散逸のあるKerr媒質による光子数の量子非破壊測定

筑波大物理 *

遠藤幸夫 (Yukio ENDO) †,　有光敏彦 (Toshihico ARIMITSU) ‡

1 導入

量子非破壊測定(Quantum Non-Demolition Measuremt, 以下QND測定)とは，被測定量に共役な物理量の不確定さを増加させるという犠牲を払う変わりに，被測定量の自由な時間発展を乱さないような測定である [1]-[3]. これは，重力波検出における量子限界を克服するために，Braginskyが1974年に提案した概念である．光に対するQND測定の研究は，1980年頃から始まったが，当時は,「QND測定が可能となるHamiltonianはどのようなものであるか？」ということを議論の中心にしていた．そのため，それらは，物理的実現性にあまり注意が払われていない [4]. 物理的実現性を考慮したものの一つとして，井元らが提案した光子数のQND測定があげられる [5]. これは，signal光（被測定光）とprobe光とを光Kerr 効果によって相互作用させ，probe光の位相にsignal光の光子数の情報を持たせる．そして，干渉計を用いてprobe光の位相を電流として測定し，signal光の光子数を破壊せずに読みとるというものである．ここでは，光Kerr媒質は入射光を全く吸収しないものとして扱って，光子数のQND測定を考えている．

ところが，我々が目にする測定装置は，全く光吸収のない媒質は存在せず，必ず入射光の強度の一部を吸収する．つまり，物理的実現性を考えるのであれば，少なくとも光Kerr媒質による散逸の効果を考慮しなければならない．そこで，井元らは，入射光の一部のみを通過させる損失板（loss plate）を便宜上考え，それを用いることで，媒質による散逸効果を取り入れた [6]. この損失板は，簡単に散逸効果を表す意味で有効的であるが，系のダイナミックスをきちんと与えていない．

一方，Non-Equilibrium Thermo Field Dynamics(NETFD) [7]-[9] は，非平衡散逸系を正準演算子形式の場の理論として記述できることが知られている．そこで我々は，井元らが提案した光Kerr媒質による光子数のQND測定問題を，散逸のあるKerr媒質の問題に拡張し，NETFDの体系で定式化した．その結果として，井元らが提案した測定装置では散逸による測定精度の限界が現れるため，光子数のQND測定は不可能であることが示せた．

2 散逸を考慮しない場合のQND測定

まず，signal光とprobe光とを相互作用させるKerr媒質の部分を考察する．散逸効果を考慮しない場合，全系（signal光とprobe光）のHamiltonian ($\hbar = 1$) は

$$H = H_s + H_p + H_I, \tag{1}$$

* Institute of Physics, University of Tsukuba, Ibaraki 305-8571, Japan
† endo@cm.ph.tsukuba.ac.jp
‡ arimitsu@cm.ph.tsukuba.ac.jp

である．添字s, pはそれぞれsignal系とprobe系を表し，正準交換関係を満たす生成消滅演算子$a^\dagger$, aを導入すると，

$$H_s = \omega_s a_s^\dagger a_s, \qquad H_p = \omega_p a_p^\dagger a_p, \tag{2}$$
$$H_I = \lambda a_s^\dagger a_s a_p^\dagger a_p, \tag{3}$$

である．λはKerr効果の強さを表す定数である．このHはsignal系とprobe系に関して対称であることがわかる．

signalの消滅演算子$a_s(t)$と光子数演算子$\check{n}_s(t)$のHeisenberg方程式は，

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}a_s(t) &= -i\left(\omega_s + \lambda\check{n}_p(t)\right)a_s(t), & (4)\\ \frac{d}{dt}\check{n}_s(t) &= \frac{da_s^\dagger(t)}{at}a_s(t) + a_s^\dagger(t)\frac{da_s(t)}{dt} = 0. & (5)\end{aligned}$$

で与えられる．(5)より，signalの光子数$\check{n}_s(t)$は運動の恒量である．また，Hの対称性からprobe光の光子数$\check{n}_p(t)$も，(5)で$s \rightarrow p$と置き換えたものを満たすので，運動の恒量である．そのため，(4)の右辺の$\check{n}_p(t)$は，時間について定数となるので積分できて，

$$\check{n}_s(t) = \check{n}_s, \tag{6}$$
$$\begin{aligned} a_s(t) &= a_s \mathrm{e}^{-i(\omega_s + \lambda\check{n}_p)t}, & (7)\\ a_p(t) &= a_p \mathrm{e}^{-i(\omega_p + \lambda\check{n}_s)t}. & (8)\end{aligned}$$

である．(6)からわかるように，被測定量のsignalの光子数は，Kerr効果の影響を受けない．また，(8)から， probe光$a_p(t)$の位相は，$\check{n}_s$を含むことがわかる．

ここで，signal光，probe光は媒質入射時$(t = 0)$でcoherent状態を考える．

$$\begin{aligned} a_s|\alpha_s)_s &= \alpha_s|\alpha_s)_s, \qquad \alpha_s = |\alpha_s|\mathrm{e}^{i\theta_s}, & (9)\\ a_p|\alpha_p)_p &= \alpha_p|\alpha_p)_p, \qquad \alpha_p = |\alpha_p|\mathrm{e}^{i\theta_p}. & (10)\end{aligned}$$

(7)を$|\alpha_s)_s$に作用すると

$$a_s(t)\ |\alpha_s)_s = \alpha_s \mathrm{e}^{-i(\omega_s + \lambda\check{n}_p)t}\ |\alpha_s)_s. \tag{11}$$

