# 結合振動子系のダイナミクス

藤坂博一(京都大学大学院 情報学研究科)

## 1 熱平衡系から非平衡系へ

１９４０年代から６０年代にかけて発展した熱平衡近傍の不可逆過程，非平衡統計力学の理論的枠組みは一応の完成をむかえ，１９７０年代初めには熱平衡状態からはるかに離れた Far From Equilibrium あるいは Outside Of Equilibrium の研究への胎動が始まった [1-4].

非平衡開放系では，熱平衡状態近傍のように詳細釣り合いは成りたたない．このため，マクロな空間構造や時間的振動現象が観測される．非平衡パラメタ $R$ を

$$R = \frac{\text{マクロな運動の強さ}}{\text{ミクロな運動の強さ}}$$

で定義しよう．熱平衡状態ではマクロな運動はないので，$R = 0$ となり，輸送現象はミクロな運動によっておこるが，熱平衡状態からずらしていくとマクロな運動が現れ，ミクロな運動の影響は相対的に小さくなる．非平衡状態では運動の決定論的時間発展が主になり，$R$ が大きくなるとマクロな運動による輸送がおこる．

非平衡状態のマクロな構造や運動を記述するときは，Navier-Stokes 方程式のようにミクロな自由度を繰り込んだマクロな状態変数に対する実効的な運動方程式を用いるが，通常これらの方程式は非線形方程式である．ミクロな自由度を繰り込むとミクロな自由度へのエネルギー散逸項とランジュバン力が現れるが，上に述べたようにミクロなランジュバン力は系の全体的な運動には関与しないので以下では考慮しない．非平衡系のマクロな構造や運動を決定する運動方程式系は**散逸力学系**とよばれる．

## 2 散逸力学系概論

### 2.1 運動方程式

散逸力学系の特徴は，熱エネルギーへの散逸と非線形項およびエネルギー注入に対応する項からなることである．注入されたエネルギーは熱エネルギーに散逸される過程で系に固有な非線形項により多様な運動を行う．

系のマクロな状態を表す変数を $\mathbf{X}(t)$ とすると，一般に，

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}(t)) \tag{2.1}$$

と書ける．熱平衡状態から大きく離れた状態では熱揺らぎは重要な役割を果たさないので (2.1) には入れていない．状態空間での流れ $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ はエネルギー注入に対応する制御パラメタを含む．散逸力学系の特徴として，状態空間での体積は時間的に減少していく．これは式で表すと，

$$\sigma \equiv \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sum_j \frac{\partial F_j(\mathbf{X}(s))}{\partial X_j(s)} ds < 0 \tag{2.2}$$

で表される．[1]

[1] Hamilton 系 (保存系) の場合は，位相空間の体積は保存される (Liouville の定理) ので，常に $\sigma = 0$ が成立する．

## 2.2 アトラクタ

散逸力学系では，状態点（状態空間内の代表点）は初期値によらずに長時間後には状態空間内のある有限な領域に吸引される．この領域をアトラクタとよぶ．アトラクタには，固定点，リミットサイクル（周期運動），トーラス（多重周期運動）およびストレンジアトラクタ（カオス運動）の三種がある．

固定点の安定性は次のようにして調べられる．固定点 $\mathbf{X}_0$ は, $\mathbf{F}(\mathbf{X}_0) = \mathbf{0}$ の解である．$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_0 + \mathbf{x}(t)$ とおき, $\mathbf{x}(t)$ について線形化した式

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = G\mathbf{x}(t) \quad , \quad G_{j\ell} = \frac{\partial F_j(\mathbf{X})}{\partial X_\ell}|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_0} \tag{2.3}$$

において，$G^*$ の固有値を $\{\lambda_j\}$ とおくと，固定点が安定であるためにはすべての固有値が, $\mathrm{Re}\lambda_j < 0$ を満たさなければならない．制御パラメタを変えていくと通常以下の二つのタイプの不安定が起こり得る，(1) 一つの固有値が正になる，(2) 一対の複素固有値の実部が正になる．

また，周期運動の安定性は次のように調べられる．$\mathbf{X}_0(t)$ を (2.1) の特解 (周期解) としよう．周期を $T$ とすると，$\dot{\mathbf{X}}_0(t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}_0(t))$, $\mathbf{X}_0(t+T) = \mathbf{X}_0(t)$ が成立する．$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_0(t) + \mathbf{x}(t)$ として，$\mathbf{x}(t) = U(t)\mathbf{x}(0)$ とおくと，周期解からのずれについて線形の範囲で,

$$\frac{dU(t)}{dt} = G(t)U(t) \tag{2.4}$$

が成立する．ここで, $U(t), G(t)$ は, $N \times N$ の正方行列で, $U(0)$ は単位行列, $G(t)$, $(G_{j\ell}(t) = \partial F_j(\mathbf{X})/\partial X_\ell|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_0(t)})$, は周期 $T$ の周期関数, $(G(t+T) = G(t))$ である．$U(t)$ は, $e^{T\Lambda} = U(T)$ で定義される定数行列 $\Lambda$ と周期 $T$ のある周期関数行列 $Q(t)$ を使って, $U(t) = Q(t)e^{t\Lambda}$ と書ける．これを, **Floquet の定理**という．$\Lambda$ の固有値を $\{\lambda_j\}$ とおくと，周期解 $\mathbf{X}_0(t)$ が安定であるためには，すべての固有値が $\mathrm{Re}\lambda_j < 0$ でなければならない．

## 2.3 リアプノフ 指数と局所拡大率の揺らぎ

アトラクタは，リアプノフ指数で定量化することができる．初期条件 $\mathbf{X}(0)$ と $\tilde{\mathbf{X}}(0) = \mathbf{X}(0) + \mathbf{r}(0)$ から出発したときの状態点は, $\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}(t)), \dot{\tilde{\mathbf{X}}}(t) = \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{X}}(t))$ に従う．$\tilde{\mathbf{X}}(t) - \mathbf{X}(t) \equiv \mathbf{r}(t)$ が微少であれば, $\mathbf{r}(t)$ は,

