

## Quantum Trajectory in Non-Linear System

HIROTO KUBOTANI<sup>1</sup>

*Faculty of Engineering,*

*Kanagawa University, Yokohama 221-8686, Japan*

非線形性が強い力学系では、古典軌道が不安定となり、カオス現象が現れる。この性質により、非線形性は、エルゴード性や不可逆性の起源など統計力学の基礎との関係から注目されている。しかし、このような考え方は、古典系でのみ正当であり、量子系へ自然に拡張されないと考えられる。というのも、量子系では不確定性関係のため、軌道という概念を元々持ちにくい上、状態を記述する波動関数が細かい位相空間構造を創れないからである。最近になり、古典極限でカオスになる系に少数の振動子（冗長な自由度）を接触させることにより、量子系であっても、（厳密な意味でないにしても）カオス的な振舞をさせられることが分かってきた。本発表では、冗長な自由度によって表面化した擬似カオス性を動力的な観点から解析するため、de Broglie-Bohm 流の量子力学の解釈に伴う量子軌道を用いて視覚化することを提案する。また、本研究の動機となった量子宇宙論との関係も適宜紹介する。

### 1 Introduction

非線形性が強い力学系では、カオスと呼ばれる不規則性が現れる。力学系におけるカオス現象は、積分の喪失や古典軌道の不安定性といった性質によって説明される。このカオス性は、エルゴード性や混合性といった統計力学の基礎付けに関わる性質との関連からも重要である。詳細については、Ref.[1]の1章を参照されたい。

非線形性のそのような役割は、量子系へ自然に拡張できないものと考えられる。例えば、カオスのモデルとしてよく知られている力学系、キック回転子を考えてみよう。ハミルトニアンは、

$$H_k(q, p; t) = \frac{1}{2}p^2 + k\cos(q) \sum_{n=1}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (1.1)$$

と表される。ここで、 $q, p$  は、それぞれ、角変数、および、作用変数である。従って、 $q \in [0, 2\pi)$ 。第二項は、 $t = nT$  の時刻のみ激力として働く非線形ポテンシャルであり、定数  $k$  は、その強度を調整するパラメータである。離散化された時刻  $t = nT$  における力学変数  $(q_n, p_n) \equiv (q(t = nT + 0), p(t = nT + 0))$  に注目すると、キック回転子のダイナミクスは、

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= q_n + Tp_n, \\ p_{n+1} &= p_n + k\sin(q_{n+1}) \end{aligned} \quad (1.2)$$

という法則に従うマップ系に帰結され、 $K \equiv kT$  が  $K_{cr} = 0.9716\dots$  より大きい場合には、カオスが観測される。この力学系の自然な量子化として、

$$\Phi(t) = \hat{U}(t)\Phi(t=0) \quad (1.3)$$

$$\hat{U}(t) = T\exp\left[-\frac{i}{\hbar} \int_0^t ds \hat{H}_k(s)\right] \quad (1.4)$$

を考える。つまり、式(1.1)を形式的に量子化したハミルトニアンによって、初期波動関数  $\Phi(t=0)$  がユニタリ時間発展する量子系を考えるのである。この波動関数  $\Phi(t)$  の時間発展は、数値計算によって容易に調べることができ、 $p$ -表現で見て波動関数が局在化してしまうのが分かる ([2] の Fig.9)。古典分布関数の広がり方との比較により、この局在化現象は、量子的な干渉性の影響が効き始める Ehrenfest タイムスケール

<sup>1</sup> Electronic address:kubotani@cpsun3.b6.kanagawa-u.ac.jp

ル以降顕著になることが分かる。量子化されたキック回転子は、非線形性が強くともエルゴード性を示さない典型例となっている。

さらに、波動関数の振動的な性質から、量子状態の回帰性に関して、一般的なことが主張できる。

1) density matrix で記述される状態 (pure state でもよい) が、孤立系のためエネルギー準位  $E_n$  が離散化されている場合、その density matrix は almost periodicity を示す。また、エネルギー準位  $E_n$  を粗視化して得られるエントロピーも almost periodicity を示す。[3]

