切断の群論的動力学による量子力学の構成

小野俊彦[1]

東京都八王子市明神町4-2-7
秀和第一八王子レジデンス703号

プランク定数の発見以来約1世紀の間、量子論は大きな成功を納めてきたことは疑い得ない。一方で、その構造上、解釈上の問題を残しているのも事実である。第一に、その構造に於いて、演算子順序の決め方に不定性があることである [vH] 。これは、多くの標準的理論では現れないが、曲がった空間内の粒子や重力場、その他現象論的系の時間発展を量子化する際に、問題となる。第二に、その解釈において、コペンハーゲン解釈と量子力学の完全性との間の矛盾が埋まらず、理論が語るものが存在論的なものなのか、認識論的なものなのかすら定かでないことである(例えば、[BLM,Bu] を参照)。

これらの問題は、ささいなこととして無視や軽視されることが多い。それらは、解決されなくても、実験にかかる現象についての適切な計算が得られるという意味で、ささいなだけではない。量子力学の解釈における経験主義が、そしてその成功が、これらの問題から人々の目を必要以上にそらさせてきたとも考えられる。

しかし、今世紀の初め、量子力学の成立前、プランクの放射理論やアインシュタインの光電効果の理論、ボーアの原子模型などは、ニュートンに始まる古典力学に刺さった小さな刺のようにささいなものであったと伝えられている。今と昔とでは状況は全く異なるとは言え、今の量子力学のこの小さな傷は、大きな傷へと拡がる可能性を秘めていることを否めない。

筆者は、微分同相写像群の無限次元幾何学による古典動力学の研究を経て [O1]、この過程で学んだ方法を用いて、古典論と対応する量子論の関係を調べ、これらの構造的、概念的な問題について研究をしてきた [O2]。そして、ここに、古典力学及び量子力学の基礎と目す新たな力学の概略を表し、それを支える詳細について予告をする。このようなことを言うと、正統的な学者の懐疑と冷笑の対象になるかもしれないが、前提としているものの検討は、その時代、時代ごとに、新しい知識のもとに繰り返し行わなければならない。そして、歴史はその有為性を教えている。

この新たな力学は、ハミルトン力学を(修正された)アインシュタイン-ドブローイの関係式を通して深め、その構造に調和した確率解釈を与えるものであるので、決して奇抜なものではない。ただし、古典力学や量子力学の自由度より無限大だけ大きい自由度をもつので、この無限大が如何にして圧縮(古典力学の場合は簡約)されるかに数学的なテクニックを伴う。残念ながら、この美しい無限大の圧縮についての詳細は紙面の関係上割愛し、投稿中の論文 [O3] に譲らざるをえない。その代わり、ここでは、その基本的構成の概略を日本語でかつ数式を多く用いずに説明することができる。

量子力学の構成は人間の認識の限界に拘わっていることが多く語られてきた。実際、有名なディラクの教科書の序文にもこのことが強調されている [D] 。従って、この新たな力学は、ある意味で、形而上と形而下との境界に拘わらざるを得ない。つまり、紀元前のプラトンの思想にあるように、イデア的な実在(reality)とその経験世界への現出としての現象(actuality)との関係を見出す。そして、恐らく、ホワイトヘッドのプロセス哲学にあるような意味で、量子論、したがって古典論も、その現象に関する理論であるとする [Wh,KM]。つまり、この力学の説明するのは、粒子がおかれている直接経験されないような幾何学的な状況と、そこから現象が起こる機構である。

まず、時空(または時空上の場の空間) $\tilde{M}$ 上に無数の時計を設置する。この時計は、輪、S^1 として表されるので、S^1-ファイバー束を得る。このファイバー束の既断面を、殆ど至る所で断面となるものとして定義する。

[1]E-mail: tono@swift.phys.s.u-tokyo.ac.jp

この断面は、異なる時空点間の同時刻関係を決めるある幾何学的条件を満たすとする。 これを共時条件と呼ぶ。 実在論的な対象としての粒子(または場の値)の運動は、4 次元時空上(または、4 次元時空上の場のなす無限次元空間上)に、 時間的曲線として存在する一方で、このような共時面を伴っているとする。

このような時間的曲線に常に横断的に交わる空間的部分空間 M によって、 時空を時間-空間(時間-部分空間上の場のなす空間)に分解すると、 断面のカルタン形式の定数倍の空間、時間成分は、それぞれ運動量、ハミルトニアン(に定数を加えたもの)に対応する。

$$
\begin{aligned}
p(\eta_t) &= \frac{i\hbar}{2}\eta_t^{-1}d\eta_t, &(0.1)\\
H_t &= \frac{i\hbar}{2}\eta_t^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\eta_t \qquad (i=\sqrt{-1}). &(0.2)
\end{aligned}
$$