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = G(t)\mathbf{r}(t) \quad , \quad G_{j\ell}(t) = \frac{\partial F_j(\mathbf{X})}{\partial X_\ell}|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}(t)} \tag{2.5}$$

にしたがう．近傍にある二状態間の距離 $L(t) = |\mathbf{r}(t)|$ の時間変化は，上式より,

$$\dot{L}(t) = \Lambda(t)L(t) \tag{2.6}$$

とかける．これは, $L(t) = L(0)e^{\int_0^t \Lambda(s)ds}$ と解けるが,

$$\lambda = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \Lambda(s)ds \equiv \langle \Lambda \rangle \tag{2.7}$$

とおくことにより, $t \to \infty$ で, $L(t) \approx e^{\lambda t}L(0)$ となる．固定点では $\lambda < 0$, 周期運動の場合は $\lambda = 0$, カオスの場合は $\lambda > 0$ である．カオスでは初期状態のずれは指数関数的に増大する．これを状態の**初期値鋭敏性**といい，状態空間で**軌道不安定性**があるという．

$z(t) = \log L(t)$ とおくと，(2.6) は，$\dot{z}(t) = \Lambda(t)$ と書ける．$\lambda$ は**最大リアプノフ指数**とよばれ，$z(t)$ の変化率（$L(t)$ の拡大率）の平均値である．カオス運動では局所拡大率は時間的に変動している．これは，一般に状態空間内の代表点の位置により拡大率が異なる値を持つためである．**局所拡大率** $\Lambda(t)$ の平均値からの変動の大きさは，

$$\Gamma = \int_0^\infty \langle(\Lambda(t) - \lambda)(\Lambda(0) - \lambda)\rangle dt \tag{2.8}$$

によって見積もることができる．周期運動では $\Gamma$ は 0 である．カオスでは混合性のために $\Gamma > 0$ となる．

# 3 結合振動子系における同期振動と安定性

散逸系の運動方程式

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}(t)) \tag{3.1}$$

を考えよう．運動方程式に含まれる外部変数の値によっていろいろな運動を示し，その運動のタイプは, 最大リアプノフ指数 $\lambda$ の符号で分類される．以下では, $\mathbf{X}(t)$ は周期運動あるいはカオス運動を示すとする．運動方程式 (3.1) を素子とする結合振動子系を考えよう．簡単のために, 結合系として,

$$\dot{\mathbf{X}}^{(j)}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}^{(j)}(t)) + \frac{\hat{D}}{2}\sum_{\ell=1}^{2}[\mathbf{X}^{(\ell)}(t) - \mathbf{X}^{(j)}(t)] \tag{3.2}$$

を考える,(j=1,2). $\hat{D}$ は結合行列である．これは特別な相互作用（結合）であるが，安定性の議論や不安定性に伴う運動の定性的なふるまいなどは相互作用のタイプにはよらない.

同期振動 $\dot{\mathbf{X}}^0(t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}^0(t))$, $\mathbf{X}^{(1)}(t) = \mathbf{X}^{(2)}(t) = \mathbf{X}^0(t)$ の周りの微小なずれ $\mathbf{x}^{(j)}(t) = \mathbf{X}^{(j)}(t) - \mathbf{X}^0(t)$ は，$\mathbf{u}^{\pm}(t) = (\mathbf{x}^{(1)}(t) \pm \mathbf{x}^{(2)}(t))/2$ とおくと，$\dot{\mathbf{u}}^+(t) = \hat{G}(t)\mathbf{u}^+(t), \dot{\mathbf{u}}^-(t) = [\hat{G}(t) - \hat{D}]\mathbf{u}^-(t)$ にしたがう．ここで，$G_{j\ell}(t) = \partial F_j(\mathbf{X})/\partial X_\ell|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}^0(t)}$ である．$\mathbf{u}^+(t)$ は，同期解を保ちながら初期状態のずれに対する安定性に関係する．したがって，同期状態のリアプノフ指数はこの式から決定できる．$\mathbf{u}^-(t)$ の運動方程式から決定されるリアプノフ指数は**横断リアプノフ指数**とよばれる．最大横断リアプノフ指数 $\lambda_\perp(\hat{D})$ が負のとき同期運動は線形安定であり，正のとき線形不安定である．特に $\lambda_\perp(\hat{0})$ は，素子の最大リアプノフ指数 $\lambda$ に一致する．もし，$\hat{D} = D\hat{1}, (D > 0)$ であれば，次式が成立する,

$$\lambda_\perp = \lambda - D. \tag{3.3}$$

素子がリミットサイクル振動子の結合系については，電子回路系やジョセフソン接合や蛍の集団発光などの観測があり，理論的にも多くの研究がある [1]．本講義ではカオス素子からなる結合系の多様なふるまいやその解析法について述べる．

結合行列がスカラーのときは，同期カオスの安定性は横断リアプノフ指数 (3.3) の符号によって決まる．$D > 0$ であるから，(3.2) 型の相互作用に対しては常に $\lambda_\perp < 0$ となりリミットサイクル ($\lambda = 0$) 結合系の同期状態は常に安定である．カオス素子の結合系では $D > \lambda \equiv D_c$ では同期状態は安定であるが, $D < D_c$ では不安定になり $D_c$ で転移が生じる．これは, カオス素子のもつ軌道不安定性によるずれの拡大と結合によるずれの減少化の拮抗としておこる．素子が周期運動を示す振動子の結合系の同期現象は**ホイヘンス現象**とよばれ

ている．これにならって，カオス結合系の同期現象は**カオス的ホイヘンス現象**とよばれている．化学反応系の実験では，結合係数を変化させることにより同期カオスが破れる臨界強度から孤立カオス素子の最大リアプノフ指数を決定することが可能であり，これは，**カオス的ホイヘンス実験**とよばれる [5,6].