2) 時間周期的なポテンシャルを持つ系において、1 周期の間に起こる波動関数の位相のズレを擬エネルギーと呼ぶことにする。その擬エネルギー準位が離散的になっている場合、波動関数は almost periodicity を示す。[4]

ここで、almost periodicity とは本来の周期性を拡張した概念であり、 $t$  の関数  $A(t)$  において、

$$\forall \epsilon, \exists \tau_\epsilon, |A(t + \tau_\epsilon) - A(t)| < \epsilon \text{ for all } t \quad (1.5)$$

を満たす  $\tau_\epsilon$  の集合  $\{\tau_\epsilon\}$  が有限な隙間しか作らない (relatively dense) 場合、「 $A(t)$  は almost periodic である。」と言う。これに関連して、

$$\text{関数 } A(t) : \text{almost periodic} \iff A(t) \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} A_n \exp(i\omega_n t) : \text{一様収束} \quad (1.6)$$

という性質が成り立つ。

以上のように、量子系においては、非線形性の統計力学の基礎付けとしての役割は直接的ではないことが分かる。そもそも、「量子系には、カオスは存在しない。」といった標語がよく使われている。量子系では、軌道という概念を元々持ちにくい上、状態を記述する波動関数が細かい位相空間構造を創れないからである。そこで、「量子カオス」とは、古典系ではカオスを示す系の量子力学のことであると解されている。そのような状況を受け、現在の量子カオス研究では、動力学よりむしろ、固有波動関数の形や固有スペクトルの統計的性質にカオス性の痕跡を見つけることに関心が向けられている [5][6]。

現在、宇宙論の分野では、全ての自由度が量子論的であった量子宇宙から地球などの惑星や太陽、銀河といった物質の構造の形成史を明らかにしようと試みられている。特に、インフレーション宇宙論においては、量子状態にあった物質場の量子ゆらぎが、宇宙空間の加速度膨張により引き延ばされて、マクロな古典統計ゆらぎに進化し、それが重力収縮の種となって宇宙の構造が形成されたとされている。しかし、ensemble が存在しない唯一の系に我々が構築した量子力学を適応していいかのかという疑問の他にも、全宇宙という外なる存在がない量子系において古典性が自発的に発現しうるのかという疑問が生じる。従来のインフレーション研究では、インフレーションを引き起こす場 (インフラトン)  $\Phi$  の量子期待値  $\langle \Phi^2 \rangle_Q$  を統計期待値  $\langle \Phi^2 \rangle_C$  と等値されることが行われてきたが、決して、自明な状態の時間発展ではない [7]。自由度無限大の極限操作をする以前の有限自由度系での量子状態から古典状態への転移といった量子ダイナミクスは、宇宙史の理解からも重要な問題となっている。

量子系の動力学に関しては、Adachi, Toda and Ikeda [8] により、古典動力学の回復が議論されている。Ehrenfest タイムスケール以降、量子古典対応が悪くなるのは、量子干渉性が働き始めるからである。そこで、系に古典ランダムノイズを加え続け、その均し効果で量子干渉性を抑圧し、その結果、波動関数の局在化を破りうることを示している。この方向の研究は、Habibu, Shizume and Zurek [9] により続けられている。

## 2 小数自由度非線形系の動力学

閉じた量子系にはカオスが存在しないということから、前述のように、無限大自由度の量子系との接触 (どれかのモードと必ず resonance が起こる状況) や古典的なランダム力の影響がある場合など外部の無限

自由度の存在を前提とした量子系の解析が進められてきた。ところが、最近になり、古典極限でカオスになる系に少数の振動子（冗長な自由度）を接触させることにより、量子系でありながら（厳密な意味でないにしても）カオス的な振舞をさせられることが分かってきた。具体的には、レーザー光のエネルギーが少数自由度量子カオス系内へ散逸していき、不可逆的に吸収され続ける現象 ([10] [11]) や時間相関が減衰するノイズを少数自由度ながら発生し、別の系の量子的干渉性を不可逆的に壊す現象である ([12][13])。これらの散逸性・揺動性は、量子系にカオスがないとすれば、無限自由度の量子系においてのみ可能となると考えられていた現象である。

