

## 高次元ハミルトン系の位相空間構造

名古屋大学理学部物理R研  
小西哲郎tkonishi@allegro.phys.nagoya-u.ac.jp  
<http://jegog.phys.nagoya-u.ac.jp/~tkonishi/>

## Contents

1	はじめに	43
1.1	ハミルトン系の相空間とその構造	43
1.2	解剖 (anatomy) と骨格 (skeleton)	43
1.3	このレポートの構成	43
2	ハミルトン系	44
3	(余談) ハミルトン系は易しい	45
4	完全可積分なハミルトン系とその相空間の構造	45
4.1	1 自由度系	45
4.2	完全可積分性	46
4.3	可積分系は極めて稀であること	47
5	KAM(Kolmogorov-Arnold-Moser) 定理とその意味	48
5.1	KAM 定理	48
6	ハミルトン系の相空間の構造と構成要素	48
7	低自由度、高自由度	51
7.1	低自由度と高自由度の区別	51
8	高自由度ハミルトン系カオスでの緩和と遅い運動	52
8.1	遅い運動 - $1/f$ 的なもの	53
8.1.1	多自由度系における $1/f$ 的な遅い運動	53
8.2	遅い運動 - $\exp(1/\varepsilon^\beta)$ 的なもの	55
9	不変多様体の解析的導出と、“beyond all order”	55
10	作用関数を用いた不変多様体の数値的検出	58
10.1	symplectic 写像での作用原理	58
10.2	作用が「最小」になることと、運動の規則性	58
10.3	安定多様体と不安定多様体のずれの検出	59
11	まとめ	60

# 1 はじめに

## 1.1 ハミルトン系の相空間とその構造

座標  $\vec{q} = (q_1, \dots, q_N)$  と運動量  $\vec{p} = (p_1, \dots, p_N)$  全ての変数が表す空間を位相空間、あるいは相空間と呼ぶ。系の状態を指定することと、相空間の中の1点を指定することは同値なので、系の時間発展は、相空間の中を(系の状態を表す)点が移動して行く様子として捉えられる。ハミルトニアン  $H(\vec{q}, \vec{p})$  を持つ系の時間発展は、正準方程式

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

で定まる。ハミルトン系の研究では、相空間の構造を考えるのが重要である。相空間の構造を考えるのは、

- ダイナミクス(時系列, "1次元的")を、より豊かに理解するために
- それ自身面白いから(一部マニアの楽しみ?)

からである。1番目の「豊かな理解」とは、いろいろなハミルトニアンを考えたとき、元の系(系を作る要素、実空間の配置)は様々でも、相空間の定性的様相は大体同じ様に見える(だろう)、という期待(思い込み?)に基づいている。

## 1.2 解剖(anatomy)と骨格(skeleton)

「相空間の解剖」(phase space anatomy)とは、相空間(特に高次元の)を切り分けていってその構造を観察することである。その際、相空間の骨格を作っている不変集合を捉えることが大事である。

実際の系の運動はカオス的であるので、本当に知りたいのはカオス領域なのだが、カオス領域を直接調べる代わりに、より性質のはっきりした不変集合(不動点、周期点、KAMトーラス、不変多様体)を調べるのが便利である。

## 1.3 このレポートの構成

このレポートでは、自由度の大きなハミルトン系でみられるダイナミクスと関連した相空間構造に関する最近の仕事を紹介する。準備としてまずハミルトン系に関するレビューをさっと述べ、その後に8節以降で具体的な研究について述べる。

ハミルトン系のカオスに関する日本語で書かれた入門的書物としては、[Yos94, Sai92]が読みやすくまた充実している。

## 2 ハミルトン系

今回考える系は、通常ハミルトニアン  $H = H(\vec{q}, \vec{p})$  で書かれる系、および、「シンプレクティック写像」と呼ばれる写像系  $(\vec{q}, \vec{p}) \mapsto (\vec{q}', \vec{p}')$  ( $\vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_N)$ , 等) である。シンプレクティック写像とは、時間発展が正準変換になっているような写像の事である。(すなわち、時間が経っても座標  $q_i(t)$  と運動量  $p_i(t)$  が互いに正準共役な組になっている。) 上記のハミルトン系のポアンカレ写像がこのクラスの写像になるので、ハミルトン系とシンプレクティック写像は一緒に考えて良い。

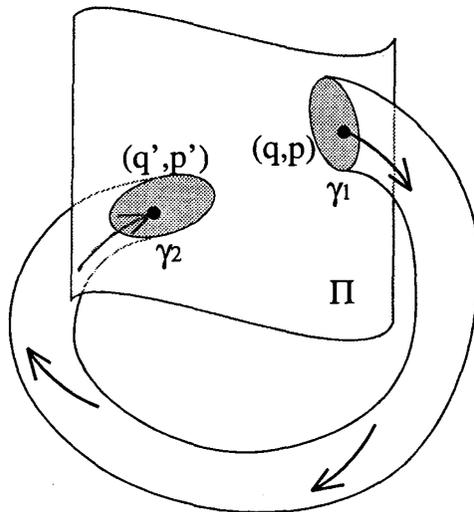


Figure 1: ポアンカレ写像:  $(q, p) \mapsto (q', p')$

ここで、「ポアンカレ写像」とは、相空間内の系の時間発展を表す軌道が、適当な曲面と交わる所だけを取り出して図1の様に定義されるものであり、ポアンカレ写像によって、高次元の相空間を次元を下げて考えることが出来る。

例えば、単振り子と調和振動子を直積させた系

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2}p_1^2 + (1 - \cos q_1) + \frac{1}{2}p_2^2 + \frac{1}{2}q_2^2 \quad (1)$$

は3次元 ( $(q_1, q_2, p_1, p_2)$  の4つのうち、エネルギー保存則  $H = \text{const.}$  で1つ落ちる) の相空間 (等エネルギー面) を持つ。この系に対して

$$q_2 = 0, p_2 > 0$$

で定まるポアンカレ写像は、模式的には図2の様になる。(もちろんこの系はポアンカレ写像を取るまでもなく振舞いは良く分かるのだが、ポアンカ

レ写像の例として出した。) 灰色で描いた線が振り子が止まっている状態  $q_1 = 0, p_1 = 0$  である。振り子が動いていると系の軌道はこの灰色の線のまわりを回っていく。