$D_c$ よりわずかに下では，殆どの時間では疑似同期状態（ラミナー相，オフ状態）を保つが，これは不安定であるので同期状態からずれた強い非同期状態（バースト，オン状態）が挿入した間欠性現象が観測される．この間欠性では，大きなバーストと小さなバーストの統計的自己相似構造をもった時間変動が特徴である．この間欠性は，明らかに周期運動の崩壊や不安定化に伴う Pomeau-Manneville 型とは異なるものである．論文 7 では，Intermittency caused by chaotic modulation と名付けたが，最近では，**オンオフ間欠性** [5,6] とよばれている．

同期振動の安定性と破れ後の運動をみるために，(3.2) を簡単化したものとして結合写像系モデル

$$X_{n+1}^{(j)} = f(X_n^{(j)}) + \xi \sum_{\ell=1}^{2} [f(X_n^{(\ell)}) - f(X_n^{(j)})], \tag{3.4}$$

(j=1,2), を考えることがある (付録参照)[8]. ここで，$\xi = (1 - e^{-D})/2, (D > 0)$ である．同期特解 $X_{n+1}^0 = f(X_n^0)$ からのずれを $X_n^{(1,2)} = X_n^0 + u_n^{\|} \pm u_n^{\perp}$ とおくと，$u_{n+1}^{\|} = f'(X_n^0) u_n^{\|}, u_{n+1}^{\perp} = f'(X_n^0) e^{-D} u_n^{\perp}$ が得られる．$u_n^{\|}$ は同期カオス解の軌道不安定性に関係し，拡大率は最大リアプノフ指数 $\lambda$ を与える．$u_n^{\perp}$ はそれに直交する方向のずれ，すなわち同期カオスの安定性に関係し，(3.3) の $\lambda_{\perp}$ の符号が安定性を決めている．例えば，素子としてロジスティック写像 $f(X) = aX(1 - X)$ をとり，$a$ は孤立素子がカオスであるように選ぶと，$D > \lambda$ を満たす $a$ の値に対してはカオス的ホイヘンス現象が観測される．

# 4 カオス変調間欠性（オンオフ間欠性）

## 4.1 カオス特解の不安定性

前節では結合カオス系の同期状態が不安定化するときにオンオフ間欠性が観測されることについて述べたが，オンオフ間欠性はこの場合だけに限らずカオス特解とその不安定化が起こる広い範囲の結合系で見られる．状態変数 $\mathbf{X}(t)$ と $\mathbf{v}(t)$ が散逸系の力学方程式

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{v}) \ , \ \dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{G}(\mathbf{v}, \mathbf{X}) \tag{4.1}$$

にしたがって運動しているとしよう．$\mathbf{F}$ と $\mathbf{G}$ は $\mathbf{X}$ と $\mathbf{v}$ の解析関数であり，$\mathbf{G}$ は $\mathbf{G}(-\mathbf{v}, \mathbf{X}) = -\mathbf{G}(\mathbf{v}, \mathbf{X})$ を満たすとする．(4.1) は，$\mathbf{G}$ の反対称性から

$$\dot{\mathbf{X}}^0(t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}^0(t), \mathbf{0}) \ , \ \mathbf{v}^0(t) = \mathbf{0} \tag{4.2}$$

を特解としてもつことがわかる．前節の例では，$\mathbf{X}(t) = (\mathbf{X}^{(1)}(t) + \mathbf{X}^{(2)}(t))/2, \mathbf{v}(t) = (\mathbf{X}^{(1)}(t) - \mathbf{X}^{(2)}(t))/2$ である．特解 (4.2) の周りのずれ，$\mathbf{x}(t)(= \mathbf{X}(t) - \mathbf{X}^0(t)), \mathbf{v}(t)$ に対する摂動方程式から

$$\lambda_{\perp} = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \log \frac{|\mathbf{v}(t)|}{|\mathbf{v}(0)|} \tag{4.3}$$

を定義すると，特解 $\mathbf{X}^0(t)$ がカオスであれば，すなわち，$\lambda_{\|} = \lim_{t\to\infty} \log(|\mathbf{x}(t)|/|\mathbf{x}(0)|)$ が正であれば，$\lambda_\perp < 0$ のとき (4.2) の特解は安定であるが，$\lambda_\perp > 0$ では不安定となり，オンオフ間欠性が観測される．前節の例では，$\lambda_{\|} = \lambda$ である．

## 4.2 オンオフ間欠性の発生条件と統計特性

オンオフ間欠性が観測されるための条件は，次の三つにまとめられる [5].

(a) カオス特解が不安定化する転移が存在する．

(b) その転移は連続転移である．

(c) **局所横断拡大率**[2]（その平均値が局所横断リアプノフ指数 $\lambda_\perp$）が揺らぎを示す．

(a) が必要なことは当然である．同期カオスが不安定になっても転移が不連続であれば，新しいアトラクタは $D > D_c$ での近傍にはないので同期カオスに近い状態は観測されずオンオフ間欠性は示さない．ローレンツカオスの結合系では $D_c$ で同期カオスが不安定化すると新しいアトラクタは固定点になってしまい，カオス運動は全く消失してしまう [9]．この転移点ではヒステリシスが観測される．(c) の条件は以下のモデルを考えるとよい．$a = 4$ をもつロジスティック写像は発達したカオスとよばれ，リアプノフ指数は最大値をもつが，この写像はある非線形変換で傾きの大きさがいたるところ 2 であるテント写像に変換できるので局所横断拡大率の揺らぎは示さず, 結合系 (3.4) はオンオフ間欠性を示さない [7]. (c) はオンオフ間欠性の発生には重要な条件であるが，病的な力学系でない限り局所横断拡大率の揺らぎがあるので発生条件 (c) は満たされていると考えてよい．後で示すように揺らぎの強度が統計性を決定している．