このような成果を踏まえると、1自由度と無限自由度との間の有限量子系であっても、何らかのダイナミクスが存在し、何らかの役割があることを示唆していると思われる。従って、少数自由度量子系における動力学に注目した研究にも意義がある。

### 3 量子系の動力学の記述

量子波動関数と古典分布関数とを比較する方法として、Wigner 関数やそれを粗視化した Husimi 関数といった波動関数の表現が知られている。それぞれの定義は、

$$\rho_W(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int d\eta \langle q - \frac{1}{2}\eta | \Psi \rangle \langle \Psi | q + \frac{1}{2}\eta \rangle \exp(ip\eta/\hbar) \quad (3.1)$$

$$\rho_H(\langle q \rangle, \langle p \rangle) = \frac{1}{\pi\hbar} \int dq dp \rho_W(q, p) \exp[-\frac{1}{\hbar}(p - \langle p \rangle)^2 - \frac{1}{\hbar}(q - \langle q \rangle)] \quad (3.2)$$

である。Takahashi and Saitô[14] は、時間発展する状態のスナップショットとしてこれらを利用し、量子カオス系の動力学を解析することを考えた。確かに、これらの表現は、波動関数の振る舞いを力学系の位相空間上で直感的に理解するのに適しているが（例えば、期待値においてどのような位相体積要素が寄与しているか？といった問題）、Wigner 関数  $\rho_W$  の時間発展方程式は

$$\dot{\rho}_W = \{H, \rho_W\}_{PB} + \sum_{n \geq 1} \frac{\hbar^{2n} (-1)^n}{2^{2n} (2n+1)!} (\partial_x)^{2n+1} V \cdot (\partial_p)^{2n+1} \rho_W \quad (3.3)$$

となっており、Hamiltonian 中のポテンシャル項  $V$  が3次以上の場合、 $\rho_W$  の時間発展は、Liouville 流からズレてしまう。従って、確率密度のように保存する流れのあるもととして  $\rho_W$  を解釈することができない。

量子力学の解釈として、観測過程を必要としない de Broglie-Bohm 流の解釈が提案されている [15]。それによると、量子状態を、統計性を持った rigid な軌道を持った粒子の流れとして捉えられる。一見、rigid な軌道というのは、不確定性原理と矛盾するようであるが、以下のように定義し、Schrödinger 方程式による波動関数の時間発展と矛盾しない。Schrödinger 方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi(x, t) = [-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x; t)] \phi(x, t) \quad (3.4)$$

に従う波動関数  $\phi(x, t)$  を考える。 $\phi(x, t) = R(x, t) \exp(\frac{i}{\hbar} S(x, t))$  のように波動関数を極座標表示した上で、式 (3.4) を、絶対値  $R(x, t)$ 、位相  $S(x, t)$  に対する方程式として書き下すと、

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + V(x; t) + V_Q(x) = 0, \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} R^2 + \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial x} \left( R^2 \frac{\partial S}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.6)$$

となる。ここで、 $V_Q(x; t)$  は、量子ポテンシャルと呼ばれるものであって、明示的に書き下すと、

$$V_Q(x; t) = -\frac{\hbar^2}{2R} \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} \quad (3.7)$$

