

量子系のスペクトル揺動分布と古典系の可積分性・カオス性

成蹊大工 富谷光良、埼玉大理 吉永尚孝

§1. 導入

古典カオス系の研究は Poincaré までさかのぼるならば約一世紀の歴史があるが、量子論の観点からみたカオス研究 “Quantum Chaology” は、それと比べるとやはり新しい分野といえる。古典カオス系をいかにして量子化するかを考えること自体に解決すべきことが少なくない。それは Einstein の有名な議論を持ち出すまでもなく、少なくとも EBK 量子化法ではできないのは明白であり、Schrödinger 方程式も解析的には普通解けない。経路積分法によれば形式的には量子化することはできても、何かある物理量を評価しようとするれば半古典近似等が必要となる。すると、今度は周期軌道の探索や Planck 定数に関しての高次項の処理等の必要が生じ、これも簡単ではない。

しかし、年々高速化する計算機によって、ますます強力となる数値的手法によれば、そのような解析的・原理的問題は差し置いても、固有エネルギーや必要なら波動関数も数値的に得ることが可能となる。

またその一方で、実際に実験から得られるデータの多くは、まずエネルギー準位であり、波動関数のような情報はなかなか得られない。多くの場合その状態のスピンやパリティすらそう簡単にはわからない。

本稿ではまずこのような、数値的に（あるいは実験的に）得られた情報から、その背後にある系の古典的性質を探る立場をとることとする。そのためにはやはりまず十分に古典力学的な挙動が研究された系を挙げ、その量子力学的に対応する系を研究することが必要である。古典的には可積分あるいはカオス的である系を量子化し、その量子力学特有の情報源である固有エネルギーや波動関数等には何が起こるかを研究するわけである。その方針に従ってここでは時に固有エネルギーから得られる情報に着目し、特にスペクトル揺動分布について述べることとする。

§2. スペクトルモード揺動分布

2-1. 準位間隔分布

エネルギー準位から得られる情報の多くは一つ一つの準位にとらわれるのではなく、準位の集団をなす統計に着目するとよい。これには様々なものが考案されているが、最も良く知られているのは準位間隔分布である^[1]。この分布は、可積分系では Poisson 分布に、カオス系では Wigner 分布になるとされている。各々の分布の確率分布関数は Poisson 分布： $P(s) = \exp(-s)$ 、Wigner 分布： $P(s) = \pi/2 s \exp(-4s^2/\pi)$ と表される。

しかし、これには例外が知られている。双曲面ビリヤードの場合に、形が全く同じであるのに一部の境界条件を Neumann 条件とすると準位間隔分布が Poisson 分布的になってしまう場合がある^[2,3,4]。このビリヤードはいたるところ定負曲率であるので、いつでも古典的にはカオスになるとされる。（もちろん形状を変えれば、境界の形のためにカオス性が減じられることはある^[5]。）

そこで F. Steiner 等は準位間隔分布に代わって、よりカオス性を忠実に反映する量子力学における指標として、スペクトルモード揺動分布を導入した。そしてこの分布は対応する古典系がカオス的な場合には Gauss 分布に、可積分系の場合には Poisson 分布になることを予想した。さらに、

数値的に双曲面ビリヤードの場合に確かに境界条件によらず、予想通りになることを示した^[8,9]。

我々は、古典系としてカオス的であることが証明されているスタジアムビリヤードの場合にも Gauss 的になることを数値的に示した。(§3、また[6]を参照) このようなビリヤード系では、双曲面ビリヤードと違いカオス性はその境界の形によっている。さらに、F. Steiner 等は様々なカオス的・可積分的ビリヤードについて横断的に調べその予想の正しいことを立証している^[7]。

なお、この準位間隔分布の境界依存性は双曲面ビリヤードの場合にはほとんど唯一の例であった。しかし近年、菱形ビリヤードについても 1 万個以上の固有値を計算して統計を詳細にとることにより、より小さな差異ではあるが準位間隔分布の境界依存性が確認された^[9]。

2.2. スペクトルモード揺動分布

スペクトルモード揺動分布 (spectral mode fluctuation distribution : 以降、モード揺動分布と記す) とは、スペクトル階段関数 $N(E)$ の平均的挙動 $\langle N(E) \rangle$ の周りの揺動 $N_{fl}(E)$ の分布のことである。それら三変数には、以下のような関係がある。

$$N(E) = \langle N(E) \rangle + N_{fl}(E) \quad (1)$$

記号 $\langle \dots \rangle$ はエネルギー範囲 $\Delta E : \langle d \rangle^{-1} \ll \Delta E \ll E$ についての平均をとることを意味する。この ΔE は今考えているエネルギー E よりは充分小さく、また平均的準位間隔 $\langle d \rangle^{-1}$ よりは、充分大きくなければならない。ここで $\langle d \rangle$ は平均準位密度である。モード揺動は半古典近似を用いて評価すると

$$N_{fl}(E) = \frac{1}{\hbar^\mu} \sum_j \frac{A_j(E)}{T_j(E)} \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} S_j(E) \right\} \quad \begin{array}{l} \mu = \frac{1}{2}(n-1) \text{ (chaotic; } n\text{-dim)} \\ 0 \text{ (integrable)} \end{array} \quad (2)$$

