

## 2次元ネットワーク上の交通流モデル

— セルオートマトンモデルに対する数値シミュレーション —

東北大学 情報科学研究科 本田 泰<sup>1</sup>, 堀口 剛

2次元正方格子を4種類の車が交差点において進行方向と左折を確率的に行いながら移動するモデルを, セルオートマトンを用いて記述し, その時間発展を数値シミュレーションを用いて調べた. このモデルは, 2次元正方格子で2種類の車を仮定したいくつかのモデルと同様に, 車の密度を増加させることによって, 自由移動相から渋滞相へ転移することがわかった. 2種類の車を考える場合との大きな違いは, 車の密度が非常に低い場合にも車の渋滞クラスターが形成されやすいという点である. また, 自由移動相での車の速度は, 車同士の相関を無視した1体近似で解析的に求めた速度と良く一致することが分かった.

### 1 はじめに

交通流モデルの性質を明らかにすることは, 高速道路や都市における自動車の交通流制御などに関連した基礎的研究として重要であるばかりでなく, コンピューターネットワーク上のパケット流の性質にも関連して重要である. 1次元上の交通流モデルは, 粉体流問題との関連も深く, さまざまなモデルの理論的な研究や数値シミュレーションを用いた研究が活発に行われている. また, サーキットを用いた実験や, 高速道路における交通流の実測値と比較する研究なども行われている.

一方, 2次元交通流はBihamら[1]によって, セルオートマトンを用いてモデル化(BMLモデル)された. BMLモデルでは, 図1(a)に示したように, 2次元正方格子を2種類の車が移動する. 1種類の車は北の方向にのみ動き, もう1種類の車は東の方向にのみ動く. 車は, 自分の進もうとする位置が占有されていなければそこに移動する. 2台の車が同時に同じ位置を占有することは禁止する. 車を粒子とみなせば, ハードコアポテンシャルのみをもった2種類の粒子がある外場の下で運動しているモデルであると考えられることもできるであろう.

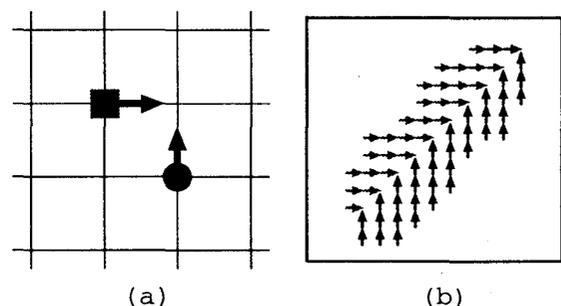


図1: BMLモデルの概略と, その渋滞相の典型的な例

<sup>1</sup> E-mail: honda@statp.is.tohoku.ac.jp

BMLモデルは2次元交通流を考える上で最も単純化されたモデルの一つであると考えられる。車の密度を増加させることによって、車の自由移動相から図1(b)に模式的に示されたような渋滞相への急激な転移が数値シミュレーションによる研究で見出された[1]。Cuestaら[2]はBMLモデルに対して、車が方向転換する確率を導入し、自由移動相から渋滞相への1次転移的な相転移を発見した。また、Nagatani[3]はtwo-level crossingの効果を調べ、車の臨界密度 $n_c$ が熱力学的極限において約0.4であることを予想している。一方、TadakiとKikuchi[4]は渋滞相の安定性を調べ、BMLモデルには2種類の渋滞相があることを指摘している。また、HoriguchiとSakakibara[5, 6]は交差点間の間隔の影響を調べるために、副格子の導入による効果を調べた。

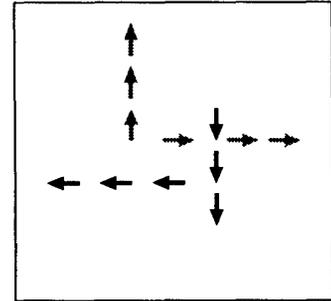


図2：4方向交通流モデルの概略

これらの研究は2次元格子上で2種類の車を考慮したものである。そこで、本研究では2次元格子上で4種類の車が確率的に方向転換しながら運動するモデルの性質を調べる。(図2参照) 2種類の車を考慮した場合と同様に、自由移動相から渋滞相への1次転移的な相転移が見出された。また、渋滞の核となる配置を規制するような制限を導入することにより、渋滞は大幅に緩和することもわかった。