この関係は、アインシュタイン-ド・ブローイの関係式に対応し、相対性理論との比較に於いて、 この部分空間上に現れる断面は、異なる場所の同時刻を決めると見なせる。 この同時刻面を現在面と呼ぶ。

ここで、共時条件は次のようなエネルギー-運動量関係式となる。

$$H_t = H_t\left(x, p(\eta_t)(x)\right). \tag{0.3}$$

この関係式の可積分条件 $\left[\frac{\partial}{\partial t}, d\right]=0$ は、運動方程式(正準方程式の一方)に対応する。

$$\frac{\partial p(\eta_t)(x)}{\partial t} = -dH_t\left(x, p(\eta_t)(x)\right). \tag{0.4}$$

さらに、粒子(または場の値)は、その位置を $x_t \in M$ とすると、内部の時間発展を次の式のようにする。

$$\frac{d}{dt}\eta_t(x_t) = \left(\frac{i\hbar}{2}\right)^{-1} L\left(x_t, \frac{dx_t}{dt}\right)\eta_t(x_t). \tag{0.5}$$

ラグランジアンが内部の時間の進む速さを示すことは、 相対性理論との比較から分かる。 また、この式は、シュレディンガー方程式にも対応する。

具体的には、このラグランジアンは、例えば相対論的自由粒子の運動について、

$$L(x_t, v_t) = mc^2\sqrt{1-\left(\frac{v_t}{c}\right)^2}. \tag{0.6}$$

近似として、非相対論的自由粒子の場合は、

$$L(x_t, v_t) = mc^2 - \frac{1}{2}mv_t^2 \tag{0.7}$$

となる。場の理論の場合も、相対論的に共変な標準的ラグランジアンを考えれば良い。

力学条件 (0.5) と共時条件 (0.3) との両立条件は、

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_t}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p}\left(x_t, p(\eta_t)(x_t)\right) &(0.8)\\
\frac{dx_t}{dt}\cdot p(\eta_t) - H_t\left(x_t, p(\eta_t)(x_t)\right) &= L\left(x_t, \frac{dx_t}{dt}\right) &(0.9)
\end{aligned}
$$

となり、ルジャンドル変換(正準方程式のもう一方)を得る。そして、これが共時条件そのものを決める。 つまり、ここに、ハミルトン形式の幾何学的意味が明らかになる。

ところで、我々の経験世界は、同時面としての現在面に制限される。 粒子のS^1-ファイバーに沿った方向への運動は、現在面上への自らの現出を引き起こす。 この現出の頻度は、時計の発展を基準にしてS^1-ファイバー方向の速度に比例する。 この現出頻度分布関数を $f_t(\eta_t)$ とすると、粒子の状態は

$$\left(x_t, \eta_t(x_t)\cdot e^{if_t(\eta_t)(x_t)t}\right) \tag{0.10}$$

と表される。すなわち、粒子の現出は時間の超克と見なされる。 また、この保存則は次のように表される。

$$\frac{d}{dt} f_t(\eta_t)\,(x_t) = 0. \tag{0.11}$$

注意を要することは、この現出頻度は負値をもとり得ることである。

さらに、現出するかしないかに拘わらず、粒子は実在論的な確率分布を持っている筈である。 この存在確率は、M 上の確率測度 $\nu_t(\eta_t)$ として定義され、 その保存は次のように表される。

$$\frac{d}{dt} d\nu_t(\eta_t)\,(x_t) = 0. \tag{0.12}$$

そして、この存在確率測度 $\nu_t(\eta_t)$ と現出頻度分布関数 $f_t(\eta_t)$ との積

$$d\mu_t(\eta_t) = d\nu_t(\eta_t) \cdot f_t(\eta_t) \tag{0.13}$$

を現出確率測度と呼ぶ。ここに、測度論的確率と、頻度論的確率との関係が明らかになる。 現出確率もまた、次の保存則を満たす。

$$\frac{d}{dt} d\mu_t(\eta_t)\,(x_t) = 0. \tag{0.14}$$

現出確率は、時計の発展と逆向きの内部運動に対して、負値をも取り得る。 このことが、量子論の場合、ウィグナー関数の性質にも反映されることになり、 現出確率が常に正であれば、実際に粒子がある状態に現れる確率となる。 これが、モワイヤルの考えた確率解釈を導くことになる。

以上の関係を図にまとめると、次のように、 孤立性と連続性の相補的関係がまとめられる。

孤立性(粒子性/ラグランジアン)		連続性(波動性/ハミルトニアン)
実在(Rearity)	$\tilde{M}$	共時(Syncronization)
現出(Actuarity)	M	同時(Simulteneity)