となる^[9]。ここで、 $A_j(E)$ は周期軌道 j の振幅、 $S_j(E)$ はその作用、 $T_j(E)$ はその周期を表わす。

モード揺動分布に密接な関わりがある量子準位統計の一種に、スペクトル硬度がある^[10]。これは以下のように定義される。

$$\Delta_3(L, E) = \left\langle \min_{(A,B)} \frac{\langle d(E) \rangle}{L} \int_{\frac{2\langle d \rangle}{L}}^{\frac{L}{2\langle d \rangle}} [N(E+\varepsilon) - (A+B\varepsilon)]^2 d\varepsilon \right\rangle \quad (3)$$

これは少なくともビリヤード系の場合には (そして、後に述べるようなポテンシャル系の場合にも)、

$$L > L_{\max} \equiv \frac{\hbar \langle d \rangle}{T_{\min}} \quad T_{\min} : \text{最短周期}$$

の条件を満たすように充分に L を大きくすると、スペクトル硬度は飽和値

$$\Delta_\infty(E) = \left\langle \frac{\langle d(E) \rangle}{L} \int_{\frac{2\langle d \rangle}{L}}^{\frac{L}{2\langle d \rangle}} N_{fl}(E+\varepsilon)^2 d\varepsilon \right\rangle \quad (4)$$

を持ち、これはモード揺動の 2 次のモーメントに他ならない。

このスペクトル硬度で、モード揺動を正規化した変数

$$W(E) = \frac{N_{fl}(E)}{\sqrt{\Delta_{\infty}(E)}} \quad (5)$$

の分布としてモード揺動分布は定義される。したがって定義より必ず平均値=0、分散=1の分布となる。この分布がカオス系の場合は必ず Gauss 分布になるというのが F.Steiner 等の予想であった^[3,4]。そして、乱雑行列理論の場合での $W(E)$ にあたる変数については、これは証明されている^[11]。一方、可積分系の場合は Gauss 分布から歪んだ形になると予想した^[3,4,12]。

§3. スタジアムビリヤードの場合^[6,7]

スタジアムビリヤードには一種類のみだが、バウンシングボール軌道と呼ばれる一族の軌道があり、それがモード揺動分布に影響を及ぼす。平均的挙動の周りの揺動は、少なくとも半古典近似的立場ではさらに

$$N_{fl}(E) = N_{fl}^{iso}(E) + N_{fl}^{bb}(E)$$

のように本来の不安定孤立周期軌道による寄与とバウンシングボール軌道族による寄与とに分離することができる^[10,13,14,15]。

$$N_{fl}^{bb}(E) = \sum_w \frac{A_w(E)}{T_w(E)} \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S_w(E)\right\} \quad (w: \text{不変トーラスへの巻付き数}) \quad (6)$$

$$N_{fl}^{bb}(E) = \frac{a}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{\pi r}} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{3}{2}} \cos\left(2k\pi n - \frac{3\pi}{4}\right), \quad (7)$$

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad m \text{ はスタジアム上の点粒子の質量}$$

これは一方で Poisson の公式により

$$N_{fl}^{bb}(k^2) = \frac{a}{\pi} \sum_{w=1}^{\infty} \sqrt{k^2 - k_w^2} \Theta(k - k_w) - \frac{rak^2}{4\pi} + \frac{ak}{2\pi}, \quad k_w = \frac{\pi w}{r}. \quad (8)$$

となる^[13]。するとスペクトル硬度もやはり不安定孤立周期軌道の寄与 Δ_{∞}^{iso} とバウンシングボール軌道族の寄与 Δ_{∞}^{bb} に分けられ： $\Delta_{\infty} \cong \Delta_{\infty}^{iso} + \Delta_{\infty}^{bb}$ となる。それらは各々

$$\Delta_{\infty}^{iso}(E) = \frac{\langle d \rangle}{L} \int_{\frac{2\langle d \rangle}{L}}^{\frac{L}{2\langle d \rangle}} N_{fl}^{iso}(E + \varepsilon)^2 d\varepsilon \cong \frac{1}{\pi^2} \ln \sqrt{E} + \frac{1}{\pi^2} \ln \left(\frac{4\pi e \langle d \rangle}{\ell_0} \right) - \frac{1}{8} \quad (9)$$

ℓ_0 : 最短周期軌道長

$$\Delta_{\infty}^{bb}(E) = \frac{\langle d \rangle}{L} \int_{\frac{2\langle d \rangle}{L}}^{\frac{L}{2\langle d \rangle}} N_{fl}^{bb}(E + \varepsilon)^2 d\varepsilon \cong \frac{a^2}{8\pi^3 r} \zeta(3) \sqrt{E}. \quad (10)$$

となる^[10]。

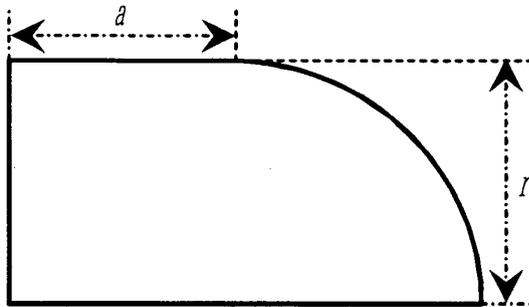


図1 1/4 スタジアムビリヤード: a は長方形部分の横幅を r は 1/4 円部分の半径を表す。

数値計算には、ここでは無次元単位系:

$2m = \hbar = 1$ を適用したので、 $E = k^2$ となる。こ

のビリヤードの持つ2つの離散対称軸に対して、それぞれパリティ奇の波動関数のみを計算した。これは図1のような1/4スタジアムビリヤードで、周囲の境界は全て Dirichlet 境界条件として計算したことに等価である、我々は、基底状態から 3173 個の固有値をもれなく計算した。この固有値から直にモード揺動分布を計算すると、図2(a)のように Gauss 分布から歪んだ分布となる。この歪み方は正方形ビリヤードの場合と、よく似ている^[12]。また、モード揺動分布の計算された可積分系 (ビリヤード) の多くが、このような形状の分布となっている^[7]。

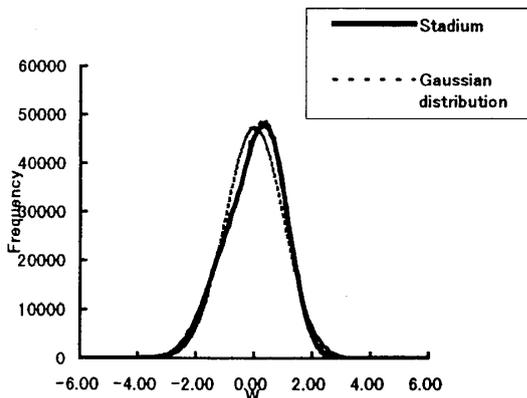


図2(a) スタジアムビリヤードのモード揺動分布

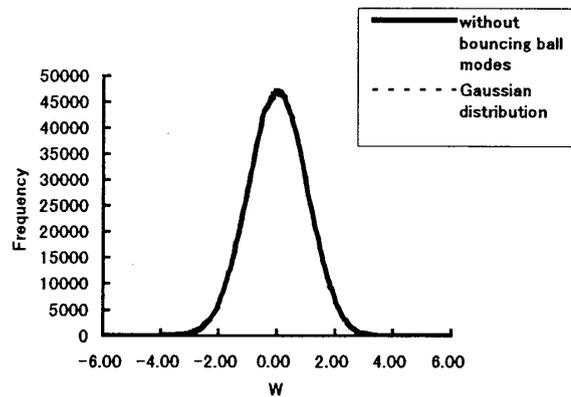


図2(b) スタジアムビリヤードのモード揺動分布: バウンシングボール軌道族の寄与を除いた場合

Gauss 分布との一致の度合を測るために、ここでは分布の歪度を計算することにする。歪度をみるには、モード揺動の三次モーメント

$$M_3(L, E) = \left\langle \frac{\langle d \rangle}{L} \int_{\frac{-2}{2}d}^{\frac{2}{2}d} N_{\mathcal{R}}(E + \varepsilon)^3 d\varepsilon \right\rangle \quad (11)$$

を Δ_{∞} で正規化した値 $\frac{M_3(L, E)}{\Delta_{\infty}(E)^{3/2}}$ を計算すればいい。

不安定周期軌道のみの場合、より長い軌道はより複雑に分岐していくことから、乱雑位相近似を用いると、歪度に関するすべての寄与は打ち消し合うと考えられる。したがって

$$M_3^{iso}(L, E) \cong 0$$

と期待できる。

半古典近似で評価する限り Δ_∞ と同様、やはり N_{β}^{iso} と N_{β}^{bb} の混合した項の寄与はなく、あるとすれば残りは N_{β}^{bb} の3次の寄与である。

$$M_3^{bb}(L, E) = \left\langle \frac{\langle d \rangle}{L} \int_{-\frac{L}{2(d)}}^{\frac{L}{2(d)}} N_{\beta}^{bb}(E + \varepsilon)^3 d\varepsilon \right\rangle \quad (12)$$

これは乱雑位相近似により

$$M_3^{bb}(L, E) = -\frac{3a^3}{32\pi^3\sqrt{2}} (\pi)^{-\frac{3}{2}} E^4 \sum_{n,m} \{nm(n+m)\}^{-\frac{3}{2}} \quad (13)$$

となるが、これはすでに L に依存していない。もちろん、 $M_3(L, E) \equiv M_3^{bb}(L, E)$ となるので、歪度は

$$\begin{aligned} Sk(L, E) &\equiv \frac{M_3^{bb}(L, E)}{\Delta_{bb}(E)^{3/2}} = -\frac{3}{2\zeta(3)^{3/2}} \sum_{n,m} \{nm(n+m)\}^{-\frac{3}{2}} \\ &= -0.757 \quad (a=r=1) \end{aligned} \quad (14)$$

と評価できる。数値的に固有エネルギーから直接求めた固有エネルギーより歪度を計算すると $Sk = -0.731$ ($5000 < E < 22500$) となり、上述の半古典近似の結果とのよい一致をみた。このように Sk を正規化すると E にもよらず、数値計算等で比較検討する場合に便利である。