2次元 ( $q, p$  1つずつ) のシンプレクティック写像は保測写像とも呼ばれる。これは、2次元で相空間体積の保存は面積保存だからである。

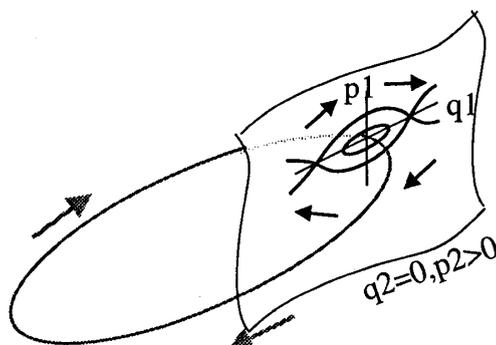


Figure 2: 振り子と調和振動子の直積系 (eq.(1)) のポアンカレ写像の概念図

### 3 (余談) ハミルトン系は易しい

時々、「ハミルトン系は難しいでしょう。」という話を聞くことがあります。理由として、

- 数学的用語が多い (××多様体、△△定理、...)
- 写像の話が多い, エネルギーについてあまり議論しない
- 数値計算をしようにも、散逸が無いので誤差がたまりやすく正しい計算が難しい

が挙げられるようなのですが…、実際にはそんなに難しいことは無いです。Symplectic integrator が使えれば数値計算も簡単です。

## 4 完全可積分なハミルトン系とその相空間の構造

### 4.1 1自由度系

まず、最も簡単なハミルトン系である1自由度系について述べる。

1 自由度系とは、座標 1 個、運動量 1 個の組  $(q, p)$  で書かれる系である。相空間は 2 次元である。例えば、1 次元の調和振動子や単振り子、1 次元のポテンシャル問題などは 1 自由度系である。エネルギー  $E$  が保存するので、相空間上での系の軌道は  $H(q, p) = E$  で定まる滑らかな曲線となる。また、 $(q, p)$  は時間の関数として表すことが出来る。 $H = \frac{1}{2m}p^2 + U(q)$  の場合、

$$\int \frac{dq}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(q))}} = \int dt = t - t_0$$

から  $q$  が定まるのは大学の力学でおなじみである。このような場合には系はカオスにならない。

例として、単振り子とその時間発展を図 3 に挙げる。

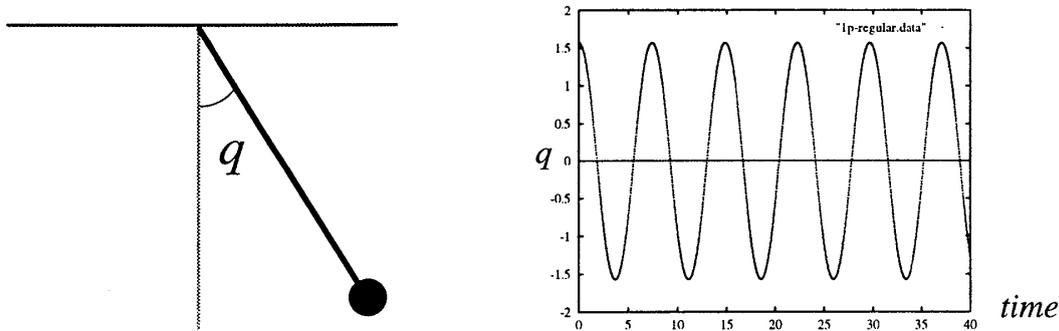


Figure 3: 単振り子 (左) とその時間発展 (右)

## 4.2 完全可積分性

次に、相空間構造を調べる手始めとして、完全可積分系について述べる。

ハミルトニアン  $H(q, p)$ ,  $q = (q_1, q_2, \dots, q_N)$ ,  $p = (p_1, p_2, \dots, p_N)$ , で定まる  $N$  自由度系が、自由度と同じ数 (この場合は  $N$  個) の保存量、即ち、 $I_1(q, p), I_2(q, p), \dots, I_N(q, p)$  をもち、かつ、これらのポアソン括弧がゼロになる

$$\text{任意の } i, j \text{ に対して } \{I_i, I_j\}_{\text{PB}} \equiv \sum_{k=1}^N \left( \frac{\partial I_i}{\partial q_k} \frac{\partial I_j}{\partial p_k} - \frac{\partial I_i}{\partial p_k} \frac{\partial I_j}{\partial q_k} \right) = 0$$

場合、この系を完全可積分系と呼ぶ。(ポアソン括弧がゼロになるとは、大雑把には保存量がある意味で独立である事を表している。) この時、系にはうまい正準変換をすることができる。どう「うまい」のかというと、 $N$  自由

度 ( $2N$  変数) の系を、 $N$  個の 1 自由度系に分離することができるのである。この場合の正準方程式は、 $I_i$  に正準共役な変数を  $\varphi_i$  として、

$$\frac{dI_i}{dt} = 0, \quad \frac{d\varphi_i}{dt} = \omega_i(I), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2)$$

となる。 $I_i$  を作用変数、 $\varphi_i$  を角変数と呼ぶ。先に述べたように、1 自由度系はカオスにならない。完全可積分な  $N$  自由度系も  $N$  個の振動子の直和に等価であり、周期運動 (あるいは準周期運動) をする。式 (2) により、作用・角変数の時間発展はそれぞれ

$$I_i(t) = I_i(0) = \text{const.}, \quad \varphi_i(t) = \varphi_i(0) + \omega_i(I)t, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3)$$

となる。模式図として書けば、図 4 の様になっている。

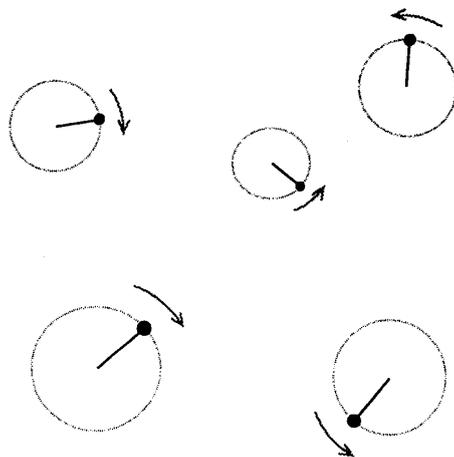


Figure 4: 相互作用の無い 5 個の回転子

準周期とは耳慣れない言葉かも知れないが、例えば振動子それぞれの振動数  $\omega_i, \omega_j$  が比が無理数であれば、如何なる時刻  $t, t' (t \neq t')$  に対しても  $(\omega_i t, \omega_j t) \neq (\omega_i t', \omega_j t') \pmod{2\pi}$  であるが、系が同じ点に帰って来ないということを除けば極めて周期運動に近い運動をするので準周期的運動とよぶ。準周期的運動では、系の軌道が相空間内に描く形のトポロジーは、円周を  $N$  個直積したものと同じである。この形はトーラス (torus) と呼ばれる。 $(N = 2$  で周期軌道になる場合、1 方向から見ればリサージュ図形が描かれる事になる。) 図 2 では灰色の線のまわりにトーラスが出来ることになる。