オンオフ間欠性の発生のメカニズムについては，状態空間の幾何学的な構造と関連して以下のような描像を描くことができる．上にみたように，全系の状態空間の中に同期運動や 4.4a の一次元運動などのカオス特解に対応した部分空間 S が存在する．状態点が一たびこの部分空間に落ち込むと運動方程式の対称性のために S からはずれることはないので S を不変多様体（$t \to \infty$ で同期解が状態空間内で占める領域）とよぶ．不変多様体が安定であれば，不変多様体近傍の状態点は不変多様体上に吸い込まれていき，最終的に例のような同期運動や一次元運動などを示す．これは，$\lambda_\perp < 0$ の場合に対応する．しかし，$\lambda_\perp > 0$ であれば，$\lambda_\perp$ がわずかに正である限り，不安定性が連続転移であれば S の近くにある状態点は平均的には S 近傍にあるだろう．また，S から十分離れた状態点は必ず S 近傍に戻ってくる．状態点が S 近傍にあるということは常に S 近傍にあるということを意味してはいない．局所横断拡大率 $\Lambda_\perp(t)$ に時間的な揺らぎがあると（言い換えると，状態点の位置により局所横断拡大率が強い揺らぎを示すと），状態点がある領域 $\mathrm{R}_-$ にあれば S に近づいていくが，別の領域 $\mathrm{R}_+$ にあれば S から離れていく．大域的には S は安定であるので，短い時間の後に S から離れた状態点は S に再投入され上に述べた運動をくり返す．$\mathrm{R}_-$ の領域が十分広く $\mathrm{R}_+$ が狭ければ擬似的な S 上の運動が観測され，短い時間領域で強く S からはずれた運動が観測される．S 上ではカオス運動を示すので S から遠ざかったり再投入するプロセスはランダムにおこる．これがオンオフ間欠性発現の描像である．

これまで知られているオンオフ間欠性の統計特性は以下のようにまとめられる,

[2] (4.1) を (4.2) の特解の周りに展開すると，特解からのずれに対して線形の範囲で (4.1) から $\dot{\mathbf{v}}(t) = \hat{K}(t)\mathbf{v}(t)$ が得られる．$\ell(t) = |\mathbf{v}(t)|$ とおくと，$\dot{\ell}(t) = \Lambda_\perp(t)\ell(t)$ と書ける．$\Lambda_\perp(t)$ の平均値が $\lambda_\perp$ である．

(i) 同期状態からのずれの大きさ $\ell(t)$ の分布がべき則 $\ell^{-1+\eta}$ に従う [10].

(ii) $\ell(t)$ のスペクトル強度は，低振動数領域で $\omega^{-\frac{1}{2}}$ を示す [10].

(iii) ラミナー（オフ）状態の継続時間分布が $\tau^{-\frac{3}{2}}$ 則を示す [11].

### 4.3 相乗確率過程モデルによる解析

オンオフ間欠性が生じる領域 ($\lambda_\perp > 0$) では，不変多様体 S からのずれ $\ell$ に対して非線形項を考慮しなければならない．$\ell = 0$ の解は，常に存在することを考慮して，$\ell$ の高次項を現象論的に，

$$\dot{\ell}(t) = \Lambda_\perp(t)\ell(t) - (\ell(t))^3 \tag{4.4}$$

で取り込むことにしよう [5,10]．局所横断拡大率 $\Lambda_\perp(t)$ を平均値（横断リアプノフ指数）と揺らぎ $f(t)$ に分ける，$\Lambda_\perp(t) = \lambda_\perp + f(t)$．混合性を仮定して，簡単のために $f(t)$ は，$\langle f(t)f(0)\rangle = 2D_\perp\delta(t)$ を満たす Gauss 型白色雑音であるとする．ここで，

$$D_\perp = \int_0^\infty \langle f(t)f(0)\rangle dt \tag{4.5}$$

は，局所拡大率揺らぎの強度である．上の相乗確率過程の Langevin 方程式に対する Fokker-Planck 方程式は，

$$\frac{\partial P(\ell,t)}{\partial t} = D_\perp \frac{\partial}{\partial \ell}[\ell^2 P_*(\ell)\frac{\partial}{\partial \ell}(\frac{P(\ell,t)}{P_*(\ell)})] \tag{4.6}$$

となる．$P_*(\ell) \propto \ell^{-1+\eta}\exp(-\ell^2/2D_\perp)$ は定常分布であり，小さな $\ell$ に対してべき則 $P_*(\ell) \propto \ell^{-1+\eta}$ をもち，

$$\eta = \frac{\lambda_\perp}{D_\perp} \tag{4.7}$$

が成立する．これは前節の統計特性 (i) である．$\eta$ の $\lambda_\perp$，$D_\perp$ 依存性はいろいろなモデルで確かめられている．

Fokker-Planck 演算子の固有値問題を解くことにより，$\ell(t)$ のスペクトル強度を求めることができ低振動数側で $\omega^{-\frac{1}{2}}$ が得られる．ラミナー継続時間は，バーストを大きさ $\ell_0$ で切ったときの隣り合うバースト間の時間平均である．不安定点近傍ではバースト強度は統計的にみて小さいので，(4.4) で非線形項を無視した線形確率過程で近似する．first passage time の理論から知られているように，$\ell_0$ から出発して，$\ell_c(< \ell_0)$ に到達する時間 $\tau$ の分布は厳密に求めることができて，$\lambda_\perp \to 0$ では十分大きな $\tau$ の領域で，統計則 (iii) が得られる．

相乗確率過程モデル (4.4) を用いると，$\omega^{-\frac{1}{2}}$ が得られるが，もっと一般的には不安定点近傍で，スペクトル強度には，

$$I(\omega) = \frac{A}{\sqrt{1+\sqrt{1+(\omega/\omega_0)^2}}} \tag{4.8}$$

なるスケーリング則が存在するようである，($A$ は定数，$\omega_0$ は不安定点で 0 になる特性振動数である．) これは，(4.4) を用いて論文 12 で得られた．最近，結合写像系の可解モデルを用いて上と全く同じスケーリング則が得られている [13]．これからすると，先に述べたオンオフ間欠性の第 2 の統計則は上の普遍的なスケーリング則が存在することであるとした方がいいかも知れない．