次に、式(8)と数値的に得られた固有エネルギーを用いて、 $N_{iso}(E) = N(E) - N_{bb}(E)$ として Δ_∞^{iso} を計算すると数値的には $\Delta_\infty^{iso} = 0.100 \ln k - 0.098$ を得るが、半古典近似は $\Delta_\infty^{iso} = 0.101 \ln k - 0.108$ とほぼ一致する値を得た。そして、モード揺動分布を計算すると、非常に良く Gauss 分布と一致する (図2(b))。

§4. 非線型振動子系

4-1. 二次元非線型振動子^[16]

これまでビリヤード系以外の系についてのモード揺動は、まだ調べられていなかった。一方で、二次元の非線型振動子系は準位間隔分布とスペクトル硬度については、既によく調べられている^[17,18,19,20]。ここで非線型振動子系とは4次のポテンシャルによる振動子が結合した、ハミルトニアンが

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + 3x^4 + y^4 - \lambda(xy)^2 \quad (15)$$

となる系をさす。これは無次元単位系 $m = \hbar = 1$ を採用した量子系と考えることもできる。 $\lambda = 0$ の場合は4次のポテンシャル系の重ね合わせであり、良く知られているように可積分系である。結

合定数が $\lambda > 2\sqrt{3} \cong 3.464$ でポテンシャルが下に bounded ではなくなる。また、この結合項は系全体がスケーリング則

$$E \rightarrow a^4 E : x \rightarrow ax, y \rightarrow ay, t \rightarrow t/a$$

を保つように選んである。したがって例えば、①エネルギーが違っても幾何学的に相似な古典周期軌道が必ず存在する。②最短周期のエネルギー依存性がわかる。③位相空間の構造がエネルギーによらない。等の長所があり、半古典近似を用いて量子力学的量を評価しやすいと期待できる。また、 $\lambda = 0$ 等でエキストラな対称性が発生するという事もなく、 λ の値で系の対称性が変わることはない。しかし、一般にこのようなポテンシャル系にいえるように古典周期軌道を探すのは容易ではない。

この系については数値計算は調和振動子解の適当な重ね合わせでよく近似できるとして、ハミルトニアンを数値的に対角化する方法をとった。もちろん実際に無限次元のハミルトニアンを数値的に対角化することはできないので、基底状態から充分多くの調和振動子解を準備して対角化し、適当なエネルギーの低い方の解のみを解析に使用する^[21]。

我々は、8500~15500 次元のハミルトニアンを用いて対角化し、低エネルギー側の 3000~5000 本のみを固有値が得られたとして解析した。

可積分系とカオス系の中間的な系を扱うと、一般に準位間隔分布もその中間的形状の分布となる。そこで、Brody 分布と呼ばれるこれらの中間的分布を良く近似することの知られている分布を用いる。その確率分布関数は

$$P(s, \omega) = \Gamma\left(\frac{\omega+2}{\omega+1}\right)^{\omega+1} (\omega+1)s^\omega \exp(-\alpha s^{\omega+1})$$

と表される。ここで ω を Brody 変数と呼び、

$\omega = 0$ で Poisson 分布、 $\omega = 1$ で Wigner 分布となり、 $0 < \omega < 1$ ではその中間的な分布を表現することができる。

図 3 に、この系における Brody 変数の λ -依存性を表わす。 $0.3 < \lambda < 0.8$ 付近にプラトーが認められるが、これは古典系では $\lambda \approx 0.8$ までは last KAM が残っているため位相空間全体での混合が起こらないことと良く対応している。この時、last KAM の存在はやはり数値的にポアンカレ断面を調べることによった。

この系は $\lambda = 0.0$ では厳密に可積分系であり、また $\lambda = 2.7$ では、数値的にほぼカオス的であることがわかる。そこで $\lambda = 0.0$ の時、すなわち可積分系の場合に半古典近似によりスペクトル硬度を予想すると^[10,15]、

$$\Delta_\infty(E) = \frac{12K^3}{\pi^2 \xi^3} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{m^2 n^2 / \alpha^3 \beta^3}{\left(\frac{m^4}{\alpha^3} + \frac{n^4}{\beta^3}\right)^{7/4}} E^{3/4} \cong 0.0286 E^{3/4} \quad (16)$$

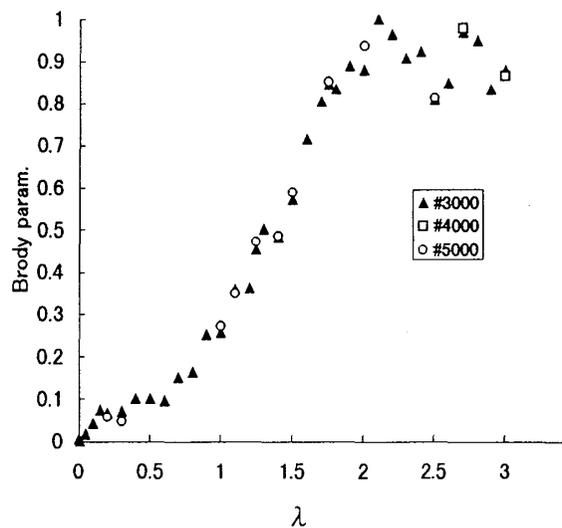


図3 λ vs. Brody 変数 (二次元)

$$\alpha = 3 \cdot \left(\frac{3\pi}{4K}\right)^{4/3}, \quad \beta = 1 \cdot \left(\frac{3\pi}{4K}\right)^{4/3}, \quad K = F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cong 1.85, \quad \xi = \frac{\Gamma(1/4)^2}{2\sqrt{\pi}}$$