### 4.3 可積分系は極めて稀であること

このように、完全可積分系 (あるいは簡単に「可積分系」と呼ぶ) は解析的取り扱いが可能 (「手で解ける」) なので扱いやすい。しかし、可積分系はハミ

ルトニアン全体の中では極めて稀である。また、可積分系は周期・準周期運動あるいは直線運動などの規則的運動しかしないので、複雑な運動をする系のモデルとして採用するには不向きである。

とはいえ、非可積分な系を直接理解するのは難しい(極端に乱雑さが激しくて確率的に取り扱える場合は例外だが)ので、まずは系を可積分系に摂動が加わった系

$$H = H_0(I) + \varepsilon V(I, \varphi) \quad (4)$$

と考える事にしよう。 $\varepsilon = 0$ の場合可積分である。 $|\varepsilon| \ll 1$ の場合を近可積分系と呼ぶ。

## 5 KAM(Kolmogolov-Arnold-Moser)定理とその意味

### 5.1 KAM定理

KAM定理の正確な表現は文献を参照して頂きたい。定理の主張の気持ちは、「可積分系に摂動が入っても、その摂動が弱ければ、元の可積分系の軌道は、共鳴している部分を除けばかなり残っている。」ということである。すなわち、摂動が入ったからといって、あつというまに全てがランダムになってしまうわけではない。

KAM定理を考えると言うことは、一般の(可積分ではない)ハミルトン系を、可積分系からの摂動として理解するということである。そこでは、相空間の構造も、可積分系のそれがある程度保たれていると考えて、可積分系のそれを元に考える事になる。

KAM定理によれば、摂動を受けてももとの可積分系の準周期軌道は多少の変形は受けるものの、ある程度残っている。摂動を受けたハミルトニアンでこのように残っている準周期軌道を(KAM定理がその存在を保証するトーラス、の意味)KAMトーラスと呼ぶ。

## 6 ハミルトン系の相空間の構造と構成要素

ハミルトン系の相空間の構成要素を考える際、時間的に不変な要素、すなわち、ある時刻  $t$  で  $(q(t), p(t)) \in S$  ならば他の任意の時刻  $t'$  でもやはり  $(q(t'), p(t')) \in S$  であるような集合  $S$  たちに分けて考えるのが便利である。「時間的に不変な要素」は、簡単に「不変集合」と呼ばれる。

代表的な不変集合としては、を列挙し、

- 不動点(固定点)、周期軌道

- KAMトーラス (およびその残骸)
- 不変多様体 (安定多様体、不安定多様体)
- カオス領域 (chaotic sea)

が挙げられる。以下、いくつかの不変集合について簡単に解説する。

- 不動点 (固定点)、周期軌道

周期軌道は、ポアンカレ写像では周期点として現われる。

ポアンカレ写像を  $F(q, p) = (q', p')$  と書けば、

不動点 :  $F(q, p) = (q, p)$  を満たす点  $(q, p)$

$n$  周期点 :  $F^n(q, p) = (q, p)$  を満たす点  $(q, p)$

であるから、 $F^n$ を改めて  $F$  と考えれば、不動点と周期点は同一視することが出来る。

不動点・周期点には、その安定性により、楕円型、双曲型などがある。

それぞれの周りでの流れは図5の様になっている。

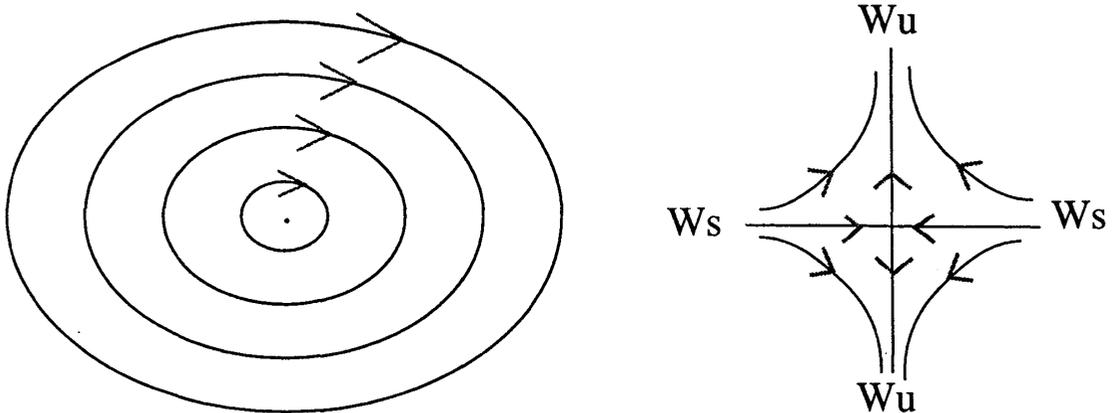


Figure 5: 楕円型 (左) および双曲型 (右) の不動点・周期点の周りでの時間発展の流れ

単振り子であれば、振り子が一番下がった点が楕円型 (安定な) 不動点であり、一番上がった点が双曲型 (不安定な) 不動点である。(図6)

- KAMトーラス (およびその残骸)

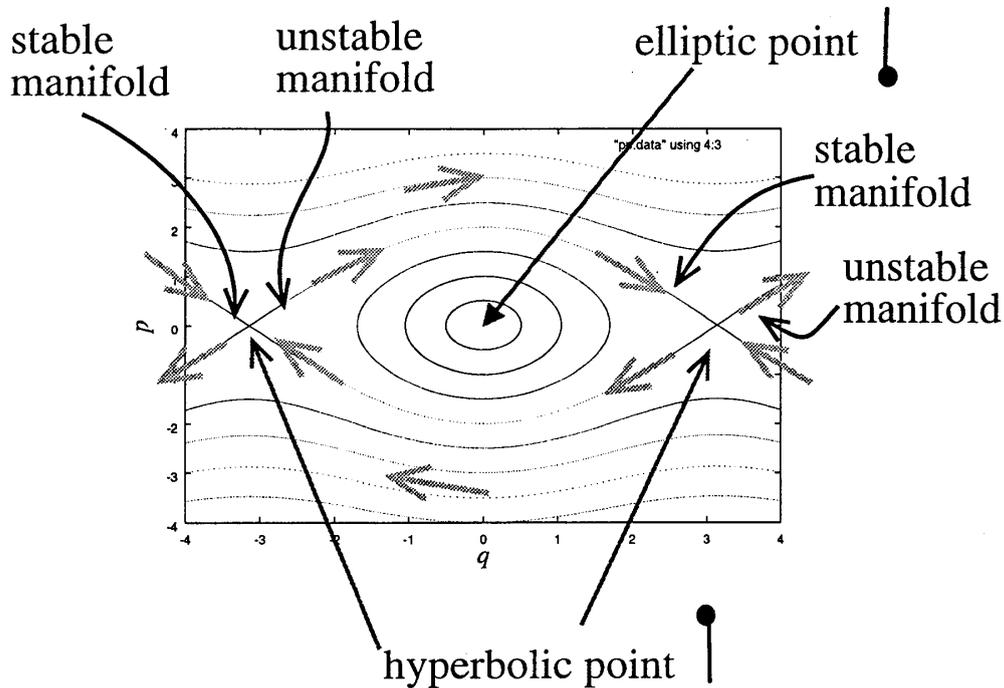


Figure 6: 単振り子の相空間

- 不変多様体 (安定多様体、不安定多様体)