これまで述べた統計性は, オンオフ間欠性が生じている場合であるが, 不安定点より下 ($\lambda_\perp < 0$) では最終的にはカオス特解に吸引される. 任意の初期条件から出発するとある時刻でカオス特解へと落ち込むが, この時刻 (緩和時間) は初期条件に依存する. まず, 制御パラメータを決めると $\lambda_\perp$ が決まる. 緩和時間 $\tau$ の分布は, $\lambda_\perp, \ell(0), \ell_c$($\ell(0)$ は初期時刻でのカオス特解からのずれの大きさを表し, $\ell_c$ はカオス特解に吸引されたと判定する $\ell$ の値を表す) に依存する. $\tau$ が大きなところでは, 分布は過渡カオスに特徴的な指数関数型 $W(\tau) \sim \mathrm{e}^{-\alpha\tau}$ をもつ. $\alpha$ は特徴的な緩和時間の逆数であり, 線形近似 $\dot{\ell}(t) = (\lambda_\perp + f(t))\ell(t)$ では $\alpha = \lambda_\perp^2/4D_\perp$ となることが知られている. この関係式は, 不安定点 ($\lambda_\perp = 0$) から十分離れたところでは成立するが, 不安定点の近くでは非線形効果のためにこれからずれる. 数値実験によると, $\lambda_\perp \to 0$ では, $\alpha$ は $\ell(0), \ell_c$ に依存した有限の値 $\alpha^*(\equiv {\lambda_\perp^*}^2/4D_\perp)$ に近づく. $\lambda_\perp^*$ は $\alpha$ の異なるふるまいが見られる領域の境であり, オンオフ間欠性を示すいくつかのモデルについてスケーリング則

$$\alpha = \frac{\lambda_\perp^2}{4D_\perp} g\left(\frac{|\lambda_\perp|}{|\lambda_\perp^*|}\right) \tag{4.9}$$

が成立している [14]. ここで, $g(x)$ は, $g(x) = 1 (x \gg 1), x^{-2} (x \ll 1)$ を満たす普遍的なスケーリング関数である.

## 4.4 さまざな系におけるオンオフ間欠性

**a. 一次元運動・二次元運動間転移 (Ott-Sommerer モデル)**[15]

$x$ 軸方向のみに周期外力がかかった二次元空間での散逸系粒子の運動を考えよう. 運動方程式は,

$$\ddot{x}(t) = -\gamma\dot{x} - \nabla_x U(x,y) + F\cos(\Omega t)\ ,\ \ddot{y}(t) = -\gamma\dot{y} - \nabla_y U(x,y) \tag{4.10}$$

で与えられる. ここで, $(x(t), y(t))$ は, 時刻 $t$ での粒子の位置, $F, \Omega$ は外力の強度, 角振動数である. $\gamma$ は減衰定数, $U(x,y)$ はポテンシャルである. たとえば, $k(>0), p$ を定数として, ポテンシャル $U(x,y) = (1-x^2)^2 + y^2(x-p) + ky^4$ に対しては, $x$ 軸上に制限された一次元運動が特解として存在することがわかる. 特解の安定性は, $y$ 軸方向の摂動方程式から, $\ell(t) \equiv \sqrt{y(t)^2 + \dot{y}(t)^2}$ に対して得られた式 $\dot{\ell}(t) = \Lambda_\perp(t)\ell(t)$ より, 横断リアプノフ指数 $\lambda_\perp$($\Lambda_\perp(t)$ の長時間平均) の符号から調べることができる. $x$ 軸上の運動がカオスになるようにパラメタの値を選ぶ. 制御変数 $p$ を変えていくと, $p < p_c$ では $\lambda_\perp < 0$ となり, 一次元カオスは安定であるが, $p > p_c$ では $\lambda_\perp > 0$ となり一次元運動は不安定化し, $y$ 軸方向の運動が発生する. $p_c$ をわずかに越した領域では, ほとんどの時間は $x$ 近傍に制限された運動を示すが, 急激に $y$ 軸方向に変化し, 再び $x$ 軸に戻る運動を繰り返す. $y$ の時間変化をみると間欠性を示す. 統計性を調べることによりこの間欠性はオンオフ間欠性であることがわかる.

**b. 2状態オンオフ間欠性 (Lai-Grebogi モデル)**[16]

(4.10) に従う粒子の運動を考えよう. ポテンシャルは, $U(x,-y) = U(x,y)$ の対称性をもつとする. $y = \pm a$ で, $x$ の値に関係なく $\nabla_y U(x,y) = 0$ を満たせば, (4.10) は, $y = a$ あるいは $-a$ に制限された一次元運動を特解としてもつ. この運動はカオスであるとする. 一次元運動の周りの安定性の議論から $\lambda_\perp$ を求め, $\lambda_\perp < 0$ であれば一次元運動は安定であるが, 逆の場合は非安定となる. 不安定の場合は, $y = a$ の周りにオンオフ間欠性を示す. 大きなバーストがおこると, $y = -a$ 近傍に近づくので, 対称性より $y = -a$ の周りに同じように

オンオフ間欠性を示す．これを繰り返すことにより，$y = a, -a$ を飛び移りながらそれぞれの周りにオンオフ間欠性を示す．

**c. 結合電子回路の実験**

オンオフ間欠性の実験的検証は，Yamada 等 [17] によって始めて報告された．LR-ダイオード直列回路に外力として交流電圧を加えた回路はカオスを発生する回路として知られている．Yamada 等は，これらの回路を，インダクタンス $L_0$ によって結合させた結合回路を作り，$L_0$ を変化させることにより，結合係数 $\kappa(= L/L_0 : L$ は単回路のインダクタンス) を変化させた．それぞれの回路の電位差 $V_1, V_2$ は，$\kappa$ が大きいと，熱雑音を別にして全く同じように時間変化する ($\Delta V = V_1 - V_2$) が，$\kappa$ がある値より小さいと $\Delta V$ がオンオフ間欠的特徴を示す．