## 2 4方向交通流モデル

図3に示したような2次元正方格子を考える。車は格子点上にだけ存在できるとする。また、左側通行を仮定し、車は矢印の方向にのみ移動できる。四つの格子点を囲む四角は一つの交差点を表している。交差点の中央に示された矢印は信号の状態を表し、図3(a)では東西方向の車の移動だけを許可する信号の状態であり、 $\sigma^t = 1$ で表すことにする。図3(b)では南北方向の車の移動だけを許可する信号の状態であり、 $\sigma^t = 0$

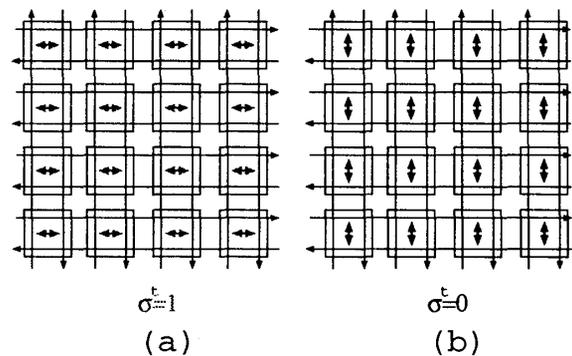


図3：4方向交通流を考える2次元正方格子

で表すことにする。図からもわかるとおり、信号の状態は2次元格子上で一様であると仮定し、時間にも依存することにする。すなわち、奇数時間ステップでは東西方向、偶数時間ステップでは南北方向に車の通行を許可する。また、信号は通行を許可する状態(青の状態)と禁止する状態(赤の状態)のみを考え、黄色の状態は考慮しないことにする。

次に、4方向交通流の時間発展をブール変数を用いて表す。図4(b)に示すように4種類の車を $\mu, \nu, \alpha, \beta$ の4変数で表わす。また、交差点内の格子点の位置は図4(a)に示したよ

うに呼ぶことにする. 例えば, 時刻  $t$  に位置  $\bar{r}$  にある交差点内の格子点 (11) に  $\mu$ -型車が存在する状態は,  $\mu_{\bar{r}(11)}^t = 1$  と表される. 各車は図 4(b) に示される位置に来た時に次に進むべき方向を矢印で示した方向の中から選択する. 例えば,  $\mu$ -型車の場合, 北に進む確率は  $1 - \gamma$ , 西に進む確率は  $\gamma$  である. 一方, 各車が図 4(c) に示した位置に存在する場合には, 左側通行を仮定しているので方向転換はできないものとする. また, 各車が進もうとする位置に他の車が存在する場合には車はその位置には移動できないとする. 式 (1) に  $\mu$ -型車が時刻  $t$  に位置  $\bar{r}(11)$  に存在し, 次の時間ステップ  $t+1$  でも同じ場所にそのまま留まる場合を表した.

$$\begin{aligned}
 S_{\bar{r}(11)}^{t+1}(\mu) &= \mu_{\bar{r}(11)}^t \bar{\xi}_{\bar{r}(11)}^t \sigma^t \\
 &+ \mu_{\bar{r}(11)}^t \bar{\xi}_{\bar{r}(11)}^t \bar{\sigma}^t \left( \nu_{\bar{r}(12)}^t + \mu_{\bar{r}(12)}^t + \beta_{\bar{r}(12)}^t \right) \\
 &+ \mu_{\bar{r}(11)}^t \bar{\xi}_{\bar{r}(11)}^t \\
 &\quad \times \left( \alpha_{\bar{r}-\bar{x}(21)}^t + \beta_{\bar{r}-\bar{x}(21)}^t + \mu_{\bar{r}-\bar{x}(21)}^t \right) \\
 &+ \mu_{\bar{r}(11)}^t \bar{\xi}_{\bar{r}(11)}^t \bar{\sigma} \left( \bar{\xi}_{\bar{r}-\bar{x}(22)}^t + \alpha_{\bar{r}-\bar{x}(22)}^t \right) \quad (1)
 \end{aligned}$$