両立条件(相補性/ルジャンドル変換)

これは、 量子力学に於ける粒子性と波動性の相補的関係と対応するが、 両方とも同時に存在するような関係であるため、異なるものである。 さらに、古典力学に於いては、 この関係は、ラグランジ的記述とハミルトン的記述の両立条件としての ルジャンドル変換に対応している。

これまでの議論から得られる方程式をまとめると以下のようになる。

$$\mathcal{L}_{v_t}\, d\mu_t(\eta_t)(x) \;=\; 0 \tag{0.15}$$

$$\mathcal{L}_{v_t}\, \eta_t(x) \;=\; \left(\frac{i\hbar}{2}\right)^{-1} L_t\left(x, v_t(x)\right)\; \eta_t(x), \tag{0.16}$$

ただし、$v_t(x) = \frac{\partial H}{\partial p}\left(x, p(\eta_t)(x)\right)$ である。 形式的にはこの方程式から出発することになり、この背景の意味はとらなくても数学的には差し支えない。

支配方程式 (0.15) と (0.16) の群論的性質を明らかにする為に、微分同相写像群と関数空間のなす半直積群 $S(M)$ を導入する [MRW]。

$$S(M) = Diff(M) \times C^{\infty}(M). \tag{0.17}$$

この群の要素 $\Phi = (\phi, \theta) \in S(M)$ は、 切断 $e^{i\zeta} \in \Gamma[E(M)]$ に次のように作用する。

$$\Phi \cdot e^{i\zeta(x)} = e^{i\{\phi^* \zeta(x) + \theta(x)\}}. \tag{0.18}$$

この群 (の無限直和) に対して、基礎方程式 (0.15) と (0.15) は次のようなリー・ポアソン方程式となる。

$$\frac{\partial \mathcal{J}_t}{\partial t} = ad^*_{\hat{H}_t} \mathcal{J}_t. \tag{0.19}$$

ここの記号の詳細は、本論文 [O3] を参照されたい。

さて、古典論と量子論との関係は、今の枠組では、次のように関数空間の違いとして表される。

$$C_{cl}\left(\Gamma\left[E\left(M\right)\right]\right) \;=\; \left\{p^*F \;\middle|\; p^*F\left(\eta\right)\left(x\right) = F\left(x, p(\eta)(x)\right)\;\right\} \tag{0.20}$$

$$C_q\;\left(\Gamma\left[E\left(M\right)\right]\right) \;=\; \left\{p^*F \;\middle|\; p^*F\left(\eta\right)\left(x\right) = F\left(x, p(\eta)(x), ..., D^n p(\eta)(x), ...\right)\right\}, \tag{0.21}$$

つまり、量子論は「運動量の微分」も含む。この点で、量子力学は古典力学を内包する。

$$C_{cl}\left(\Gamma\left[E\left(M\right)\right]\right) \subset C_q\left(\Gamma\left[E\left(M\right)\right]\right). \tag{0.22}$$

一方で、上の関数空間に相対な空間、つまり、現出確率の空間は、丁度逆の包含関係を満たす。

$$C_{cl}\left(\Gamma\left(E(M)\right)\right)^* \supset C_q\left(\Gamma\left(E(M)\right)\right)^*. \tag{0.23}$$

これにより、量子論において、束縛状態で離散的な状態のみが許されることの直感的理解ができる。

リー・ポアソン方程式 (0.19) に対し、 S^1-ファイバー束の断面のなす集合を代表点近傍の局所的な運動量によって分類し、 無限の自由度を圧縮すると、量子力学が得られる。 また、古典力学は、波数との積を有限に保ちながらプランク定数をゼロにする極限をとった後、 同様の分類を通して、無限の自由度を圧縮することで得られる。 この詳細も本論文 [O3] を参照されたい。

今の状況を絵にまとめると次のようになる。

$$\begin{tikzcd}
C_{cl}\left(\Gamma\right)^*. \arrow[r, leftrightarrow, "\text{双対}"] \arrow[d, shift left, "\text{量子化}"] & C_{cl}\left(\Gamma\right) \arrow[d, shift left, "\text{量子化}"] \\
C_q\left(\Gamma\right)^* \arrow[u, shift left, "\text{古典極限}"] \arrow[r, leftrightarrow, "\text{双対}"] & C_q\left(\Gamma\right) \arrow[u, shift left, "\text{古典極限}"]
\end{tikzcd}$$

以上で、およその概略を述べたが、この理論は、正準量子化はもちろん、様々な量子化の特徴を受け継いでいる。たとえば、登場する微分同相写像群の半直積群は、コスタント・ソリアウに始まる幾何学的量子化 [S,K,RR] のものと類似しており、ウィグナー関数が波動関数より中心的な役割を果たすのは、モワイヤルの変形量子化も同様である [Wi,M]。また、無限自由度の積分は、経路積分との関係を思わせる。