その後，結合電子回路でのカオス同期の破れに伴うオンオフ間欠性の実験が多数行われるようになった．例えば，Cenys 等 [18] は，カオスを示すように修正された Wien ブリッジ振動子の結合系で実験を行い，統計則 (iii) を確認している．

**d. スピン波不安定**

YIG(yttrium iron garnet) は，非線形物性を研究するのに最もよく利用される磁性体であり，これまで，カオスの発生や PM 型間欠性の研究などがなされてきた．Benner 等 [19] は，YIG 球の第一 Suhl 不安定（空間的に一様なモードと一対のスピン波が同時に不安定になるところ）の近くで高出力強磁性共鳴 (FMP) の実験を行った．スピン波が不安定になるとスピン波の波長に対応したマイクロ波をかけるとマイクロ波が吸収されるので，その透過強度を測定することによりスピン波の励起の程度 (空間的に非一様な状況の程度) を調べることができる．マイクロ波の透過強度はオンオフ間欠性に特徴的な時間変化を示し，統計則 (iii) を確認した．さらに，最近聞いたところでは，$\omega^{-\frac{1}{2}}$ も実験的に得られたという．

**e. 結合化学振動子系**

現在のところ，オンオフ間欠性に関する実験的研究は電子回路によるものが主流であるが，化学振動子の結合系などにおいて観測される可能性があり，今後の研究が期待される．二つの容器に入った結合化学反応系を考える．攪拌されることにより各容器中では空間的に一様なカオス的時間変化が実現されているとしよう．この二つの容器をつなぐチャネルの断面積を $A$ とすると，結合定数は $A$ に比例する．$A$ が十分大きければ２個のカオス振動子は同期するが，$A$ を小さくしていくと，臨界結合定数に対応する臨界断面積で同期が破れる．これを測定することによりカオス素子のリアプノフ指数を決定することができるが (カオス的ホイヘンス実験)[9]，まだ実現されていない．また，最近では，イオン交換樹脂上に局在した化学振動子を作成し，それらを適当に配置させることにより様々な結合化学反応系を作ることが可能になった．孤立した樹脂上の振動をカオスにすれば，樹脂間の距離を変化させることによって結合の強度が変わるので，同期カオスの不安定化に伴うオンオフ間欠性を観測することができると期待される．

**f. オンオフ拡散**

(4.10) で，ポテンシャルが，周期的な場合 ($U(x+m, y+n) = U(x,y)$, $m, n$ : 整数)，を考えよう．さらに，$\nabla_y U(x,y)|_{y=n} = 0$ であれば，任意の $x$ に対して，$y(t) = n$ に制限された $x$ 軸方向に沿う一次元運動が可能である．制御パラメタの変化により $y$ 軸方向の安定性パラメタ $\lambda_\perp$ が正になると一次元運動は不安定になり，$y$ 軸方向の運動が発生する．$y$ 軸方向の対称性より，$y = 0$ が不安定であればすべての整数 $n$ に対して $y(t) = n$ に制限された運動は不安定である．一次元運動がカオスであれば，擬アトラクタ $y = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ の周りにオ

ンオフ間欠性を示す．同時に，$y$ 軸方向への拡散が発生する．これは論文 20 で提唱され**オンオフ拡散**と名付けられている．

# 5 大自由度結合系

## 5.1 振動場のモデル

空間的自由度をもつ振動場のモデルとしては次のようなものが考えられる [21].

A: 反応拡散系

$$\dot{\mathbf{X}}(z,t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}(z,t),t) + D\nabla^2\mathbf{X}(z,t), \tag{5.1}$$

B: 周期外力下の結合振動子系

$$\dot{\psi}(z,t) = \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta P},\ \dot{P}(z,t) = -\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\psi} - (\gamma_0 - \gamma_1\nabla^2)\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta P},$$

$$\mathcal{H} = \int[\frac{P^2}{2} - \frac{a}{2}\psi^2 + \frac{\psi^4}{4} - F_{\rm ext}(t)\psi + \frac{c_1}{2}(\nabla\psi)^2 + \frac{c_2}{2}(\nabla^2\psi)^2]dz, \tag{5.2}$$

C: 結合写像系

$$\psi_{n+1}(z) = \int J(z-z')f(\psi_n(z'))dz'\ ,\ J(\Delta z) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D}}\exp[-\frac{(\Delta z)^2}{4D}] \tag{5.3}$$

ただし，$\nabla \equiv \partial/\partial z$ ．モデル B では，短波長での安定性を保証するために (5.2) で $\gamma_1\nabla^2$ の項，$\mathcal{H}$ で $(\nabla^2\psi)^2$ の項を入れてある．

## 5.2 振動場におけるオンオフ間欠性

5.1 節のモデルは空間的な一様解（同期解）を特解としてもつことがわかる．その安定性をみるために一様状態からのずれについて一次までとると，その空間的なフーリエ係数の大きさは時間的に $e^{\lambda_k t}$ で変化する．特にモデル A, C に対しては $\lambda_k = \lambda - Dk^2$ が成立する．数値実験で用いたパラメタでは，モデル B に対しても $\lambda_k$ は $k$ の単調減少関数である．$\lambda_0$ は同期状態の最大リアプノフ指数である．同期状態が周期的であれば，それは安定であるが，同期状態がカオスであれば，$k < k_0(\equiv \sqrt{\lambda/D})$ のモードは安定であるが，$k < k_0$ のモードは不安定となる．系の大きさを $L$ とすると，取り得る波数は，$k = 2\pi m/L$, $(m = 0, \pm1, \pm2,\ ...)$ であるから，系が臨界長 $L_c = 2\pi/k_0$ より十分大きいと多くの不安定モードが存在する．

同期状態がカオスの場合は， $L < L_c$ では，$\lambda_k > 0$ となるのは $k = 0$ しかないが，これは安定性には関係しない．$L_c$ よりわずかに大きな系では，モード $k_1 = \frac{2\pi}{L}$ が不安定となる．このときの運動は数値的に解くと，殆どの時間では擬似的同期状態にある．この運動は不安定であるために，波数 $k_1$ をもつ空間モードが突然大きくなり，非同期状態が観測される．しかし，臨界長よりわずかに大きな系では不安定性は弱いために短い時間の間に元の空間的な疑似同期状態に戻り，以後この運動を繰り返す．これは本質的には前節で述べたオンオフ間欠性と同じものであり，統計性は一致することが見いだされている [21].