である。次に、位相  $S(x, t)$  の空間勾配を量子粒子の運動量  $p$  と

$$p = m\dot{x} = \frac{\partial S}{\partial x} \tag{3.8}$$

のように関係付け、それらの粒子が、 $R(x, t)^2$  の密度を持つ統計分布をしていると解することにする。すると、式 (3.5) は、量子版の Hamilton-Jacobi 方程式であり、量子粒子の rigid な軌道を記述し、式 (3.6) は、分布関数の連続の式になる。量子粒子の統計分布関数  $f(x, p)$  を明示的に書き下すと、

$$f(x, p) = R(x, t)^2 \delta(p - \frac{\partial S}{\partial x}) \tag{3.9}$$

である。

この量子軌道描像の第一の特徴は、量子ポテンシャルを通して量子干渉性を考慮した上でも、rigid な軌道を定義できる点である。この性質を利用して、量子系においても Lyapunov 指数や KS entropy を評価し、新しいカオスの定義としようとする試みもある [16]。第二の特徴は、統計分布が連続の式を満たすため、各量子粒子が確率密度を担っており、その流れに意味がある点である。これは、前述の Winger 関数の描像とは異なり動力学を記述するのに大変都合がよい。

このような量子軌道による量子系の描像は、量子重力にも適用されており、量子宇宙や量子ブラックホールなどを記述していると考えられている、時間を陽に含まない波動関数（定常状態の波動関数のようなもの）にダイナミクスがあるようにみなして物理的な情報を引き出す研究が行われている [17]。

#### 4 Quantum Trajectory in Non-Linear System

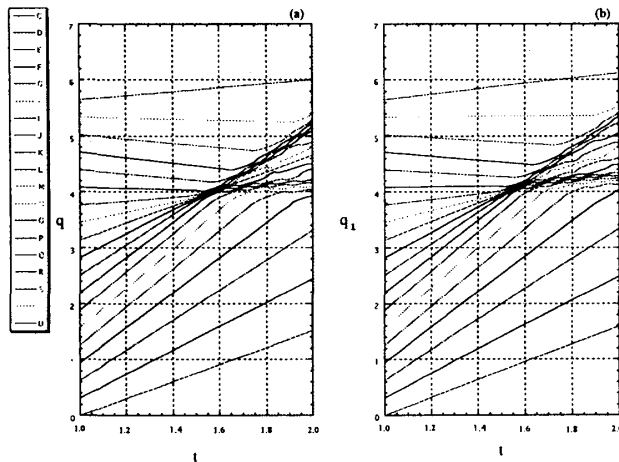


図 1: 自由度  $q_1$  内で量子軌道

前章の最後で述べたように、量子軌道による量子力学の描写は、動力学を記述するのに優れていると期待される。そこで、2章で問題になっていた少数自由度非線形系の動力学の解析に用いてみる。

まず、従来から解析に用いられているキック回転子における量子軌道を求める。 $k = 2.0, T = 1.0$  のモデルにおいて、時刻  $t = 1.0$  に等間隔に置いた 20 個の粒子の量子軌道を Fig.1(a) に示す。 $t = 1.0$  に受けたキックにより、 $0 < q < \pi$  に置かれた粒子は加速され、 $\pi < q < 2\pi$  に置かれた粒子は、減速される。その結果、粒子の分布の粗密ができるため、量子ポテンシャル (3.7) の影響で、粒子間に反発力が働く。常微分方程式 (3.8) の解の一意性により、量子粒子の追い越

しは禁止されている。そのような量子性の現れ方が、量子軌道の加速を拒んでいるため、局在化が起きていると理解できる。

微分方程式の解の大域的な性質に関する定理として、2変数自励系では、カオス的な振る舞いをする解は存在しないとするものがある (Poincaré-Bendixson の定理)。自由度の大きさ (次元) がダイナミクスの大域的な性質を決めていることを示している。量子粒子においても、直感的なアナロジーが成立しているように見える。そこで、以下のようにキック回転子を結合したモデルを考えてみよう。

$$H(q_1, p_1, q_2, p_2; t) = H_{k_1}(q_1, p_1; t) + H_{k_2}(q_2, p_2; t) + c_{pp} p_1 p_2. \tag{4.1}$$