一方、量子論の解釈について、一つの答えが得られる。粒子の位置(場の値)とみなされるものは実際に粒子が現出する位置に対応するが、運動量とみなされるものは、もはや粒子の点描像の属性としての運動量ではなく、実際の運動量場である同時面の分類の指標に過ぎない。このような解釈は様態的(modal)であると呼ばれ [F]、この点では、ボームの理論にも似ている [Bo,H]。しかし、この新しい見解では、現出確率が負になり得ることがベルの不等式の破れの原因となる [EPR,Be]。また、測定器は古典系として記述されることを許され、さらに連続無限積のヒルベルト空間でも表されることを許される。したがって、町田-並木に始まる多ヒルベルト空間理論によって波束の収縮は示され [MN,A,NP]、コペンハーゲン解釈が成立する。

それにしても、もし、巨視的な物体の単純な運動でさえ、空間的に拡がった無限の可能性をもった連続体を伴い、それを基に現出を繰り返しながら位置を変えていくとしたら、自然がこのような複雑な性質を持っているとしたら、真に驚くべきことである。しかし、このような方法によって、相対性理論が概念的不都合なく量子力学に調和する。そして、この新しい時間概念によると、複数の物体は、以前のようにそれぞれ個人的な時間発展をするのではなく、その全てが無矛盾に同じ「現在」を共有できる。

以上、構造と解釈に関するより詳細な議論は本論文を参照頂きたい [O3]。

文献

[vH] van Hove, *Mem. Acad. Roy. Belg.* **26** (1951), 61.
[BLM] P. Busch, P.J. Lahti and P. Mittelstaedt, "The Quantum Theory of Measurement," 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1994.
[Bu] J. Bub, "Interpreting the Quantum World," Cambridge University Press, 1997.
[O1] T. Ono, *Physica D* **81** (1995) 207-220./ *J. Phys. A: Math. Gen.* **28** (1995) 1737./ *JPSJ* **67** (1998) 3021-3025.
[O2] T. Ono, *Phys. Lett. A* **230** (1997), 253.
[O3] T. Ono, *Foundation of Physics* (1999), submitted.
[D] P.A.M. Dirac, "The Principle of Quantum Mechanics," fourth edition, Oxford University Press, London, 1958.
[Wh] A.N. Whitehead, "Process and Reality," ed. D.R. Griffin and D.W. Sherburne The Free Press, New York and London, 1979.
[KM] J. Klose, 23-42/ S. Malin 43-52 *in* "Time, Temporality, Now," ed. H. Atmanspacher and E. Ruhnau, Springer-Verlag, Berlin, 1997.
[MRW] J. Marsden, T. Ratiu and A. Weinstein, *Trans. Am. Math. Soc.* **281** (1984), 147.
[S] J. M. Soriau, "Structures des Systèmmes Dynamiques," Dunod, Paris, 1969.
[K] B. Kostant, *in* "Lectures in Modern Analysis and Applications III," Lecture Notes in Mathematics 170, Springer, Berlin, 1970.
[RR] P.L. Robinson and J.H. Rawnsley, "The Metaplectic Representation, MP^C Structures and Geometric Quantization," AMS Memoir **410**, Am. Math. Soc., Providence, RI, 1989.
[Wi] E. Wigner, *Phys. Rev.* **40** (1932), 749.
[M] J.E. Moyal, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **45** (1949), 99.
[F] B. van Fraassen, *in* "Contemporary Research in the Foundations and Philosophy of Quantum Theory," ed. C.A. Hooker, Reidel, Dordrecht, 1973./ "Quantum Mechanics: An Empiricist

View," Oxford University Press, 1991.
[Bo] D. Bohm, *Phys. Rev.* **85** (1952), 166/180.
[H] P.R. Holland, "The Quantum Theory of Motion," Cambridge University Press, 1993.
[MN] S. Machida and M. Namiki, *Prog. Theor. Phys.* **63** (1980), 1457; *Prog. Theor. Phys.* **63** (1980), 1833.
[A] H. Araki, *Prog. Theor. Phys.* **64** (1980), 719.
[NP] M. Namiki and S. Pascazio, "The Quantum Theory of Measurement Based on the Many-Hilbert-Space Approach," *Phys. Rep.* **232** (1993) 301-414.
[EPR] A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen, Phys. Rev. **47** (1935) 777.
[Be] J. S. Bell, Physics **1** (1964) 195./ "Speakable and unspeakable in quantum mechanics," Cambridge University Press, 1987.