変数  $\xi$  は車の方向転換を表す変数であり,  $\mu$ -型車の場合, 西に進もうとする場合 1 となり, 北に進もうとする場合には 0 となる. 右辺の各項は図 5(a)-(d) にそれぞれ対応している. 式 (2) には時刻  $t+1$  に他の位置から  $\bar{r}(11)$  に車が移動して来る場合を示した.

$$\begin{aligned}
 M_{\bar{r}(11)}^{t+1}(\mu) &= \mu_{\bar{r}(21)}^t \sigma^t \bar{\mu}_{\bar{r}(11)}^t \bar{\alpha}_{\bar{r}(11)}^t \bar{\nu}_{\bar{r}(11)}^t \\
 &+ \mu_{\bar{r}-\bar{y}(21)}^t \bar{\mu}_{\bar{r}(11)}^t \bar{\alpha}_{\bar{r}(11)}^t \bar{\nu}_{\bar{r}(11)}^t \\
 &\quad \times \left( \bar{\alpha}_{\bar{r}(21)}^t \bar{\mu}_{\bar{r}(21)}^t + \alpha_{\bar{r}(21)}^t \xi_{\bar{r}(21)}^t \right) \\
 &+ \mu_{\bar{r}-\bar{y}(12)}^t \bar{\mu}_{\bar{r}(11)}^t \bar{\alpha}_{\bar{r}(11)}^t \bar{\nu}_{\bar{r}(11)}^t \\
 &\quad \times \bar{\sigma}^t \left( \alpha_{\bar{r}(21)}^t \bar{\xi}_{\bar{r}(21)}^t + \mu_{\bar{r}(21)}^t \right) \quad (2)
 \end{aligned}$$

したがって, 時刻  $t+1$  において位置  $\bar{r}(11)$  に存在する  $\mu$ -型車の数は次式となる.