また $\lambda = 2.7$ の時、つまりカオス系の場合は^[10]

$$\Delta_{\infty}(E) = \frac{\langle d \rangle}{L} \int_{-\frac{\langle d \rangle}{2L}}^{\frac{\langle d \rangle}{2L}} N_{ff}^2(E + \varepsilon) d\varepsilon \cong \frac{1}{\pi^2} \ln \left(e \frac{2\pi \langle d \rangle}{T_{\min}} \right) - \frac{1}{8} \cong 0.0760 \ln E - 0.0813 \quad (17)$$

となる。ここでスケーリング則より得られる以下の性質、最短周期 $T_{\min} \cong 1.41E^{-1/4}$ 、準位密度 $\langle d \rangle \cong 0.152E^{1/2}$ を用いている。これに対して、数値的には $\lambda = 0.0$ の時には $\Delta_{\infty}(E) = 0.0254E^{3/4} + 0.146$ 、 $\lambda = 2.7$ の時には $\Delta_{\infty}(E) = 0.0802 \ln E - 0.0454$ となり、数値計算の精度を考えると、良く一致している (図4)。

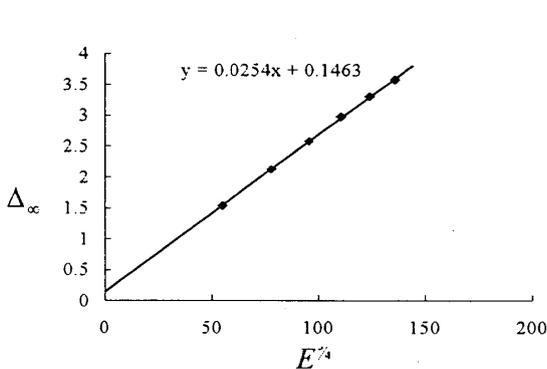


図4(a) Δ_{∞} のエネルギー依存性 ($\lambda = 0.0$)

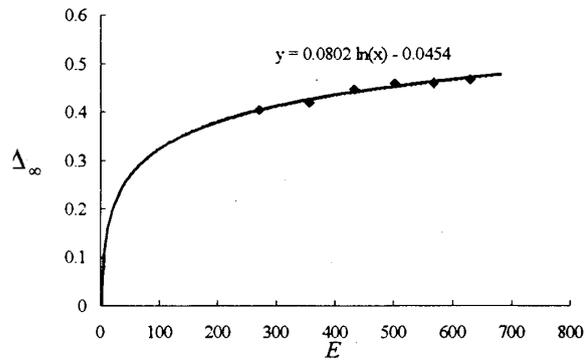


図4(b) Δ_{∞} のエネルギー依存性 ($\lambda = 2.7$)

このように Δ_{∞} の存在がビリヤード系以外のポテンシャル系でも確認できたので、正規化したモード揺動 $W(E)$ (式(5)) 及びその分布 (図5) が計算可能となる。 $\lambda = 0.0$ ではモード揺動分布は可積分系によく見られる特徴的な傾いた分布となる^[7,12]。そして、 $0.0 \leq \lambda < 1.0$ ではモード揺動分布は様々な形状を示す。ここで、準位間隔分布は Poisson 分布に近い形をしている。この複雑な形状の変化は KAM 領域、可積分性の島とカオス領域が位相空間内に混在していることと密接な関係があると思われる。特に、 $0.0 \leq \lambda < 0.1$ ではほぼ完全な Poisson 分布のままである。しかし、 $\lambda \approx 0.1$ では既にモード揺動分布は $\lambda = 0.0$ の時の形から大きく変形している。これはモード揺動分布は準位間隔分布よりも系の可積分性に敏感なことを意味している。また、 $0.3 \leq \lambda < 0.8$ では Brody 変数はプラトーを形成するが、モード揺動分布はやはり変形し続け、 $\lambda \approx 0.8$ では既に Gauss 分布にかなり近い形状となってしまう。そして $\lambda > 1.0$ ではもうほぼ Gauss 分布である。しかし、準位間隔分布はまだ Wigner 分布へ変化する途上にすぎず、 $\lambda > 2.0$ でようやくほぼ Wigner 分布といつてよい形となる。