4.4 節で述べたスピン波不安定の基本的なメカニズムはここで述べた，大自由度系ではあるが少数個のモードが不安定化することによっておこるオンオフ間欠性であると解釈できる．

### 5.3 時空カオスとダイナミカルガラス [6,22]

前節で述べたように，不安定モードが少数であれば非線形場の周期運動の破れに伴ってオンオフ間欠性が観測される．系の大きさが十分大きければ $(L \gg L_c)$ 不安定モードの数は増加する．以下ではロジスティック写像を素子としてもつ結合写像モデル (5.3) を用いて不安定モードの数が多い場合にどのようなことが観測されるかについて述べる．

素子は $a$ の値によって固定点，周期運動，カオスとさまざまなふるまいを示す．これを反映して結合系（振動場）は多様なふるまいを示すが，ここでは典型的な例として $a = 4, 3.8, 3.71$ の場合について述べる．

$a = 4$ の場合，素子は発達したカオスとよばれ，リアプノフ指数 $\lambda$ は最大値 $\log 2 = 0.693$ をもつ．空間的に一様に近い初期状態から出発すると，次第に非均質な不安定モードの振幅が増大し，過渡過程の後に時間的，空間的に乱れた状態（時空カオス）に達し，以後これが続く．定常な時空カオスでの空間的なスペクトル強度 $I(k)$ は，$I(k) \propto e^{-\alpha k^2}$ が成立している．

$a = 3.8(\lambda = 0.432)$ で空間的に一様な状態から出発すると，過渡過程の後に統計的に定常な時空カオスが観測される．過渡過程は，$a = 4$ の場合に比べて非常に長いことが特徴である．定常状態においては，ある特性波数 $k_2$ をもつ波が形成される．$\ell_2 = 2\pi/k_2$ より適当に大きなスケールでは，位相のそろった波がたっていることが観測される．局所的にみると，波長 $\ell_2$ をもつ位相のそろった不規則な長さの領域がつながっているために空間全体としてみれば不規則なパターンが観測される．局所的な位相のそろった領域間の位置は時間的に不規則な運動をする．この構造は，Fluctuating Domain Structure (FDS) とよばれる．空間的スペクトル強度は基本的には $\propto e^{-\alpha k^2}$ に比例するが，これに周期構造を反映したピークが重なっている．

$a = 3.71(\lambda = 0.363)$ では，上の二つの場合と極めて異なった状態が観測される．空間的に一様に近い状態から出発すると非均質モードが励起されていく．最終的には系全体として時間的に周期４の周期運動に落ち込む．空間的にはある特性波数 $k_3$ をもつ波がたつが，この波の局所的な極大値および極小値はそれぞれ２つの値をとる．初期状態に依存して異なる極値がランダムに出現する．過渡過程においては強い軌道不安定性がみられる (過渡カオス)．このために初期状態がわずかに異なると最終的な周期運動の空間パターンは大きく違ってくる（**アトラクタの初期状態鋭敏性**）ので，この系は極めて多くのアトラクタをもつことが予想される．極大値および極小値がそれぞれ２通りの値を取り得るので，波長 $2\pi/k_3(\equiv \ell_3)$ の波で全系（システムサイズ $L$）を覆うのに可能な空間パターンの数は，$L/(\ell_3/2)(\equiv M)$ として，$2^M$ である．数値計算で行ったパラメタに対しては，$M = 60$ であり，アトラクタの数は $2^{60} = 10^{18}$ である．初期状態に応じた長い過渡の存在と空間的な不規則性が凍結した，非常に多数個のアトラクタ集団の存在は過冷却液体のガラス状態に類似している．大自由度非線形力学系に特徴的なこのような状態を**ダイナミカルガラス**とよび，アトラクタ集団を**ガラスアトラクタ**とよぶ．ダイナミカルガラスの形成は，系全体として周期４の周期運動が安定化されることと関係している．

## 6 おわりに

非平衡系では多くの新しい現象が発見され，新しい概念が作られてきている．これらの中には，フラクタルのように通常の物質科学の研究に新しい視点を与えているものもある．

本稿で述べた内容は非平衡系の時間的振動現象をテーマとするが，結合振動子系とみなされる系は，通常の物理でも，電場や磁場下の液晶，強磁場下の磁性体，結合ジョセフソン接合系，高温超伝導の **intrinsic Josephson junction** から脳のモデルまで，さまざまな範囲，レベルにわたっている．本来，物理は力学から出発し，これは元々一般的には強い非線形性を含んでいるのであるが，物質科学になると平衡状態近傍の周りの微小振動という線形系あるいは基準振動の相互作用という線形性からの小さなずれに関する研究が中心になされてきた．平衡点近傍から大きくずれると多様な振動現象がいたるところに観測される．われわれは，これまでこのような多彩な現象を見過ごしたりいろいろな理由で避けてきた．自然の多様さ，複雑さ，そして何よりも奥深さを理解し，より正しい自然観を作り上げていくためにはこの方向の研究を強力に進めていく必要がある．

## 付録： 写像格子系および写像場力学系の導出

結合写像系は反応拡散方程式系からある近似のもとで導かれた．導出については論文 8 を参照してもらうことにしてここではもっとわかりやすい方法で導いてみよう．

周期 $T$ の撃力を受けた結合系の, 時刻 $t$ での $j$ 番目の振動子の状態変数が, 運動方程式

$$\dot{\psi}^{(j)}(t) = F(\psi^{(j)}(t)) \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t-mT) + \mathcal{D}\psi^{(j)}(t) \qquad (A.1)$$