$t \rightarrow \infty$  で上記の不変集合に漸近する集合のことを、安定多様体と呼び、 $W^s$  と書く。また同様に、 $t \rightarrow -\infty$  で上記の不変集合に漸近する集合のことを、不安定多様体と呼び、 $W^u$  と書く。

双曲型不動点は安定多様体と不安定多様体の双方を持つ。これは、その不動点に近付いて行く運動と、その不動点から遠ざかって行く運動の両方があることに対応している。単振り子の例で言えば、振り子がゆっくりと上がって行き無限の時間で真上に立つ運動が安定多様体に対応し、逆に、真上に立った状態からゆっくりと離れて行く運動が不安定多様体に対応する。

- カオス領域 (chaotic sea)

カオス軌道が占める領域をカオス領域 (あるいは chaotic sea) と呼ぶ。

大まかに言えば、弱い摂動を受けたハミルトン系の相空間は KAM トーラスとカオス領域で出来ている。

相空間の典型的な様子は、図7のように階層的構造をなしている。

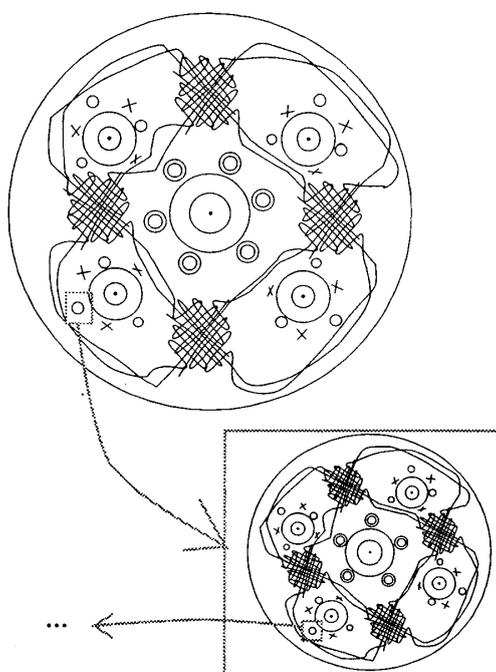


Figure 7: 保測写像の典型的なポアンカレ断面

## 7 低自由度、高自由度

### 7.1 低自由度と高自由度の区別

本講演のタイトルは「高次元ハミルトン系の位相空間構造」である。では、低次元と高次元、(あるいは低自由度と高自由度と呼んでも同じであるが)はどう区別しているのでしょうか。

ここでは、相空間内での系の運動が局所的な領域に限られるか否かで区別をしよう。これは、系の状態がある局在した確率分布を持っていたとしたとき、それが全ての状態に緩和し得るか否か、ということでもある。

前節で見たように、全相空間を KAM トーラスとカオス領域に分けて考えよう。一般の初期条件から出発した系の運動は、カオス領域の中を動くが、決して KAM トーラスに入り込むことは出来ない。なぜならば、KAM トーラスは不変集合だからである。

一つの KAM トーラスは  $N$  次元 ( $N$ : 自由度の数) ある。すなわち、KAM トーラスを 1 つ指定すると、そのトーラス上での点を指定するのに angle variable を  $N$  個  $\varphi_1, \dots, \varphi_N$  指定する必要がある。さて、今指定した  $N$  個の自由度のほかに、全相空間の中に残っているのは  $2N - N = N$  (エネルギーが保存している場合は  $(2N - 1) - N = N - 1$ ) である。この自由度  $N$  あるいは  $N - 1$  がもしも 1 以下 ( $N \leq 1$ ; エネルギーが保存していれば  $N \leq 2$ ) であれば、KAM トーラスは全状態を 2 つに分割するので、カオス領域は KAM

トーラスにより局所的な領域に限られてしまう。ここではこのような場合を低自由度と呼ぶ。

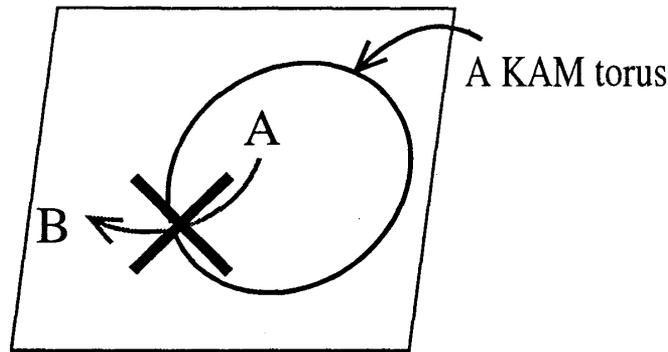


Figure 8: 1次元の曲線が2次元領域を分割している例：AからBへはKAM torusを横切らずには移動することが出来ない

一方、残りの次元が2以上、すなわち、 $N \geq 2$  (エネルギーが保存していれば  $N \geq 3$ ) の場合は、KAMトーラスは存在していたとしてもカオス領域を分割することができず、全相空間内のカオス領域は(少なくともトポロジーとしては)繋がっていることになる。この場合を高自由度と呼ぶ。

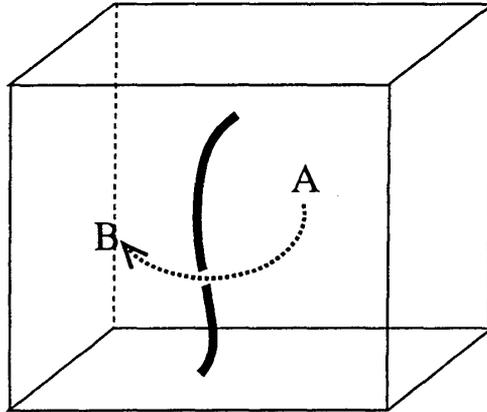


Figure 9: 1次元の曲線が3次元領域を分割しない例

この様子を模式的に書くとそれぞれ図8,9のようになる。

## 8 高自由度ハミルトン系カオスでの緩和と遅い運動

前節にて、高自由度のハミルトン系ではカオス領域は全て繋がっている事を見た。したがって、一般的な初期条件から出発して系がほとんどの状態を経

験する(ほぼエルゴード性が実現する、熱平衡に緩和する、etc.) ようになるには後は「時間の問題」だけであるように思われる。

しかし、「時間の問題」とはいつても、通常の物理過程が指数緩和  $\exp(-\gamma t)$  するのに対して、ハミルトン系では

- べき型  $1/f^\alpha$  (通常  $1/f$  的と呼ばれているもの)
- 「引き延ばされた指数関数」型  $\exp(1/\varepsilon^\beta)$  (後述)