4-2. 三次元非線形振動子

4 次のポテンシャルによる振動子を3つ重ね合わせ、結合項をもった系を考える。そのハミルトニアンは

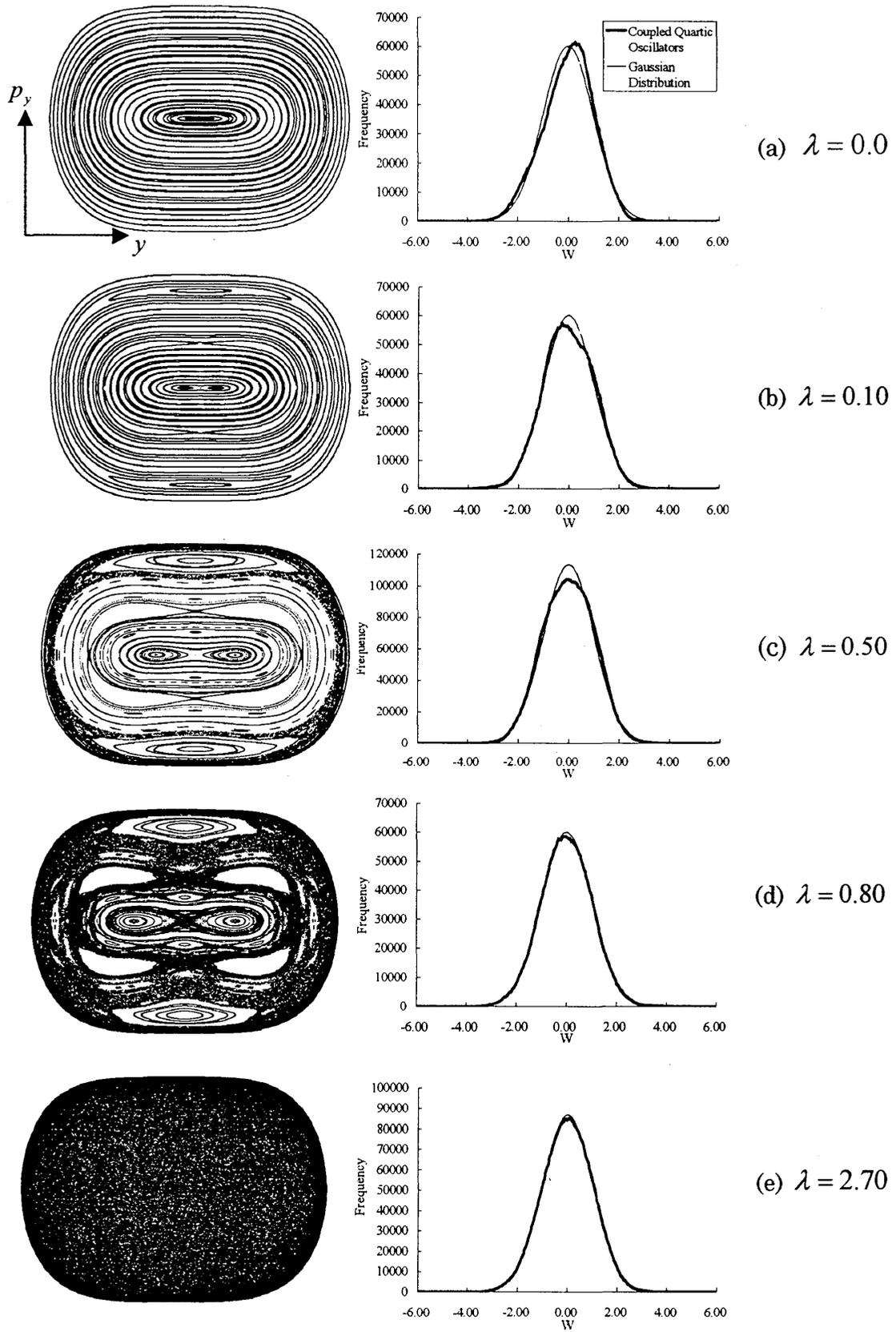


図5 Poincaré断面とモード揺動分布：二次元非線型振動子系

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + 3x^4 + 2y^4 + z^4 - \lambda(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) \quad (18)$$

とした。したがって二次元系の場合と同様、ただ一つの結合定数により、可積分系からカオス系まで連続的に変化させることができる。 λ の値で系の対称性が変化することはない、 $\lambda = 0.0$ で可積分となり $\lambda > 1.75877$ で下に bounded ではなくなる。また、やはりスケーリング則

$$E \rightarrow a^4 E : x \rightarrow ax, y \rightarrow ay, z \rightarrow az, t \rightarrow t/a$$

は保たれ、前章で述べたのと同様な解析上の利点がある。一般の古典周期軌道を探すのは、二次元の場合よりもさらに難しいと考えられる。

Brody 変数のエネルギー依存性をみると、二次元の場合と異なり特にプラトーのようなものは確認されていない。これは、三次元では KAM トーラスが残存しているも、Arnold 拡散が起こるのに対応していると思われる^[22]。

$\lambda = 0.0$ では可積分系であり $\lambda = 1.4$ ではほぼカオス系と考えられる。この時、二次元系の場合と同様に半古典近似により $\lambda = 0.0$ では

$$\Delta_\infty(E) = \frac{9}{2\pi^2} \sum_{m,n,k=1}^{\infty} \frac{m^2 n^2 k^2 / \alpha^3 \beta^3}{\left(\frac{m^4}{\alpha^3} + \frac{n^4}{\beta^3} + \frac{k^4}{\gamma^3} \right)^{5/2}} E^{3/2} \cong 0.0030 E^{3/2} \quad (19)$$

$$\alpha = 3^{1/3} \cdot \left(\frac{3\pi}{2K} \right)^{4/3}, \quad \beta = 2^{1/3} \cdot \left(\frac{3\pi}{2K} \right)^{4/3}, \quad \gamma = \left(\frac{3\pi}{4K} \right)^{4/3}, \quad K = F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \cong 1.85$$