となる．つまり，Kerr効果は，媒質入射前の光の固有状態（coherent状態）を変えないことがわかる．ただし，固有値の位相が変化する．同様に，probe光の固有状態も変えないことが示せる．$\langle\cdots\rangle_{sp}$を，signalの状態$|\alpha_s)_s$とprobeの状態$|\alpha_p)_p$についての期待値を表すことにし，signal光の光子数の期待値，分散を求めると，

$$\langle\check{n}_s(t)\rangle_{sp} = |\alpha_s|^2, \qquad \langle(\Delta\check{n}_s(t))^2\rangle_{sp} = |\alpha_s|^2. \tag{12}$$

を得る．

以上より，Kerr効果は媒質入射前後で光の固有状態を変えないため，被測定量$\check{n}_s(t)$に影響を与えないこと，さらに，probe光$a_p(t)$の位相から，被測定量$\check{n}_s$の情報が取り出せることが示せた．

3 signal光と散逸的Kerr媒質

ここでは，signal光と散逸的媒質のみに注目して，signal光の時間発展を考察する．また，signal光は時刻t'に散逸的Kerr媒質に入射し，時刻$t'+t_1$に媒質から出射するとする．

NETFDでの時間発展生成演算子は，hat-Hamiltonianで与えられる．また，非チルド演算子とチルド演算子の2種類の演算子を導入することで散逸的現象も演算子形式で扱えることが知られている [7]-[9]．signal系のhat-Hamiltonian ($\hbar=1$) は，

$$\hat{H}_s = \omega_s(a_s^\dagger a_s - \tilde{a}_s^\dagger \tilde{a}_s) + i\hat{\Pi}_s, \tag{13}$$

$$\hat{\Pi}_s = -\kappa_s\left[(1+2\bar{n}_s)(a_s^\dagger a_s + \tilde{a}_s^\dagger \tilde{a}_s) - 2(1+\bar{n}_s)a_s\tilde{a}_s - 2\bar{n}_s a_s^\dagger \tilde{a}_s^\dagger\right] - 2\kappa_s\bar{n}_s, \tag{14}$$

である．ただし，$\hat{\Pi}_s$はsignal光の散逸項である．また，κ_sは，Kerr媒質による振幅の減衰率を表し，$\bar{n}_s$は，温度Tの媒質と熱平衡状態にある光子のPlanck分布 ($k_B=1$)；

$$\bar{n}_s = \left(\mathrm{e}^{\omega_s/T} - 1\right)^{-1},$$

を表す．非チルド演算子とチルド演算子は，それぞれ正準交換関係が成り立つ．

$$\left[a_s,\ a_s^\dagger\right] = 1, \quad \left[\tilde{a}_s,\ \tilde{a}_s^\dagger\right] = 1. \tag{15}$$

また，非チルド演算子とチルド演算子は，同時刻で可換である．

NETFDでのobservable $\mathcal{A}$のHeisenberg表示，Heisenberg方程式は，

$$\mathcal{A}(t) \equiv \mathrm{e}^{i\hat{H}t}\mathcal{A}\mathrm{e}^{-i\hat{H}t}, \qquad \frac{d}{dt}\mathcal{A}(t) = i[\hat{H}(t),\ \mathcal{A}(t)]. \tag{16}$$

で与えられる．$t' \le t \le t'+t_1$ に対する，signalの生成消滅演算子$a_s^\dagger(t)$，$a_s(t)$のHeisenberg方程式は

$$\frac{d}{dt}a_s^\dagger(t) = i\left[2i\kappa_s(1+\bar{n}_s)\tilde{a}_s(t) + \{\omega_s - i\kappa_s(1+2\bar{n}_s)\}a_s^\dagger(t)\right], \tag{17}$$

$$\frac{d}{dt}a_s(t) = -i\left[\{\omega_s - i\kappa_s(1+2\bar{n}_s)\}a_s(t) + 2i\kappa_s\bar{n}_s\tilde{a}_s^\dagger(t)\right], \tag{18}$$

で与えられる．ここで，(18)の両辺のエルミート共役(†)をとってみても，(17)にはならない．このことからも，散逸現象を表すためには2種類の演算子が必要であることがわかる．(17),(18)を解くと，

$$a_s^\dagger(t) = \mathrm{e}^{i\omega_s t}\left[\left\{-\bar{n}_s a_s^\dagger + (1+\bar{n}_s)\tilde{a}_s\right\}\mathrm{e}^{-\kappa_s(t-t')} + (1+\bar{n}_s)\left\{a_s^\dagger - \tilde{a}_s\right\}\mathrm{e}^{\kappa_s(t-t')}\right], \tag{19}$$

$$a_s(t) = \mathrm{e}^{-i\omega_s t}\left[\left\{(1+\bar{n}_s)a_s - \bar{n}_s\tilde{a}_s^\dagger\right\}\mathrm{e}^{-\kappa_s(t-t')} - \bar{n}_s\left\{a_s - \tilde{a}_s^\dagger\right\}\mathrm{e}^{\kappa_s(t-t')}\right], \tag{20}$$

となり，散逸を考慮した場合の生成消滅演算子を得る．

(19), (20) より，$t' \le t \le t' + t_1$ でのsignal光子数$\check{n}_s(t)$は，

$$
\begin{aligned}
\check{n}_s(t) \;=\;& \left[(1+\bar{n}_s)a_s^\dagger - (1+\bar{n}_s)\tilde{a}_s\right] \cdot \left[(1+\bar{n}_s)a_s - \bar{n}_s\tilde{a}_s^\dagger\right] \\
&+ \left[-\bar{n}_s a_s^\dagger + (1+\bar{n}_s)\tilde{a}_s\right] \cdot \left[-\bar{n}_s a_s + \bar{n}_s\tilde{a}_s^\dagger\right] \\
&+ \mathrm{e}^{2\kappa_s(t-t')} \left[(1+\bar{n}_s)a_s^\dagger - (1+\bar{n}_s)\tilde{a}_s\right] \cdot \left[-\bar{n}_s a_s + \bar{n}_s\tilde{a}_s^\dagger\right] \\
&+ \mathrm{e}^{-2\kappa_s(t-t')} \left[-\bar{n}_s a_s^\dagger + (1+\bar{n}_s)\tilde{a}_s\right] \cdot \left[(1+\bar{n}_s)a_s - \bar{n}_s\tilde{a}_s^\dagger\right]. \qquad (21)
\end{aligned}
$$