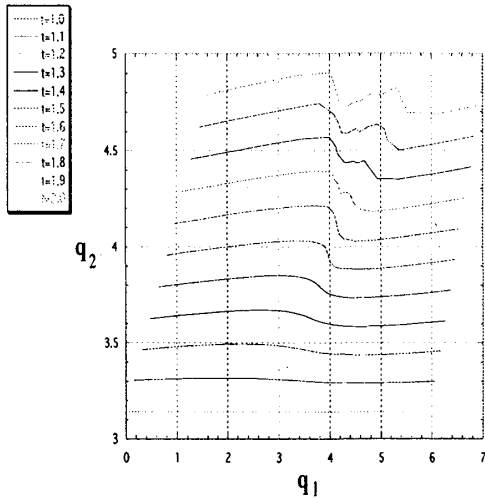


図 2:  $(q_1, q_2)$  内での粒子分布時間推移

$k_1 = 2.0, k_2 = 0.9, c_{pp} = 0.1, T = 1.0$  のモデルにおいて、Fig.1(a) と比較するため、時刻  $t = 1.0$  に平面  $q_2 = \pi$  上に等間隔に置いた 20 個の粒子の量子軌道を Fig.1(b) に示す。また、Fig.1(b) の量子粒子が、 $(q_1, q_2)$  面内でどのように運動していくかを示したのが、Fig.2 である。粒子密度が高まった部分で、 $q_2$  方向への運動が生じているのが分かる。また、配位体積  $\Delta q_1 \Delta q_2$  がどのように変形されていくかを視覚化するために、 $t = 1.0$  で 10 枚の平面  $q_2 = const$  上に一様に置いた粒子の並び Fig.3(a) の 2 キック後の分布を示したのが Fig.3(b) である。配位体積が巻き込まれていく様子がうかがい知れる。最後に、量子軌道の実効的な加速度を評価してみる。キック間隔  $T (= 1.0)$  において粒子が移動する距離を使って評価した

$$P_i(n) = \frac{1}{T}(q_{i,n+1} - q_{i,n}) \quad (4.2)$$

を平均速度とみなす。さらに、その変化率

$$F_i(n) = \frac{1}{T}(P_i(n) - P_i(n-1)) = \frac{1}{T^2}((q_{i,n+1} - q_{i,n}) - (q_{i,n} - q_{i,n-1})) \quad (4.3)$$

を実効的な加速度とみなすことにする。 $t = 20.0$  に置いた 10000 点の粒子に関して  $F_1(20)$  を計算したものが Fig.4(b) である。Sin カーブに近い加速の仕方をしていることが分かる。比較のため、キック回転子一個について計算したものが Fig.4(a) である。

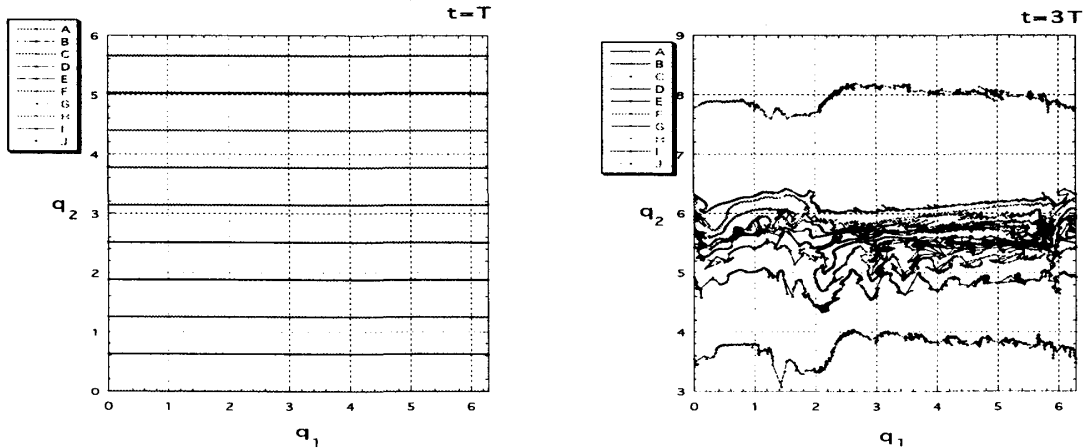


図 3:  $(q_1, q_2)$  内で粒子分布スナップショット

## 5 まとめ

量子カオスにおいても、動力学の理解の必要性があり、実際、少数自由度系においても、単純ではない動力学が存在する可能性がある。そのようなものを理解する道具だてとして量子軌道を用いることを、本発表では提案した。