のような非常に遅い運動が一般的に起きるといわれている。本節ではこれらについて述べる。まず 8.1 節にて  $1/f^\alpha$  的な運動の低自由度系における解釈と高次元への拡張 [YK98] について延べ、ついで 8.2 にて  $\exp(1/\varepsilon^\beta)$  型の遅い運動を紹介する。

## 8.1 遅い運動 — $1/f$ 的なもの

幾つかのハミルトン系やシンプレクティック写像では 'long time tail' と呼ばれるような、 $1/f^\alpha$  型<sup>1</sup>なパワースペクトル、あるいは同じ事だが  $t^{-\beta}$  型の時間相関が見られることが知られている。[CS84, Kar83, Koh84, GZR87]

この現象は、ハミルトン系に普遍的に見られる相空間の階層構造と関連させて説明されてきた。[MO86, Mei86, Aiz84, Esc85, HI87] ここで言う自己相似性とは、周期軌道のまわりにはその周期軌道を回る別の周期軌道のファミリーがあり、さらにそのまた回りを回る周期軌道のファミリーがあり…と続く、図7のような階層のことである。

ところが、この説明には以下のような問題がある。系の自由度が増えると、相空間の自己相似性は低下する。なぜならば、自己相似になるのは fully elliptic な周期点(周期点であって、全ての方向に安定なもの)の回りのみであり、一方、fully elliptic な周期点は自由度が上がるとどんどん割合が減る。したがって、この説明のままでは、系の自由度を大きくすると long time tail は観測されにくくなることになる。これは、実際には多自由度系でも long time tail は見られている事に反する。

### 8.1.1 多自由度系における $1/f$ 的な遅い運動

この困難は、山口により、モデルを拡張して考えることにより解消された [YK98]。多自由度系では楕円型、双曲型の周期点の他に、楕円型と双曲型が混合した周期点が存在しうる。例えば、単振り子が3個結合した系を考えてみよう。結合をあまり強くしなければ、系の不動点として、それぞれの単振り子がそれぞれの不動点(の近傍)にいるところに不動点がとれる。この時、例えば1番目の振り子は下を向いて静止し、2番目と3番目は上を向いて静止しているような不動点が存在する。すると、系は1番目の振り子だけをず

<sup>1</sup>この指数 $\alpha$ が1であるか否かは今は問題としない。

らすようなずれには安定(楕円型)だが、2番目あるいは3番目の振り子をずらすようなずれに対しては不安定(双曲型)である。これは、保測写像(座標、

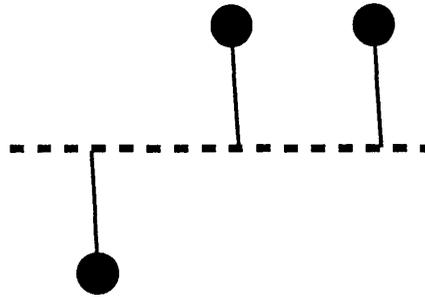


Figure 10: 単振り子3つからなる系。[○, ×, ×] 状態にある。

運動量それぞれ1つずつで記述される面積保存写像、シンプレクティック写像でもっとも次元の低いもの)では不動点は必ず向きに依らず楕円型か双曲型のどちらかに定まったのとは大きな違いである。

この、単振り子3個の系では、不動点の種類をその安定性により分類すると、山口にならって楕円型を○、双曲型を×と略記すれば、[○, ○, ○](=純楕円型), [○, ○, ×], [○, ×, ○], [○, ×, ×], [×, ○, ○], [×, ○, ×], [×, ×, ○], [×, ×, ×](=純双曲型), の8通りある。(周期点の場合には、さらにこれに加えて複素数の固有値を持つものがある。)ここで、純楕円型と純双曲型はそれぞれ1通り、残りの6つは楕円型と双曲型が混じった「複合型」である。

もともとの保測写像のモデルでは、系の滞在は純楕円型のまわりしか考えなかったのだが、楕円型以外に様々な複合型の周期点近傍への滞在を考える事により、(この複合型の周期点の数が組合せ的に圧倒的に多いので)結果的にべき的な緩和が現われる事を数値的に示すことが出来た。

不安定な点の近くに長時間滞在するというのは一見矛盾している様に聞こえるかもしれない。が、不安定な点(例えば双曲型不動点)のごく近傍では動きは無限にゆっくりになる。振り子の例で言えば、振り子が最上部に近付くにつれて近付く速さは遅くなっていく。もしも系が安定多様体に乗っていれば無限時間かけてその不動点へ接近する。系が安定多様体の極めて近傍に居れば、長い時間かけて不動点へ接近し、やがてゆっくりと(そして徐々に加速しながら)不動点から離れていくことで、不安定な不動点近傍に長時間滞在することが出来るのである。

いままでは、系の自由度を増すことは、他の自由度に対してノイズ的な成分を増し、結果的に系の緩和を速めると漠然と考えられて来た。が、この計算によって、多自由度系でも  $1/f$  的な振舞いが現われても良いことが確認された [YK98]。

## 8.2 遅い運動 — $\exp(1/\varepsilon^\beta)$ 的なもの

前節で述べたように、多自由度ハミルトン系のカオス領域は少なくともトポロジーとしては全てつながっている。しかし、実際にダイナミクスとして相区間をめぐる運動があるかどうかは別問題である。Arnoldは具体的なハミルトニアンに対して実際にあるトーラス近傍から別のトーラス近傍へ移行する軌道が存在することを示した [Arn64, AA68]。このように、多自由度ハミルトン系で複数のトーラス近傍の間を渡り歩く運動は「アーノルド拡散」と呼ばれている。(この”拡散”という名前は、この運動が拡散的であることを意味してはいない。)

アーノルド拡散の速さを評価することは、多自由度系の緩和過程を考える上で重要である。良く考えられているのは以下に述べる「Nekhoroshev 不等式」である。

Nekhoroshev [Nek77] によれば、

$$H = H_0(\vec{I}) + \varepsilon V(\vec{I}, \vec{\varphi})$$

のような、弱く摂動を受けたハミルトン系で、作用変数 (保存量) の変化は非常に長い時間にわたり小さく保たれる。具体的には以下のように書かれる ([LN92])

$$|I(t) - I(0)| < C_1 \varepsilon^{\frac{1}{2n}} \text{ for } 0 < t < \exp\left(1/(C_2 \varepsilon^{\frac{1}{2n}})\right)$$

ここで現われた  $\exp(1/\varepsilon^\beta)$  は「引き延ばされた指数関数」(stretched exponential) と呼ばれ、いかなるべきよりも強い  $\varepsilon$  依存性を持つ。後で述べる不変多様体の解析的振舞いにも深く関係している。