を得る．

ここで，signal系は，$t=0$でcoherent状態

$$
|\alpha_s,\ \alpha_s)_s, \qquad \alpha_s = |\alpha_s|\mathrm{e}^{i\theta}, \qquad (22)
$$

とする．ただし，NETFDでは，一般にcoherent状態を次のように定義する．

$$
a_s|\beta_s,\ \gamma_s)_s = \beta_s|\beta_s,\ \gamma_s)_s, \quad \tilde{a}_s|\beta_s,\ \gamma_s)_s = \gamma_s^*|\beta_s,\ \gamma_s)_s, \qquad (23)
$$

(20) を (22) に作用すると，有限温度系では，散逸があることにより，$t>0$ではcoherent状態ではないことがわかる．しかし，絶対零度系では，

$$
a_s(t)\ |\alpha_s,\ \alpha_s)_s = a_s \mathrm{e}^{-\kappa_s(t-t')}\mathrm{e}^{-i\omega_s t}\ |\alpha_s,\ \alpha_s)_s = \alpha_s \mathrm{e}^{-\kappa_s(t-t')}\mathrm{e}^{-i\omega_s t}\ |\alpha_s,\ \alpha_s)_s. \qquad (24)
$$

であり，散逸があってもcoherent状態は保たれる．

$\langle\cdots\rangle_s$を，signalの状態$|\alpha_s,\ \alpha_s)_s$についての期待値を表すことにし，signal光の光子数の期待値，分散を求めると，

$$
\begin{aligned}
\langle \check{n}_s(t)\rangle_s &= |\alpha_s|^2\mathrm{e}^{-2\kappa_s(t-t')} + \bar{n}_s(t), \qquad (25)\\
\langle(\Delta\check{n}_s(t))^2\rangle_s &= |\alpha_s|^2\mathrm{e}^{-2\kappa_s(t-t')} + 2\bar{n}_s(t)|\alpha_s|^2\mathrm{e}^{-2\kappa_s(t-t')} \\
&\quad + \bar{n}_s(t)\left(\bar{n}_s(t)+1\right), \qquad (26)
\end{aligned}
$$

を得る．ただし，

$$
\bar{n}_s(t) \equiv \bar{n}_s(1-\mathrm{e}^{-2\kappa_s(t-t')}), \qquad (27)
$$

とした．物理的には，(25) の右辺第一項は散逸によるcoherent光の減衰を，また第二項は（黒体輻射による）incoherent光の増加を表す．さらに，(26) の右辺第一項, 第三項は，coherent光,incoherent光の揺らぎを，第二項は，coherent光とincoherent光の相関を表す．

4 Kerr効果の影響

散逸的Kerr媒質にprobe光を入射し，signal光の光子数が，probe光との相互作用の影響を受けるかを調べる．また，時刻$t' \le t \le t' + t_1$ の間だけ，signal光とprobe光は相互作用するものとする．

signal系とprobe系とのhat-Hamiltonianは

$$\hat{H}_d = \hat{H}_s + \hat{H}_p + \hat{H}_I, \tag{28}$$

であり,

$$\hat{H}_j = \hat{H}_j^0 + i\hat{\Pi}_j, \qquad (\text{for } j = s, p\ ) \tag{29}$$

$$\hat{H}_j^0 = \omega_j \left(a_j^\dagger a_j - \tilde{a}_j^\dagger \tilde{a}_j \right), \tag{30}$$

$$\hat{\Pi}_j = -\kappa_j \left[(1+2\bar{n}_j) \left(a_j^\dagger a_j + \tilde{a}_j^\dagger \tilde{a}_j \right) - 2(1+\bar{n}_j) a_j \tilde{a}_j - 2\bar{n}_j a_j^\dagger \tilde{a}_j^\dagger \right] - 2\kappa_j \bar{n}_j, \tag{31}$$

$$\hat{H}_I = \frac{\sqrt{F}}{t_1} \left(a_s^\dagger a_s a_p^\dagger a_p - \tilde{a}_s^\dagger \tilde{a}_s \tilde{a}_p^\dagger \tilde{a}_p \right), \tag{32}$$

である．$\hat{\Pi}_j$は光子jの散逸の効果を，$\hat{H}_I$はKerr効果を表す項である．κ_s, κ_p は，それぞれKerr媒質によるsignal光，及びprobe光の振幅の減衰率を表す．$\sqrt{F}$は，Kerr効果の強さを表す定数である．κ_s, κ_p , $\sqrt{F}$ はKerr媒質に関わる特性であるため，signal光とprobe光が相互作用している時間($t' \leq t \leq t' + t_1$)以外ではすべて0になる．さらに，$\bar{n}_j$は, 温度TのKerr媒質と熱平衡状態にある光子j のPlanck分布($k_B = 1$)

$$\bar{n}_j = \left(e^{\omega_j / T_m} - 1 \right)^{-1}, \qquad (\text{for } j = s, p) \tag{33}$$