量子軌道は、保存する量（確率）を担っており、古典軌道とのずれを局所的・個別的に議論することができることは、本解析でも行ったように優位性がある。局所的な量子ゆらぎと大局的な古典軌道という風に分離できる状況について解析を進められる可能性がある。

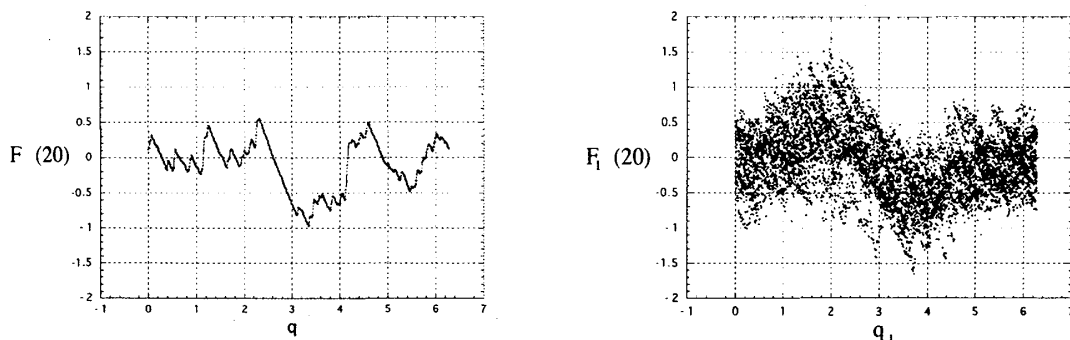


図 4: 実効的加速度  $F_1(20)$

## 参考文献

- [1] G. M. Zaslavsky, カオス-古典および量子力学系-, 現代工学社.
- [2] M. Toda, S. Adachi and K. Ikeda, Prog. Theor. Phys. Supp. **98** 323 (1989).
- [3] I. C. Percival, J. Math. Phys. **2** 235 (1961).
- [4] T. Hogg and B. A. Huberman, Phys. Rev. Lett. **48** 711 (1982).
- [5] B. V. Chirikov, F. M. Izrailev and D. L. Shepelyansky, Physica **D33** 77 (1988).
- [6] G. Casatti and B. Chirikov, in *Quantum chaos : between order and disorder*, Cambridge Univ. Press, New York, 1995.
- [7] H. Kubotani, T. Uesugi, M. Morikawa and A. Sugamoto, Prog. Theor. Phys. **98**, 1063 (1997).
- [8] S. Adachi, M. Toda and K. Ikeda, Phys. Rev. Lett. **61**, 655 (1988).
- [9] S. Habib, K. Shizume and W. H. Zurek, Phys. Rev. Lett. **80** 4361 (1998).
- [10] K. Ikeda, S. Adachi and M. Toda, Phys. Lett. **A147**, 189(1990).
- [11] K. Ikeda, Phys. Lett. **A168**, 248(1992); K. Ikeda, Ann. Phys. **227**, 1(1993).
- [12] H. Kubotani, T. Okamura, M. Sakagami, Physica **A214** 560 (1995).
- [13] M. Sakagami, H. Kubotani, T. Okamura, Prog. Theor. Phys. **95** 703 (1996).
- [14] K. Takahashi and N. Saitô Phys. Rev. Lett. **55** 645 (1985).
- [15] P. R. Holland, *The quantum theory of motion*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987.
- [16] U. Schwengelbeck and F. H. M. Faisal, Phys. Lett. **A199** 281 (1995).
- [17] M. Kenmoku, H. Kubotani, E. Takasugi and Y. Yamazaki, Phys. Rev. **D57** 4925 (1986).