Chirikov は、この不等式をもとに、拡散係数を以下のように評価した [Chi79]:

$$D \sim D_u \exp\left(-A/\varepsilon^{\frac{1}{k+1}}\right)$$

これは、近可積分な多自由度ハミルトン系では  $\exp(1/\varepsilon^\beta)$  型の遅い運動が普遍的に見られることを述べて、それはまたこの種の系の相空間構造との関連を示唆している。これに関しては次節で述べる。

## 9 不変多様体の解析的導出と、“beyond all order”

安定および不安定多様体はカオスの源である。非可積分系においては、不安定多様体と安定多様体は滑らかにはつながらず、ポアンカレ写像では図 11 の左図のような状況になる。単振り子の例で言えば、振り子を一番上近くまで持って行ってそっと離す (不安定多様体上に初期条件を置く) と、くるっと 1

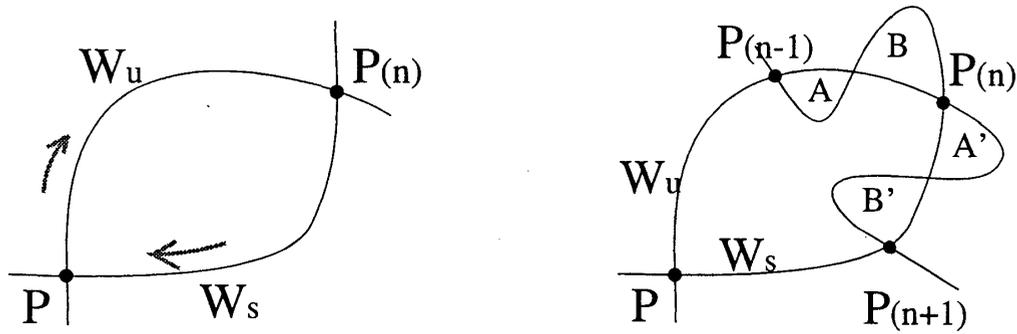


Figure 11: 非可積分系での双曲型不動点Pと、その不安定多様体  $W_u$ , 安定多様体  $W_s$ (左)、および時刻 $\pm 1$ 前後の様子(右)

回転してまた真上で止まる(安定多様体上に系が乗る)のが可積分系で、非可積分系では行きすぎたり真上まで行かなかったりして運動が続く(安定多様体上には乗らない)。  $W_u$  と  $W_s$  が交わった点を  $P(n)$  と書けば、この点のポアンカレ写像での時間発展(時刻の未来方向( $P(n+1)$ )と過去方向( $P(n-1)$ ))を考えることにより、安定多様体と不安定多様体は無限に交わり続けることになる。これがカオスの発生源である。また、図11の右図では、ある時刻に領域A(不安定多様体と安定多様体で囲まれた領域:内側)にあった点は次の時刻には領域A'(外側)へ移る。また、領域B(外側)にあった点は領域B'(内側)へ移る。すなわち、2次元ポアンカレ写像の上では、両多様体で囲まれた部分の面積が相空間内での輸送 flux を与える。したがって、これらの多様体の具体的な形を求めることは極めて重要である。

例えば次のような近可積分シンプレクティック写像を考えよう。

$$(q_i, p_i) \mapsto (q'_i, p'_i); \quad p'_i = p_i + \varepsilon f_i(q, p), \quad q'_i = q_i + \varepsilon p'_i \quad (i = 1, 2) \quad (5)$$

ここで  $f_i$  は次の形である；

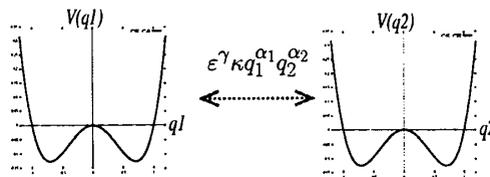


Figure 12: 写像(5)

$$\begin{aligned} f_1(q) &= -(2q_1^3 - q_1) - \varepsilon^\gamma \kappa \alpha_1 q_1^{\alpha_1 - 1} q_2^{\alpha_2} \\ f_2(q) &= -(2q_2^3 - q_2) - \varepsilon^\gamma \kappa \alpha_2 q_2^{\alpha_2 - 1} q_1^{\alpha_1} \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、 $\kappa$ は結合定数、 $\alpha_1, \alpha_2, \gamma$ は正の整数であり、以下では $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$ 、 $\gamma = 2$ の場合を扱う。

この系は、2つの double - well 型「ポテンシャル」 $V(q) = \frac{1}{2}q^4 - \frac{1}{2}q^2$  を持つ symplectic map が結合したものである。

$|\varepsilon| \ll 1$  なので、摂動だと思いうわけだが、実は、 $\varepsilon$ についての正則摂動 ( $\varepsilon$ でのテーラー展開の形) では両多様体は一致してしまい、正しい振るまいを求めることが出来ない。

この理由は、安定多様体と不安定多様体のずれの大きさが摂動 $\varepsilon$ のべきでは書けず、前節で問題にしたような $\exp(1/\varepsilon^\beta)$ 型をしているためである。

ところが、特異摂動論とボレル変換(逆ラプラス変換)を組み合わせた方法が保測写像に対してうまく使えることが Lazutkin らによりわかってきた。平田の計算により、この方法を多自由度系に適用することで、この多様体の形を具体的に解析的に求める事が出来た [HK98]。具体的な表式は下記のようになる；

$$q_j(t) = \text{sech}(t) + \varepsilon^2 q_{j0}(t) + M(t, \varepsilon) B(t, \varepsilon)$$

$$M(t, \varepsilon) = -S(t, \varepsilon) \frac{5}{2} \frac{c}{\varepsilon^4} \exp\left(-\frac{\pi}{\varepsilon}\right) \quad (7)$$

$$B(t, \varepsilon) = \frac{3}{4} \pi v_1(t) \cos \frac{2\pi t}{\varepsilon} - v_2(t) \sin \frac{2\pi t}{\varepsilon} \quad (8)$$

ここで、 $v_i(t)$ は $t$ と $t$ の双曲線関数のある多項式である。(詳細は [HK98] を参照) この表式は数値計算と良く一致する。

ここで重要なのは小さい係数

$$\exp\left(-\frac{\pi}{\varepsilon}\right) \quad (9)$$

である。この係数は $\varepsilon$ のテイラー展開の形の摂動級数では得ることが出来ない。この係数の具体的な形は写像(5)の”kinetic term”から来るものであり、通常の物理系では同じになる。