を得る。

そして、 $\lambda = 1.5$ で

$$\Delta_\infty(E) = \frac{\langle d \rangle}{L} \int_{-\frac{\langle d \rangle}{2L}}^{\frac{\langle d \rangle}{2L}} N_{\beta^2}^2(E + \varepsilon) d\varepsilon \cong \frac{1}{\pi^2} \ln \left(e \frac{2\pi \langle d \rangle}{T_{\min}} \right) - \frac{1}{8} \cong 0.152 \ln E - 0.195 \quad (20)$$

となるが、やはりここでスケーリング則より得られる性質、最短周期 $T_{\min} \cong 1.41 E^{-1/4}$ 、準位密度

$\langle d \rangle \cong 0.0412 E^{5/4}$ を用いている。

これに対して、数値計算では $\lambda = 0.0$ で $\Delta_\infty(E) = 0.0028 E^{3/2} + 1.34$ 、 $\lambda = 1.5$ で $\Delta_\infty(E) = 0.164 \ln E + 0.902$ を得る。二次元の場合ほどではないが、計算精度を考えるとよく合っていると考えられる。

ほぼ、二次元の場合と同じ傾向が準位間隔分布 (図 6: Brody 変数の λ 依存性を参照) とモード揺動分布 (図 7) にも確認できるが、図 6 には二次元の場合のようなプラトーは見られない。これは、古典的には三次元系の位相空間内で last KAM がこわれていなくとも

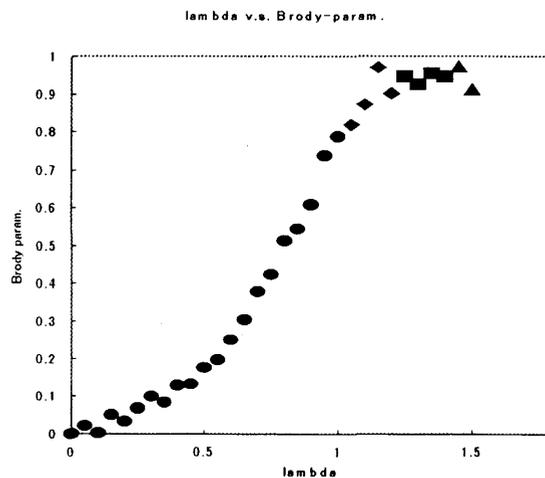


図6 λ vs. Brody 変数: 第一励起状態から 2500~5000 本の固有値による。

アーノルド拡散によって位相空間内のカオス領域全体の混合が起こることの反映と考えられる。

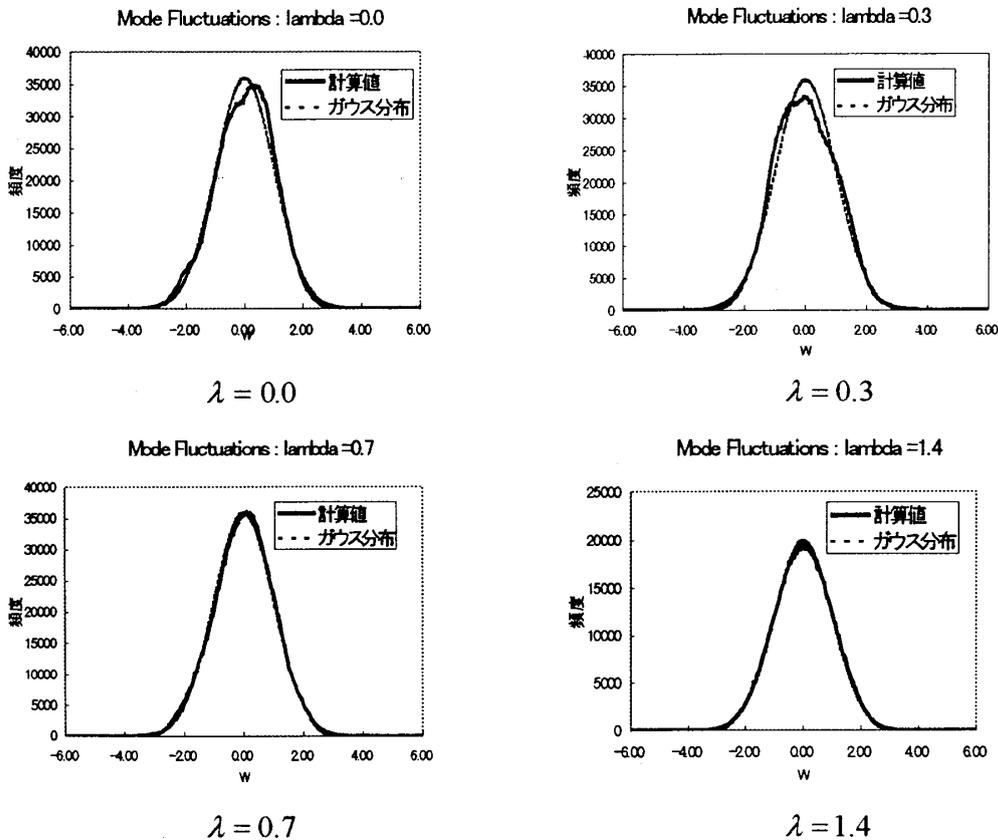


図7 モード揺動分布 (三次元)