である．signal系，probe系の生成消滅演算子は正準交換関係が成り立つ．

$$[a_j\ , a_{j'}^\dagger] = \delta_{j,j'}, \quad \left[\tilde{a}_j\ , \tilde{a}_{j'}^\dagger \right] = \delta_{j,j'}, \qquad (\text{for } j, j' = s, p). \tag{34}$$

signal光の光子数 $\check{n}_s(t)$ のHeisenberg方程式を求めると$t' \leq t \leq t' + t_1$に対しては,

$$\begin{aligned}
\check{n}_s(t) = (4\Gamma_p^2)^{-1} \Big\{ & \left[(\Gamma_p + f_p)\, a_s^\dagger - 2(1+\bar{n}_s)\tilde{a}_s \right] \cdot \left[(\Gamma_p + f_p) a_s - 2\bar{n}_s \tilde{a}_s^\dagger \right] \\
& + e^{2\kappa_s \Gamma_p (t-t')} \left[(\Gamma_p + f_p)\, a_s^\dagger - 2(1+\bar{n}_s)\tilde{a}_s \right] \cdot \left[(\Gamma_p - f_p) a_s + 2\bar{n}_s \tilde{a}_s^\dagger \right] \\
& + \left[(\Gamma_p - f_p)\, a_s^\dagger + 2(1+\bar{n}_s)\tilde{a}_s \right] \cdot \left[(\Gamma_p - f_p) a_s + 2\bar{n}_s \tilde{a}_s^\dagger \right] \\
& + e^{-2\kappa_s \Gamma_p (t-t')} \left[(\Gamma_p - f_p)\, a_s^\dagger + 2(1+\bar{n}_s)\tilde{a}_s \right] \cdot \left[(\Gamma_p + f_p) a_s - 2\bar{n}_s \tilde{a}_s^\dagger \right] \Big\}.
\end{aligned} \tag{35}$$

ただし,

$$\Gamma_p \equiv \left[1 + i(1+2\bar{n}_s) \frac{\sqrt{F}}{\kappa_s t_1} \hat{n}_p - \left(\frac{\sqrt{F}}{2\kappa_s t_1} \hat{n}_p \right)^2 \right]^{1/2}, \tag{36}$$

$$f_p \equiv (1+2\bar{n}_s) + i \frac{\sqrt{F}}{2\kappa_s t_1} \hat{n}_p, \tag{37}$$

$$\hat{n}_p \equiv \check{n}_p - \check{\tilde{n}}_p. \tag{38}$$

である．(35) から，$\check{n}_s(t)$ は，Kerr 効果の影響を表す$\sqrt{F}$を含む．この$\sqrt{F}$は 必ず$\hat{n}_p$の積として現れる．$\hat{n}_p$は，probe 系の任意の状態に対して，期待値0を与える．そのため，signal 光子数の高次の期待値を考える範囲では，Kerr 効果の影響は現れない．

時刻$t(\geq t'+t_1)$でのsignal 系の生成消滅演算子を求めると，

$$a_p^\dagger(t) = \mathrm{e}^{i\omega_p t}\mathrm{e}^{i\sqrt{F}N_s}\left[\left\{-(2\Gamma_s)^{-1}(f_s-\Gamma_s)\,a_p^\dagger + (\Gamma_s)^{-1}(1+\bar{n}_p)\tilde{a}_p\right\}\mathrm{e}^{-\kappa_p\Gamma_s t_1} + \left\{(2\Gamma_s)^{-1}(f_s+\Gamma_s)\,a_p^\dagger - (\Gamma_s)^{-1}(1+\bar{n}_p)\tilde{a}_p\right\}\mathrm{e}^{\kappa_p\Gamma_s t_1}\right], \tag{39}$$

$$a_p(t) = \mathrm{e}^{-i\omega_p t}\mathrm{e}^{-i\sqrt{F}N_s}\left[\left\{(2\Gamma_s)^{-1}(f_s+\Gamma_s)\,a_p - (\Gamma_s)^{-1}\bar{n}_p\tilde{a}_p^\dagger\right\}\mathrm{e}^{-\kappa_p\Gamma_s t_1} - \left\{(2\Gamma_s)^{-1}(f_s-\Gamma_s)\,a_p - (\Gamma_s)^{-1}\bar{n}_p\tilde{a}_p^\dagger\right\}\mathrm{e}^{\kappa_p\Gamma_s t_1}\right], \tag{40}$$

を得る．ここで，N_sはsignal 光の光子数のKerr 媒質中での時間平均を表わす物理量である．

$$\begin{aligned} N_s &= \frac{1}{2t_1}\int_{t'}^{t'+t_1} dt\left(\check{n}_s(t)+\tilde{\check{n}}_s(t)\right) \\ &= \left(8\Gamma_p^2\right)^{-1}\left\{A_1+\tilde{A}_1+\frac{\mathrm{e}^{2\kappa_s\Gamma_p t_1}-1}{\kappa_s\Gamma_p t_1}A_2+\frac{1-\mathrm{e}^{-2\kappa_s\Gamma_p t_1}}{\kappa_s\Gamma_p t_1}A_3\right\}. \end{aligned} \tag{41}$$

ただし，

$$A_1 = 2\left\{\left(\Gamma_p^2+f_p^2\right)a_s^\dagger a_s - 2(1+\bar{n}_s)f_p a_s\tilde{a}_s - 2\bar{n}_s f_p a_s^\dagger\tilde{a}_s^\dagger + 4\bar{n}_s(1+\bar{n}_s)\tilde{a}_s\tilde{a}_s^\dagger\right\}, \tag{42}$$

$$A_2 = \left[(\Gamma_p+f_p)\,a_s^\dagger - 2(1+\bar{n}_s)\tilde{a}_s\right]\cdot\left[(\Gamma_p-f_p)\,a_s + 2\bar{n}_s\tilde{a}_s^\dagger\right], \tag{43}$$

$$A_3 = \left[(\Gamma_p-f_p)\,a_s^\dagger + 2(1+\bar{n}_s)\tilde{a}_s\right]\cdot\left[(\Gamma_p+f_p)\,a_s - 2\bar{n}_s\tilde{a}_s^\dagger\right]. \tag{44}$$