に従うとしよう．$F(\psi)$ は $\psi$ のある非線形関数であり, 最後の項は素子間の相互作用 (線形とする) を表し, $\mathcal{D}$ は結合の具体的なタイプを表す演算子である．上式を時刻 $t_n(\equiv nT-0)$ から $t_{n+1}$ まで積分すると, $\psi_n^{(j)} \equiv \psi^{(j)}(t_n)$ に対する結合写像系

$$\psi_{n+1}^{(j)} = e^{T\mathcal{D}} f(\psi_n^{(j)}) = \sum_{\ell} J_{j\ell} f(\psi_n^{(\ell)}) \qquad (A.2)$$

が得られる．ただし, $f(\psi) = F(\psi) - \psi$ とおいた．$J_{j\ell}$ は (A.1) の結合のタイプによって決まる写像系での相互作用である．

簡単のために空間一次元的に分布した系を考え, $C$ を正定数として, 局所的相互作用 $\mathcal{D}\psi^{(j)} = C(\psi^{(j-1)} - 2\psi^{(j)} - \psi^{(j+1)})$ を考えよう．(A.1) では相互作用は隣接間にしかないが, 周期 $T$ にわたって積分したために, (A.2) では相互作用は非局所的になる．2 素子の結合系に対しては, $\mathcal{D}\psi^{(1)} = C(\psi^{(2)} - \psi^{(1)})$ として, $e^{T\mathcal{D}} f(\psi^{(1)}) = f(\psi^{(1)}) + \frac{1-e^{-2CT}}{2}[f(\psi^{(2)}) - f(\psi^{(1)})]$ が成り立つ．$2CT = D$ とおくと (2.4) 式が得られる．

(A.1) を場に拡張したモデル

$$\dot{\psi}(\mathbf{r},t) = F(\psi(\mathbf{r},t)) \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t-mT) + D\nabla^2\psi(\mathbf{r},t) \qquad (A.3)$$

も格子系の場合と同様にして，$t_n$ から $t_{n+1}$ まで積分すると，$\psi_n(\mathbf{r}) \equiv \psi_{n+1}(\mathbf{r})$ に対する写像場力学系 $\psi_{n+1}(\mathbf{r}) = e^{TD\nabla^2} f(\psi_n(\mathbf{r}))$ が得られる．ただし，$f(\psi) = F(\psi) - \psi$．これは，$J(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = (4\pi TD)^{-\frac{d}{2}} \exp[-(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2/(4TD)]$ とおくと，

$$\psi_{n+1}(\mathbf{r}) = \int J(\mathbf{r}-\mathbf{r}') f(\psi_n(\mathbf{r}')) d\mathbf{r}' \qquad (A.4)$$

と書き換えることができる [23].

# 参考文献


[1 ] Y.Kuramoto: *Chemical Oscillations, Waves and Turbulence*, (Springer-Verlag, Berlin, 1984).

[2 ] M.C.Cross and P.C.Hohenberg: Rev.Mod.Phys. **65**(1993)851.

[3 ] P.Manneville: *Dissipative Structures and Weak Turbulence*, (Academic Press, Boston, 1990).

[4 ] T.Bohr, M.H.Jensen, G.Paladin and A.Vulpiani: *Dynamical Systems Approach to Turbulence*, (Cambridge Univ. Press, 1998).

[5 ] 藤坂博一ほか：日本物理学会誌，第 51 巻 (1996)814 およびその中の引用文献.
藤坂博一: 応用数理，第 9 巻 (1999)28.

[6 ] 藤坂博一, 山田知司: 数理科学, No.408(1997)52.

[7 ] H.Fujisaka and T.Yamada: Prog.Theor.Phys. **74**(1985) 918; **75**(1986)1087.

[8 ] T.Yamada and H.Fujisaka: Prog.Theor.Phys. **70**(1983) 1240, **72**(1984)885.

[9 ] H.Fujisaka and T.Yamada: Prog.Theor.Phys. **69**(1983)32.

[10 ] T.Yamada and H.Fujisaka: Prog.Theor.Phys. **76**(1986)582.

[11 ] N.Platt, E.A.Spiegel and C.Tresser: Phys.Rev.Lett. **70**(1993) 279.
J.F.Heagy, N.Platt and S.M.Hammel: Phys.Rev. E **49**(1994)1140.

[12 ] H.Fujisaka and T.Yamada: Prog.Theor.Phys. **90**(1993)529.

[13 ] S.Miyazaki and H.Hata: Phys.Rev. E **58**(1998)7172.

[14 ] H.Fujisaka, S.Matsushita and T.Yamada: J.Phys. A **30**(1997)5697.

[15 ] E.Ott and J.C.Sommerer: Phys.Lett. A **188**(1994)39.

[16 ] Y.C.Lai and C. Grebogi: Phys.Rev. E **52**(1995)R3313.

[17 ] T.Yamada, K.Fukushima and T.Yazaki: Prog. Theor. Phys. Suppl. No.99 (1989)120.

[18 ] A.Cenys, A.Namajunas, A.Tamserius and T.Schneider: Phys.Lett. A **213**(1996)259.

[19 ] F.Rodelsperger, A.Cenys and H.Benner: Phys.Rev.Lett. **75** (1995)2594.

[20 ] T.Harada, H.Hata and H.Fujisaka: J.Phys. A; Math.Gen.**32** (1999)1557.

[21 ] H.Fujisaka, K.Ouchi, H.Hata, B.Masaoka and S.Miyazaki: Physica D **114**(1998)237.

[22 ] H.Fujisaka, K.Egami and T.Yamada: Phys.Lett.A **174**(1993)103.

[23 ] F.Kasper and H.G.Schuster: Phys.Lett.A **113**(1986)451.