

$$m\frac{\partial^2 \delta\mathbf{v}_n}{\partial t^2} = \left(\frac{5\tilde{P}_0}{3\tilde{n}_0} + 2g\tilde{n}_0\right)\nabla(\nabla\cdot\delta\mathbf{v}_n) + 2gn_{c0}\nabla(\nabla\cdot\delta\mathbf{v}_c) - \frac{2n_{c0}}{3\tilde{n}_0}\frac{\beta_0 g n_{c0}}{\tau_{12}^0}\nabla\delta\mu_{\mathrm{diff}}, \tag{15b}$$

$$\frac{\partial \delta\mu_{\mathrm{diff}}}{\partial t} = gn_{c0}\left(\frac{2}{3}\nabla\cdot\delta\mathbf{v}_n - \nabla\cdot\delta\mathbf{v}_s\right) - \frac{\delta\mu_{\mathrm{diff}}}{\tau_\mu}. \tag{15c}$$

ここで、化学ポテンシャル差 μ_{diff} の緩和時間は

$$\frac{1}{\tau_\mu} \equiv \frac{\beta_0 g n_{c0}}{\tau_{12}^0}\left(\frac{\frac{5}{2}\tilde{P}_0 + 2g\tilde{n}_0 n_{c0} + \frac{2}{3}\tilde{\gamma}_0 g n_{c0}^2}{\frac{5}{2}\tilde{\gamma}_0\tilde{P}_0 - \frac{3}{2}g\tilde{n}_0^2} - 1\right), \tag{16}$$

で与えられる。ただし、$\tilde{\gamma}_0 \equiv (g\beta_0/\Lambda_0^3)g_{1/2}(z_0)$ である。平面波解 $\delta\mathbf{v}_n, \delta\mathbf{v}_c, \delta\mu_{\mathrm{diff}} \propto e^{i\omega t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ を仮定することによって、3 種類の解を得ることができる。そのうちの 2 つは第一、第二音波である。第一音波は主に非凝縮体が振動するモードであり、音速

$$u_1^2 \approx \frac{5\tilde{P}_0}{3\tilde{m}n_0} + \frac{2g\tilde{n}_0}{m} + O(g^2), \tag{17}$$

を持つ。凝縮体は非凝縮体と同位相で振動する。第二音波は主に凝縮体が振動するモードであり、音速

$$u_2^2 \approx \frac{gn_{c0}}{m} + O(g^2), \tag{18}$$

を持つ。非凝縮体は凝縮体と逆位相で振動する。より詳しい解析によると、$\omega\tau_\mu \ll 1$ の極限では式 (15) から導かれる第一、第二音波の音速は、Landau 二流体方程式から導かれる結果と厳密に一致することが示せる。一方、逆の極限 $\omega\tau_\mu \gg 1$ では論文 [4] の結果と一致する。中間領域 $\omega\tau_\mu \simeq 1$ では、C_{12} の衝突の効果による第一、第二音波の減衰が得られる。さらに興味深い 3 番目の解は、緩和モード $\delta\mu_{\mathrm{diff}}(t) = \delta\mu_{\mathrm{diff}}(0)e^{-t/\tau}$ である。特に、$k \to 0$ のときは $\delta\mathbf{v}_n = \delta\mathbf{v}_c = 0$, $\tau = \tau_\mu$ となる。Landau 二流体方程式は $\tau_\mu \to 0$ の極限に対応するため、このような緩和モードに相当する解を持たない。

以上を要約すると、我々は凝縮体と非凝縮体のダイナミクスを記述する方程式を導いた。これらの方程式は凝縮体と非凝縮体がお互いに平衡状態に緩和する過程を記述することができる。また、我々の方程式は $\omega\tau_\mu \ll 1$ の極限では Landau 二流体方程式に帰着する。ここでは具体的な例として、線形化された方程式を空間的に一様な系について議論したが、我々の方程式を用いて凝縮体の成長と減衰を議論することも可能である [5,6]。

本研究は A. Griffin (Univ. of Toronto)、E. Zaremba (Queen's Univ.) との共同研究である。

[1] T. Nikuni, E. Zaremba and A. Griffin, cond-mat/9812320. preprint.

[2] E. Zaremba, T. Nikuni and A. Griffin, cond-mat/9903029.

[3] C.W. Gardiner, M.D. Lee, R.J. Ballagh, M.J. Davis and P. Zoller, cond-mat/9806295 and references therein.

[4] A. Griffin and E. Zaremba, Phys. Rev. **A56**, 4839 (1997).

[5] D.M. Stamper-Kurn, H.-J. Miesner, A.P. Chikkatur, S. Inouye, J. Stenger and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **81** 2194 (1998).

[6] E. Zaremba, M. Bijlsma and H.T.C. Stoof, to be published.