である．(39), (40) より，probe 光の位相からsignal の光子数の情報が得られることがわかる．

ここで，signal，probe 系は$t=0$でcoherent 状態を考える．

$$|\alpha_j,\ \alpha_j)_j, \qquad \alpha_j = |\alpha_j|\mathrm{e}^{i\theta_j}, \qquad (\text{for } j=s,\ p). \tag{45}$$

ただし，

$$a_j|\beta_j,\ \gamma_j)_j = \beta_j|\beta_j,\ \gamma_j)_j, \quad \tilde{a}_j|\beta_j,\ \gamma_j)_j = \gamma_j^*|\beta_j,\ \gamma_j)_j, \tag{46}$$

である．(40) を (45) に作用させると，有限温度系においては$t>0$でcoherent 状態ではなくなっていることが示せる．しかし，絶対零度系に対しては

$$a_p(t)\ |\alpha_p,\ \alpha_p)_p = \alpha_p\mathrm{e}^{-\kappa_p t_1}\mathrm{e}^{-i\omega_p t}\mathrm{e}^{-i\sqrt{F}(\hat{n}_s/2+N_s)}\ |\alpha_p,\ \alpha_p)_p, \tag{47}$$

であり，媒質入射前にあったcoherent 状態が，媒質出射後にも保たれることがわかる．ただし，固有値の絶対値と位相が変化する．同様に，signal 光についても絶対零度系に対しては，coherent 状態が保たれることが示せる．

$\langle\cdots\rangle_{sp}$を(45)についての期待値を表すことにし，signal光の光子数の期待値，分散を求めると，

$$\langle\check{n}_s(t)\rangle_{sp} = |\alpha_s|^2 \mathrm{e}^{-2\kappa_s(t-t')} + \bar{n}_s(t), \tag{48}$$

$$\begin{aligned}\langle(\Delta\check{n}_s(t))^2\rangle_{sp} &= |\alpha_s|^2 \mathrm{e}^{-2\kappa_s(t-t')} + 2\bar{n}_s(t)|\alpha_s|^2 \mathrm{e}^{-2\kappa_s(t-t')} \\ &\quad + \bar{n}_s(t)\left(\bar{n}_s(t)+1\right),\end{aligned} \tag{49}$$

を得る．ただし，これらの式は，probe系の任意の状態に対して成り立つ．また，光子数の期待値とその分散は，相互作用のない場合（Kerr効果のない場合）の期待値(25)，分散(26)と一致する．

以上より，絶対零度近似では散逸的Kerr媒質は，その前後で光の固有状態を変えないことがわかる．また，被測定量$\check{n}_s(t)$はc-数のレベルでは散逸的Kerr媒質の影響を受けないこと，さらに，probe光$a_p(t)$の位相から，$\check{n}_s$の情報が取り出せることが示せた．

5　散逸的Kerr媒質によるQND測定

以下では，probe光の位相からsignal光の光子数を読みとる部分，つまり，実験装置系について考察する[5]．

5.1　実験配置

図1に，実験装置系の配置図を示す．配置図にあるM1,M2の鏡の反射率は1である．signal

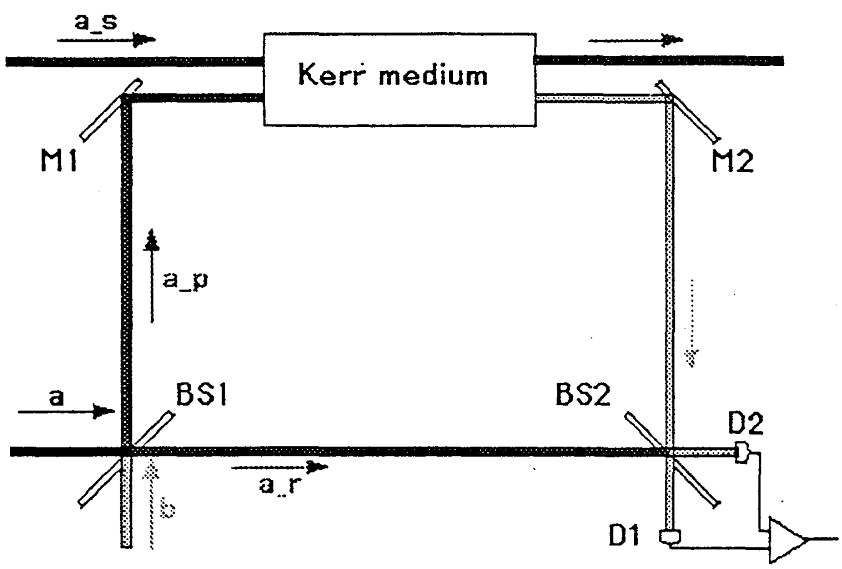

図1: 井元らが提案した測定装置図

光a_sは，図の左側から光Kerr媒質に入射し，右側に抜ける．一方，probe laser光aはビームス

プリッター1（以下，BS1）で，光路1,光路2に分けられる．光路1のprobe光a_pは，M1,光Kerr媒質，M2の順に通過した後，ビームスプリッター2（以下，BS2）において光路2のreference光a_rと合流する．全系は，probe laser光に対して，干渉計になっていて，光路1,光路2の位相差を測定できる．実際には，まず，光電効果を用いる光検出器で，probe光とreference光を電流Iに変換する．電流Iから，位相差を測ることができ，その結果signalの光子数を読み出すのである．

5.2 ビームスプリッター

干渉計に設置されたビームスプリッターについて考察する．まず，BS1の周辺を考えることにする．probe laser系の消滅演算子をaとすると，BS1は反射率R（透過率$1-R$）で，aをprobe光a_pとreference光a_rに分離する．その際，BS1の空いたポートから真空状態のquantum noise bが混入する．BS1から出力されるprobe光a_pとreference光a_rは，probe laser aとquantum noise bから次のユニタリー変換によって表わすことができる．

$$a_p = \sqrt{R}\, a + \sqrt{1-R}\, b, \qquad a_r = -\sqrt{1-R}\, a + \sqrt{R}\, b. \tag{50}$$