また、結合定数 $\kappa$ はセパトリクスの歪みを表す $q_{j,01}(t)$ にしか含まれず、セパトリクスの分離の仕方、言い替えれば相空間の構造の基本的な部分は2自由度系(保測写像)と同じと考えて良いことが分かる。この計算によって、

$$\alpha_1 + \alpha_2 < \gamma + 4 \quad (10)$$

の場合(簡単には、摂動が小さく、摂動の次数が低い場合)には高次元相空間の構造を低次元系のその直積と考えて良い事がわかった。高次元の相空間を考えるのは難しく、なんとなく低次元の直積でイメージしてしまいがちなのだが、それが正当化出来る場合をきちんと示せたことになる。

さらに最近の計算によれば、 $q_1 = q_2$ という部分多様体方向とそれ以外の方向では不変多様体のずれの大きさが異なることが示されている [HN99]。

## 10 作用関数を用いた不変多様体の数値的検出

ここでは前節で見たような不変多様体を数値的に検出する試みについて述べる。

### 10.1 symplectic 写像での作用原理

解析力学によれば、(連続時間で定義された) ハミルトン力学系の軌道は作用積分という関数の変分をゼロにするものとして定めることが出来、作用原理あるいは最小作用の原理と呼ばれる。離散時間で定義された symplectic 写像にも同様な作用原理を考えることが出来る。[Mac89]

時系列(軌道)  $x^{t_0}, \dots, x^{t-1}, x^t, x^{t+1}, \dots, x^{t_1}$  は、条件  $\delta x^{t_0} = \delta x^{t_1} = 0$  の元での変分

$$\delta W_{t_0}^{t_1} = 0; \quad W_{t_0}^{t_1} \equiv \sum_{t=t_0}^{t_1-1} h(x^t, x^{t+1})$$

$$\text{where } p_t = -\frac{\partial}{\partial x^t} h(x^t, x^{t+1}), \quad p_{t+1} = \frac{\partial}{\partial x^{t+1}} h(x^t, x^{t+1})$$

の解として得られる。ここで  $h(x^t, x^{t+1})$  は時刻  $t$  から  $t+1$  への変換の母関数であり、ラグランジアン of 離散時間版である。例えば、

$$h(x, x') = \left( \frac{x' - x}{2} \right)^2 - V(x) \text{ の時は、}$$

$$p' = \frac{\partial}{\partial x'} h(x, x') = x' - x \quad (p' \text{ の定義}), \quad p = -\frac{\partial}{\partial x} h(x, x') = x' - x + \text{grad}V(x)$$

$$\Rightarrow p' = p - \text{grad}V(x) \quad (\text{Newton の運動方程式の離散時間版})$$

### 10.2 作用が「最小」になることと、運動の規則性

以下では力学の軌道のある一部(時間は  $t_0 \leq t \leq t_1$ ) を考える。力学における作用原理は「最小作用の原理」とも呼ばれるが、いつでも作用が最小(正定値:  $\delta^2 W > 0$ ) になるわけではない。一般には単に停留値 ( $\delta W = 0$ ) だけである。ある関数  $S(q)$  があって  $p = \text{grad}S(q)$  と書けるような regular orbit に対しては作用が最小になることが言える [Mac89]。したがって、作用が最小 ( $\delta^2 W > 0$ ) でなくなれば、そのような regular orbit 上にはない、即ち、そのような種類の規則的運動はしていないことが分かる。

そこで、作用を終時刻の関数と考え、正定値からずれるまでの時間をみれば、初期点が安定多様体の近くにいたかどうかを近似的に判別する事が出来る。たとえば、いま考えたい安定多様体が  $p = \text{grad}S(q)$  の形に書ける場合、初期条件を安定多様体の上におけば  $t \rightarrow \infty$  まで  $\delta^2 W$  は正定値のまま

ある。一方、初期条件を安定多様体の近くに置けば、系はしばらくは安定多様体に沿って運動するのでその間は $\delta^2 W > 0$ であり、やがて安定多様体から離れるので $\delta^2 W \leq 0$ となる。こうして、初期条件空間を相空間の中のある範囲に設定してその中で安定・不安定多様体を捕まえることが可能であると考えられる。

### 10.3 安定多様体と不安定多様体のずれの検出

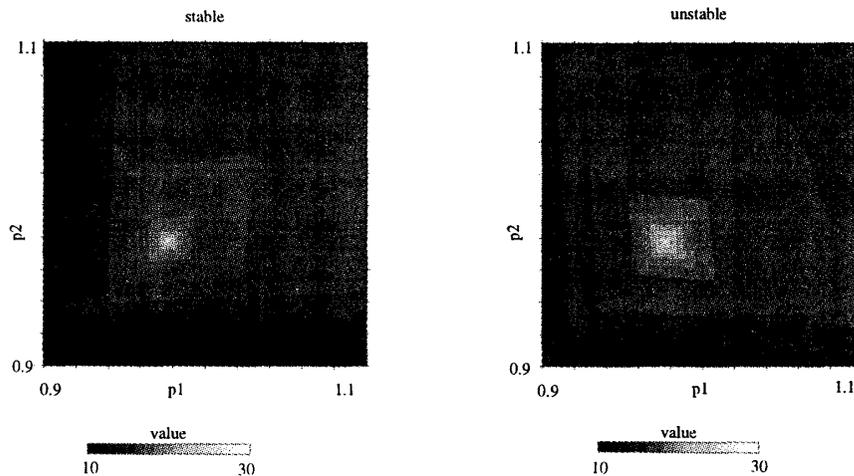


Figure 13:  $q_1 = q_2 = 0.95$  面で捉えた不安定 (左) および安定 (右) 多様体 (白い点)

前節のような特異摂動計算によれば、安定多様体と不安定多様体のずれを考えると、ある方向にはずれが極めて (摂動 $\epsilon$ に対して $\exp(-1/\epsilon^\beta)$ 的に) 小さく、また別の方向には $\epsilon$ のべき程度の比較的大きなずれがある、とされている。ここで紹介した方法によれば不変多様体の相空間内での位置を比較的容易に検出できるので、不変多様体間相互のずれの大きさの違いを確認することが出来る。

図 13, 14 は、前節で用いた写像 (5) に対して相空間の 2 次元断面での安定 / 不安定多様体を検出した図である。実際には図上の各初期条件から出発して作用の 2 階変分が正 (作用が極小) であり続けた時間を描いてあり、一番白い所が安定 / 不安定多様体と相空間 2 次元断面との交点である。

$q_1 = q_2$  方向 (図 13) では安定多様体と不安定多様体はほぼ同じ位置にあるが、 $q_1 \neq q_2$  方向 (図 14) では図の上でも 2 つの多様体の位置が違っているのがわかり、特異摂動計算での結果が数値的に確認された。