§5. 結論・議論

モード揺動分布は可積分系では、予想された通り特徴的な歪度をもった分布となり、カオス系ではガウス分布となる。スタジアムビリヤードの場合、バウンシングボール軌道族の寄与が問題だが、その寄与を除くのは半古典近似によって簡単にでき、本来の孤立不安定軌道のみを寄与とするとガウス分布となることが確認できる。

非線型振動子の場合には、モード揺動分布は可積分系に小さな結合項を入れわずかに可積分から外れると、その形は大きく変形し様々な形となる。そして、古典的には位相空間の半ばがカオス領域となると、すでにモード揺動分布はほぼガウス分布となる。

このように、可積分からカオスまで連続的に変化させることのできる場合で調べると、準位間隔分布の方がモード揺動分布より古典的な可積分性・カオス性及びその中間的な状態をよく反映している ([16]、また[23]も参照)。また、二次元と三次元の非線型調和振動子の結果を比較すると位相空間内でのアーノルド拡散の有無までも、ブロディ変数によく反映しているのがわかる。

しかし、ここで以下のような点が問題点として残っているのがわかるであろう。スタジアムでは、たった一つのバウンシングボール軌道族のみでモード揺動分布は可積分系のような形状になる。ところが、非線型振動子では、少しでも可積分から外れるとすぐに形状が変化し、last KAM が壊れる頃にはもうガウス分布的になってしまう。位相空間にはまだ可積分性の島がたくさん残っており、それらがスタジアムの場合におけるバウンシングボール軌道族のような働きをしてもいいはずだが、そうはなっていない。半古典近似で歪度等を評価するような方法はこの点を説明するのは難

しいと思われる。例えば、孤立不安定軌道のみへの寄与は当然ガウス分布となっていると考えられる。しかしそうだとすると、可積分性の島々の寄与がやはり特に歪度を生じないことになってしまう。また、組織的に孤立不安定軌道のみへの寄与のみにする方法も今のところない。これらの点が解明されなければモード揺動分布の“カオスの印”としての是非を問うことはできないままとなるので、さらなる理論的・数値的研究が望まれるところである。

参考文献

- [1] O. Bohigas, M. J. Giannoni and C. Schmit, Phys. Rev. Lett. **52**(1984)1; J. Physique Lett. **45**(1984)L-1015.
- [2] E. B. Bogomolny, B. Georgeot, M. J. Giannoni and C. Schmit, Phys. Rev. Lett. **69**(1992)1477.
- [3] R. Aurich, J. Bolte and F. Steiner, Phys. Rev. Lett. **73**(1994)1356.
- [4] R. Aurich, F. Scheffler, and F. Steiner, Phys. Rev. E **51**(1995)4173.
- [5] C. Grosche, J. Phys. A: Math. Gen. **25**(1992)4573; *Path Integrals, Hyperbolic Spaces and Selberg Trace Formulae*, (World Scientific, Singapore, 1996).
- [6] M. Tomiya and N. Yoshinaga, J. Phys. Soc. Jpn. **66**(1997)3318.
- [7] R. Aurich, A. Bäcker and F. Steiner, Int. J. Mod. Phys. B **11**(1997)805.
- [8] H. Alt, C. Demabowski, H.-D. Graef, R. Hofferbert, H. Rehfeld, A. Richter and A. Baecker, Phys. Rev. E **58**(1998)1737.
- [9] M. C. Gutzwiller, J. Math. Phys. (N.Y.) **12**(1971)343; *Chaos in Classical and Quantum Mechanics* (Springer-Verlag, New York, 1990).
- [10] M. V. Berry, Proc. R. Soc. London A **400**(1985)229.
- [11] O. Costin and J. L. Lebowitz, Phys. Rev. Lett. **75**(1995)69.
- [12] P. M. Bleher, Z. Cheng, F. J. Dyson, and J. L. Lebowitz, Commun. Math. Phys. **154**(1993) 433.
- [13] M. Sieber U. Smilansky, S. C. Creagh and R. G. Littlejohn, J. Phys. A: Math. Gen. **26**(1993) 6217.
- [14] D. Alonso and P. Gaspard, J. Phys. A: Math. Gen. **27**(1994)1599.
- [15] M. V. Berry and M. Tabor, Proc. R. Soc. Lond., A **349**(1976)101, J. Phys. A: Math. Gen. **10**(1977)371.
- [16] M. Tomiya and N. Yoshinaga, Phys. Rev. E **58**(1998)8017.
- [17] T. H. Seligman, J. J. M. Verbaarshot and M. N. Zirbauer Phys. Rev. Lett. **53**(1984)215; J. Phys. A **18**(1985)2751.
- [18] O. Bohigas, S. Tomsovic and D. Ullmo, Physics Rep. **223**(1993)43.
- [19] K. M. Atkins and G. S. Ezra, Phys. Rev. E **51**(1995)1822.
- [20] D. Ullmo, M. Grinberg and S. Tomsovic, Phys. Rev. E **54**(1996)136.
- [21] S. Graffi, V. R. Mansfredi and L. Salanich, Mod. Phys. Lett. B **9**(1995)747.
- [22] L. E. Reichl, *The Transition to Chaos: In Conservative Classical Systems: Quantum Manifestations*, (Springer-Verlag, New York, 1992).
- [23] M. Tomiya and N. Yoshinaga, J. Stat. Phys. **83**(1996)215.