この入出力関係は交換関係を保存し，エネルギー保存則（入射光子数の和は出射光子数の和）を満たす．

BS1に入射するprobe laser入力系aに対しては，正準交換関係

$$[a, a^\dagger] = 1, \qquad [\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger] = 1, \tag{51}$$

が成り立つ．また，その状態はcoherent状態であるとする．

$$|\alpha_a,\ \alpha_a)_a, \qquad \alpha_a = |\alpha_a| e^{i\theta_a}, \tag{52}$$

ただし，

$$a|\beta_a,\ \gamma_a)_a = \beta_a|\beta_a,\ \gamma_a)_a, \quad \tilde{a}|\beta_a,\ \gamma_a)_a = \gamma_a^*|\beta_a,\ \gamma_a)_a. \tag{53}$$

である．

BS1の空いたポートから混入するquantum noise系bに対しては，正準交換関係

$$[b, b^\dagger] = 1, \qquad [\tilde{b}, \tilde{b}^\dagger] = 1, \tag{54}$$

が成り立つ．また，その状態は絶対零度の真空状態

$$|0,\ 0)_b, \tag{55}$$

であるとする．NETFDでは，number状態を次のように定義する．

$$b^\dagger b|m,\ n)_b = m|m,\ n)_b, \quad \tilde{b}^\dagger \tilde{b}|m,\ n)_b = n|m,\ n)_b. \tag{56}$$

次にBS2の周辺を考えることにする．BS2で，Kerr媒質を通過した後のprobe光a_pとreference光a_rとが合流する．このBS2は，反射率 : 透過率 = 1 : 1の半透鏡である．BS2通過後，下

向きに進む光をf，右向きに進む光をgとする．f，gはそれぞれ光検出器D_1，D_2で検出され，その光子は電流に変換される．それら電流の差を実際の測定量（電流I）として検出する．BS2から出力されるfとgは，probe光a_pとreference光a_rから次のユニタリー変換によって表わすことができる．

$$f = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a_r - a_p\right), \quad g = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a_r + a_p\right). \tag{57}$$

光検出器D_1での様子を考察する．光検出器は，その原理に光電効果を用いるものとし，理想的に光子1個が入射すると電子1個を発生するものとする（変換効率は1である）．検出時間τの間に，光検出器D_1に入射する光子数は$f^\dagger f$なので，発生する電流は，$(e/\tau)f^\dagger f$である．ただし，eは電子の電荷とした．光検出器D_2についても全く同じ装置を考えると，発生する電流は，$(e/\tau)g^\dagger g$である．測定される電流Iは，二つの光検出器からの電流の差が現れるように制御する．測定される電流の演算子は

$$I = \frac{e}{\tau}\left(f^\dagger f - g^\dagger g\right). \tag{58}$$

と表すことができる．

5.3 電流演算子

BS2通過後の光はそれぞれ光検出器により光電子に変換され，それらの差が電流Iとして測定される．ここでは，その電流演算子Iを実際に求めることにする．

測定装置系を組み入れて考えた場合，光に対する全系のhat-Hamiltonianは

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \hat{H}_s + \hat{H}_p + \hat{H}_I + \hat{H}_r \\ &= \hat{H}_d + \hat{H}_r, \end{aligned} \tag{59}$$

で与えられる．ただし，$\hat{H}_d$は(28) で与えたhat-Hamiltonianであり，

$$\hat{H}_r = \omega_p\left(a_r^\dagger a_r - \tilde{a}_r^\dagger \tilde{a}_r\right), \tag{60}$$

である．ここで，reference光はエネルギー散逸を受けない，もしくは，散逸の影響はprobe光に比べて無視できる程度であるとした．reference光について時間発展を解くと，

$$a_r(t) = a_r \mathrm{e}^{-i(\omega_p t + \pi/2)}. \tag{61}$$

を得る．ただし，干渉系の配置を調節して位相を$\pi/2$だけずらした．

電流演算子の定義式(58)に(39),(40),(57),(61)を代入すると，

$$\begin{aligned} I &= \frac{e}{\tau}\left\{f^\dagger(t)f(t) - g^\dagger(t)g(t)\right\} \\ &= -\frac{e}{\tau}\left\{a_r^\dagger(t)a_p(t) + a_p^\dagger(t)a_r(t)\right\} \\ &= -\frac{ie}{2\tau}\left\{\left(\mathrm{e}^{\kappa_p\Gamma_s t_1} + \mathrm{e}^{-\kappa_p\Gamma_s t_1}\right)\left(\mathrm{e}^{-i\sqrt{F}N_s}a_p a_r^\dagger - \mathrm{e}^{i\sqrt{F}N_s}a_p^\dagger a_r\right)\right. \end{aligned}$$

$$-\Gamma_s^{-1} f_s \left(\mathrm{e}^{\kappa_p \Gamma_s t_1} - \mathrm{e}^{-\kappa_p \Gamma_s t_1}\right)\left(\mathrm{e}^{-i\sqrt{F}N_s} a_p a_r^\dagger + \mathrm{e}^{i\sqrt{F}N_s} a_p^\dagger a_r\right)$$
$$+2\Gamma_s^{-1}\left(\mathrm{e}^{\kappa_p \Gamma_s t_1} - \mathrm{e}^{-\kappa_p \Gamma_s t_1}\right)\left(\mathrm{e}^{-i\sqrt{F}N_s} \bar{n}_p \tilde{a}_p^\dagger a_r^\dagger + \mathrm{e}^{i\sqrt{F}N_s}(1+\bar{n}_p)\tilde{a}_p a_r\right)\Bigg\},$$
(62)