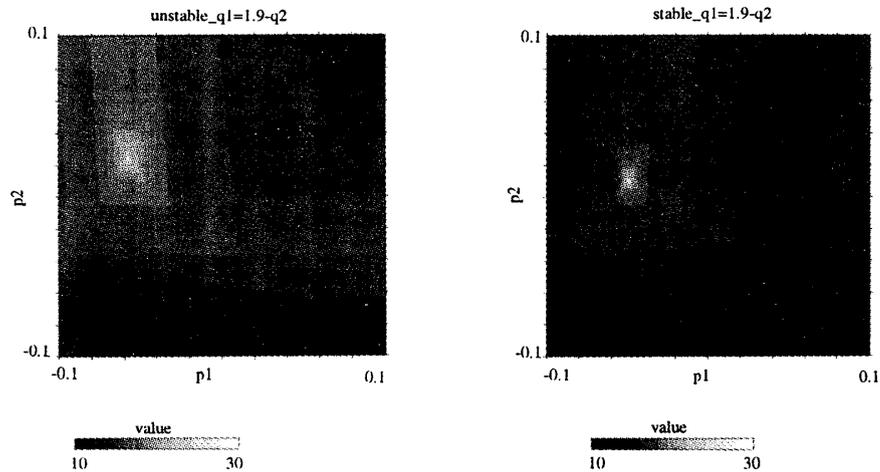


Figure 14:  $q_1 = 0.93, q_2 = 1.02$  面で捉えた不安定 (左) および安定 (右) 多様体 (白い点)。 $q_2$  方向にずれがある。

## 11 まとめ

- 多自由度系にて、不安定な方向を持つ不動点・周期点の近傍にも系が長時間滞在する事を考えることにより、多自由度系でも  $1/f$  的な長時間相関が存在することを説明することが出来る。
- 多自由度系での安定多様体と不安定多様体の解析的表式を特異摂動とポレル変換により求めることが出来る。その表式には摂動の大きさに対して特異的に小さな係数 (引き延ばされた指数関数) が含まれている。
- symplectic 写像に対する作用原理を応用することで、相空間の中で安定・不安定多様体を数値的に検出することが出来る。
- 近可積分な系の相空間構造と可積分系のそれとの差、具体的には、安定多様体と不安定多様体のずれ ( $\sim$ カオス領域の大きさに関連) は、至るところで非常に (特異的に) 小さい、というわけではない。多自由度系に対する数値計算によれば、系の対象性にそった方向ではずれは非常に小さいが、それ以外の方向では  $\varepsilon$  についてそれほど小さくは無い。
- にも関わらず、依然として“アーノルド拡散”は特異的におそいと思われる。
- この一見矛盾する2つの事柄は、系が相空間内のカオス領域を random walk しているわけではないことと関連している。

(文中敬省略)

## 謝辞

世話人の方々に、刺激的で意義深い研究会を開催して下さったことに感謝します。山口義幸氏、平田吉博氏、名古屋大学R研のメンバーには有益な議論に感謝します。文中の図の一部は X Window System 上でフリーウェア 'sketch' を用いて描きました [Her]。作者の方に感謝致します。

## References

- [AA68] V. I. Arnold and A. Avez. *Ergodic Problems in Classical Mechanics*. Benjamin-Cummings, Reading, Massachusetts, 1968.
- [Aiz84] Y. Aizawa. Symbolic dynamics approach to the two-dimensional chaos in area-preserving maps. *Prog. Theor. Phys.*, Vol. 71, pp. 1419 – 1421, 1984.
- [Arn64] V.I. Arnold. Instability of dynamical systems with several degrees of freedom. *Sov. Math. Dokl.*, Vol. 5, p. 581, 1964.
- [Chi79] B. V. Chirikov. A universal instability of many-dimensional oscillator systems. *Phys. Rep.*, Vol. 52, pp. 265 – 379, 1979.
- [CS84] B.V. Chirikov and D. L. Shepelyansky. Correlation properties of dynamical chaos in Hamiltonian diffusion. *Physica*, Vol. 13D, pp. 395–400, 1984.
- [Esc85] D. F. Escande. Stochasticity in Hamiltonian systems: Universal aspects. *Phys. Rep.*, Vol. 121, pp. 165 – 261, 1985.
- [GZR87] T. Geisel, A. Zacherl, and G. Radons. Generic  $1/f$  noise in chaotic Hamiltonian dynamics. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 59, p. 2503, 1987.
- [Her] Bernhard Herzog. Sketch, a drawing program for unix. <http://www.online.de/home/sketch/Default.htm> .
- [HI87] T. Hatori and H. Irie. Long-time correlation for the chaotic orbit in the two-wave Hamiltonian. *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, Vol. 78, pp. 249 – 267, 1987.

- [HK98] Yoshihiro Hirata and Tetsuro Konishi. Asymptotic expansion of 1-dimensional sub-manifolds of stable and unstable manifolds in a 4-dimensional symplectic mapping. *chao-dyn/9802009*, 1998.
- [HN99] Yoshihiro Hirata and Kazuhiro Nozaki. Exponentially small oscillation of 2-dimensional stable and unstable manifolds in 4-dimensional symplectic mapping. *Prog. Theor. Phys.*, Vol. 101, No. 5, 1999. (to appear).
- [Kar83] C.F.F. Karney. Long time correlations in the stochastic regime. *Physica*, Vol. 8D, pp. 360–380, 1983.
- [Koh84] T. Kohyama. Non-stationarity of chaotic motions in an area preserving mapping. *Prog. Theor. Phys.*, Vol. 71, pp. 1104–1107, 1984.
- [LN92] P. Lochak and A. I. Neishtadt. Estimates of stability time for nearly integrable systems with a quasiconvex Hamiltonian. *Chaos*, Vol. 2, pp. 495 – 499, 1992.
- [Mac89] R. S. MacKay. Converse KAM theory for symplectic twist maps. *Nonlinearity*, Vol. 2, pp. 555–570, 1989.
- [Mei86] J. D. Meiss. Class renormalization: islands around islands. *Physical Review*, Vol. A 34, pp. 2375–2383, 1986.
- [MO86] J. D. Meiss and E. Ott. Markov-tree model transport in area preserving maps. *Physica*, Vol. 20D, pp. 387–402, 1986.
- [Nek77] N.N. Nekhoroshev. An exponential estimate for the stability time of Hamiltonian systems close to integrable ones. *Russ. Math. Surv.*, Vol. 32, pp. 1–65, 1977.
- [Sai92] 斎藤信彦. カオスの物理, 物理学最前線 (大槻義彦編), 第30巻, pp. 3–98. 共立出版, 1992.
- [YK98] Yoshiyuki Y. Yamaguchi and Tetsuro Konishi. A geometrical model for stagnant motions in hamiltonian systems with many degrees of freedom. *Prog. Theor. Phys.*, Vol. 99, pp. 139–144, 1998.
- [Yos94] 吉田春夫. (岩波講座現代の物理学 1) 力学 (大貫義郎、吉田春夫著) II 展開編, pp. 89–212. 岩波書店, 1994.