となる．測定では，光検出器で検出した電流Iからprobe光の位相を読み取り，signal光の光子数$\check{n}_s$を測定する．

今考えている光のエネルギーは，媒質の温度に対応する熱エネルギーよりも十分大きいため，絶対零度近似が成り立つ．

$$\bar{n}_j = 0. \tag{63}$$

(62)から絶対零度近似での電流演算子Iは

$$I = \frac{ie}{\tau}\Bigg[\mathrm{e}^{\kappa_p t_1 \Gamma_{s0}} \mathrm{e}^{i\sqrt{F}N_{s0}} a_p^\dagger a_r - \mathrm{e}^{-\kappa_p t_1 \Gamma_{s0}} \mathrm{e}^{-i\sqrt{F}N_{s0}} a_p a_r^\dagger$$
$$-\Gamma_{s0}^{-1}\left(\mathrm{e}^{\kappa_p t_1 \Gamma_{s0}} - \mathrm{e}^{-\kappa_p t_1 \Gamma_{s0}}\right)\mathrm{e}^{i\sqrt{F}N_{s0}} \tilde{a}_p a_r\Bigg], \tag{64}$$

である．ただし，

$$\begin{aligned} N_s &= \frac{1}{2t_1}\int_{t'}^{t'+t_1} dt \left[\check{n}_s - \Gamma_{P0}^{-1}\left(1-\mathrm{e}^{-2\kappa_s \Gamma_{p0} t}\right)\tilde{a}_s a_s\right] \\ &\qquad + \frac{1}{2t_1}\int_{t'}^{t'+t_1} dt \left[\tilde{\check{n}}_s - \tilde{\Gamma}_{P0}^{-1}\left(1-\mathrm{e}^{-2\kappa_s \Gamma_{p0} t}\right)\tilde{a}_s a_s\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(\check{n}_s + \tilde{\check{n}}_s\right) + W_p \tilde{a}_s a_s, \end{aligned} \tag{65}$$

$$W_p = \frac{1 - 2\kappa_s t_1 \Gamma_{p0} - \mathrm{e}^{-2\kappa_s t_1 \Gamma_{p0}}}{2\kappa_s t_1 \Gamma_{p0}^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2\kappa_s t_1)^{k+1}}{(k+2)!}\Gamma_{p0}^k, \tag{66}$$

$$\Gamma_{s0} = 1 + i\frac{\sqrt{F}}{2\kappa_p t_1}\hat{n}_s, \tag{67}$$

$$\Gamma_{p0} = 1 + i\frac{\sqrt{F}}{2\kappa_s t_1}\hat{n}_p. \tag{68}$$

とおいた．

Kerr効果は十分弱い

$$\sqrt{F}\langle \check{n}_s \rangle_s \ll 1. \tag{69}$$

と仮定して，全系に対する期待値を$\langle \cdots \rangle$で表すと，電流演算子Iの期待値は，

$$\langle I \rangle = 2\frac{e}{\tau}\mathrm{e}^{-\kappa_p t_1}\sqrt{R(1-R)}\langle \check{n}_a \rangle_a \sqrt{F}\eta \langle \check{n}_s \rangle_s, \tag{70}$$

ただし，

$$\eta = \frac{1 - \mathrm{e}^{-2\kappa_s t_1}}{2\kappa_s t_1}, \tag{71}$$

である．一方，Kerr 媒質中 $(t' \le t \le t'+t_1)$ のsignalの光子数(35)で絶対零度近似をとると，

$$\check{n}_s(t) = \check{n}_s - \frac{1-\mathrm{e}^{-2\kappa_s\Gamma_{p0}(t-t')}}{\Gamma_{p0}}\tilde{a}_s a_s, \tag{72}$$

を得る．期待値をとると

$$\langle \check{n}_s(t)\rangle = \mathrm{e}^{-2\kappa_s(t-t')}\langle \check{n}_s\rangle_s. \tag{73}$$

である．

(70)と(73)から，測定値として得られる電流と，被測定量のsignal光子数との関係が得られる．

$$\langle \check{n}_s(t)\rangle = \nu_t \langle I\rangle, \tag{74}$$

scaling factor ν_tは,

$$\nu_t = \frac{\mathrm{e}^{-2\kappa_s(t-t')}\mathrm{e}^{\kappa_p t_1}}{\eta}\cdot\frac{\tau}{e}\frac{1}{2\sqrt{R(1-R)}\sqrt{F}\ \langle \check{n}_a\rangle_a}, \tag{75}$$

であり，既知の定数で表されている．(74)から，実験により電流の測定値 $\langle I\rangle$ を得ると，Kerr 媒質入射時と出射時の間の任意の時刻でのsignalの光子数 $\langle \check{n}_s(t)\rangle$ がわかることが結論づけられる．

また，電流演算子の分散を求めると，

$$\langle(\Delta I)^2\rangle = \nu_{t'}^{-2}\eta^{-2}\left(\frac{R+(1-R)\mathrm{e}^{2\kappa_p t_1}}{4R(1-R)F\langle \check{n}_a\rangle_a} + (w+\eta)\langle \check{n}_s\rangle_s\right), \tag{76}$$

ただし，

$$\eta = \frac{1-\mathrm{e}^{-2\kappa_s t_1}}{2\kappa_s t_1}, \tag{77}$$

$$w = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k+1}{(k+3)!}(-2\kappa_s t_1)^{k+1}, \tag{78}$$

を得る．これから，測定値である電流の分散と，被測定量のsignal光子数の分散との関係を求めると

$$\begin{aligned} &\nu_{t'}^2\langle(\Delta I)^2\rangle - \langle(\Delta \check{n}_s(t))^2\rangle \\ =\ &\eta^{-2}\left(\frac{R+(1-R)\mathrm{e}^{2\kappa_p t_1}}{4R(1-R)F\ \langle \check{n}_a\rangle_a} + \left(w+\eta(1-\eta\mathrm{e}^{-2\kappa_s(t-t')})\right)\langle \check{n}_s\rangle_s\right), \end{aligned} \tag{79}$$

である．(79)の右辺は，測定値の電流からsignal光子数を読み取る際の測定精度を表す．また，この関係式から，電流の分散 $\langle(\Delta I)^2\rangle$ を測定すれば，Kerr 媒質入射時と出射時の間の任意の時刻でのsignalの光子数の分散 $\langle(\Delta \check{n}_s(t))^2\rangle$ が，ある測定精度でわかる．媒質中に散逸がない場合 $(\kappa_s = \kappa_p = 0)$ の関係式を表すと，測定精度は，

$$\frac{\tau^2}{e^2}\frac{\langle(\Delta I)^2\rangle}{4R(1-R)F\langle \check{n}_a\rangle_a^2} - \langle(\Delta \check{n}_s(t))^2\rangle = \frac{1}{4R(1-R)F\ \langle \check{n}_a\rangle_a}. \tag{80}$$

である．これから，媒質中に散逸がない場合は，probe laserの光子数を十分大きく取れば原理的には誤差は0にすることができることがわかる．

5.4 測定精度の解析

ここでは，例として，Kerr 媒質通過時$t = t' + t_1$の signal の光子数$\check{n}_s^{out} (\equiv \check{n}_s(t' + t_1))$ の測定を考えて，その測定誤差の解析を行う．

簡単のため，BS1 での反射率を$R = 1/2$とし，signal 光と probe 光の減衰率は等しい$(\kappa_s = \kappa_p)$ものとする．このとき，(79) は，

$$\begin{aligned}&\nu_{t'}^2 \langle (\Delta \hat{I})^2 \rangle - \langle (\Delta \check{n}_s^{out})^2 \rangle \\ &= \eta^{-2} \left(\frac{R + (1-R)e^x}{4R(1-R)F \ \langle \check{n}_a \rangle_a} + \Big(w + \eta (1 - \eta e^{-x}) \Big) \ \langle \check{n}_s \rangle_s \right), \end{aligned} \tag{81}$$

$$\eta = \frac{1 - e^{-x}}{x}, \qquad w = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{(k+3)!} (-x)^{k+1}, \tag{82}$$

$$x = 2\kappa_s t_1. \tag{83}$$

である．今，媒質の長さを決めるとt_1が決定するので，xは散逸の強さを表すパラメーターと考えることができる．signal の光子数が$\langle \check{n}_s \rangle_s = 50$，Kerr 効果の強さが$F = 10^{-4}$の場合を考える．このとき，縦軸に測定誤差，横軸に$x$をとったグラフが，図2 である．グラフでは，上から順に probe laser 光子数が$\langle \check{n}_a \rangle_a = 100, 200, 500, 5000$の場合を示した．図2より，probe laser の光子数を十分大きく取れば測定誤差を小さくはできるが，散逸を考慮すると，測定誤差（読み出し誤差）を 0 にすることはできない．つまり，散逸のため測定精度に限界(散逸による量子限界) が現れる．従って，井元らが提案した測定装置では，この散逸による量子限界が現れるため，光子数の QND 測定は不可能である．

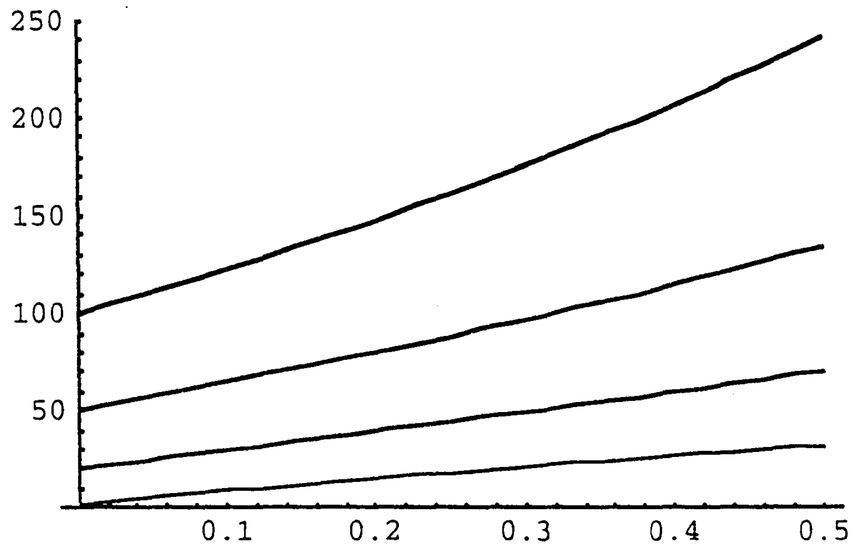

図 2: 縦軸は測定誤差，横軸はx.

参考文献

[1] V. B. Braginsky and Yu. I. Vorontsov, Sov.Phys.-Usp.**17** (1975) 644.

[2] C. M. Caves et al., Rev.Mod.Phys.**52** (1980) 341.

[3] V. B. Braginsky et al., Science **209** (1980) 547.

[4] G. J. Milburn and D. F. Walls, Phys. Rev. A **28** (1983) 2065.

[5] N. Imoto,H.A. Haus and Y. Yamamoto, Phys. Rev. A **32** (1985) 2287.

[6] N. Imoto and S. Saito, Phys. Rev. A **39** (1989) 675.

[7] T. Arimitsu and H. Umezawa, Prog. Theor. Phys. **74** (1985) 429.

[8] T. Arimitsu and H. Umezawa, Prog. Theor. Phys. **77** (1987) 32.

[9] T. Arimitsu, Condensed Matter Physics (Ukraine, Lviv) 4 (1994) 26.