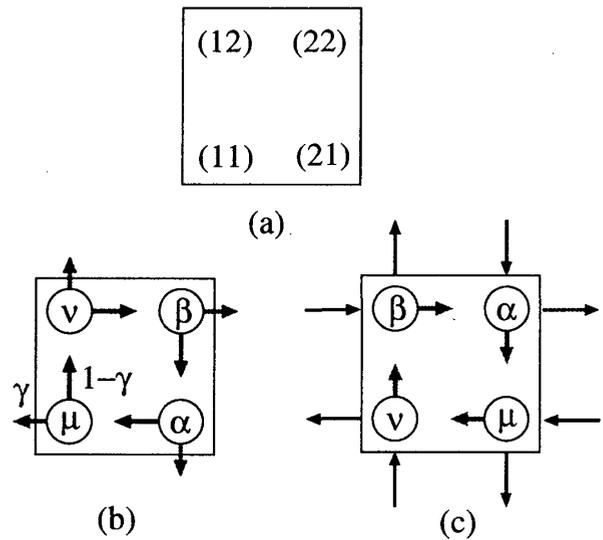


図 4: (a) 交差点内の各位置の名前, (b) 4 種類の車と, それぞれが方向転換できる位置, (c) 各車が方向転換できない位置の例

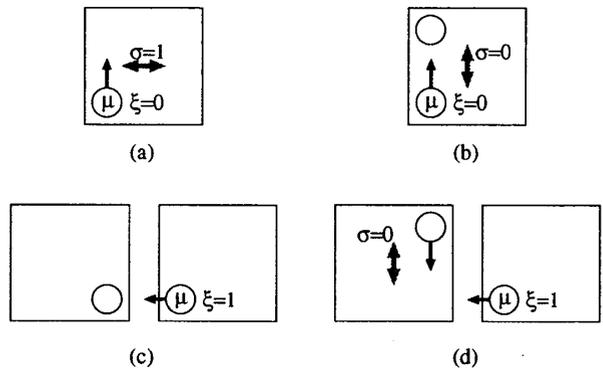


図 5:  $\mu$  型車が (11) の位置から移動できない 4 つの場合

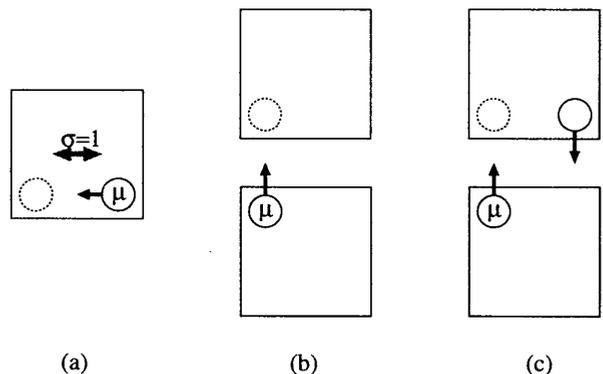


図 6:  $\mu$  型車が (11) の位置に移動できる 3 種類の場合

$$\mu_{\vec{r}(11)}^{t+1} = S_{\vec{r}(11)}^{t+1}(\mu) + M_{\vec{r}(11)}^{t+1}(\mu) \quad (3)$$

時刻  $t+1$  において,  $\vec{r}(21), \vec{r}(12)$  に存在する  $\mu$ -型車の数も同様にして, ブール変数を用いて表される. また,  $\nu, \alpha, \beta$ -型車に関しても, それぞれの進む方向を考慮して全く同様に時間発展方程式を記述することができる. ここでは, それらを省略する.

### 3 数値シミュレーション結果

車の速度を式 (4) で定義する.

$$v(t) \equiv \frac{1}{2N} \sum_{\vec{r}} \sum_{c \in \{\mu, \nu, \alpha, \beta\}} \sum_{\psi(c)} \left( c_{\vec{r}, \psi(c)}^{t+1} - c_{\vec{r}, \psi(c)}^t \right)^2 \quad (4)$$

これは時刻  $t$  から  $t+1$  の間に位置を変えた車の割合を意味する. 数値シミュレーションではこの速度の時間平均を式 (5) のように求めた.

$$v = \langle v(t) \rangle = \frac{1}{T} \sum_{t=t_0+1}^{t_0+T} v(t) \quad (5)$$

#### 3.1 車の移動に全く制限が無い場合

$\gamma = 0, 0.3$  の場合の数値シミュレーション結果を図7に示した.  $\gamma = 0$  の場合には15種類の初期状態に関するサンプル平均を示してある. エラーバーはそのサンプル平均の分散から見積もったものである. 速度の密度依存性から, 自由移動相から渋滞相への転移が存在することがわかる. 方向転換 ( $\gamma = 0.3$ ) を導入することによって, 非常に低い車の密度 ( $n_c \simeq 0.02$ ) で渋滞が起こっていることがわかる. これは図8に示したような渋滞の核となる車の配置が, 頻繁に発生するようになったからであると考えられる.

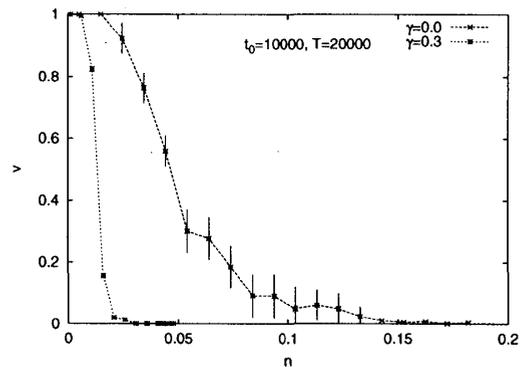


図7: 車の移動に全く制限をつけない場合における速度  $v$  の密度  $n$  依存性

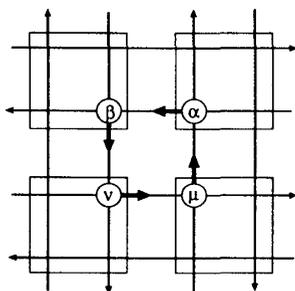


図8: 渋滞の核となる最も小さな車の配置

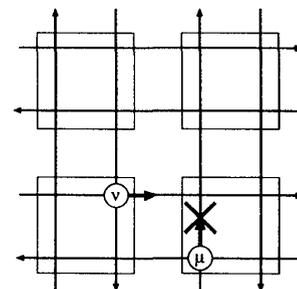


図9: 渋滞の核を避けるために導入された禁則ルール

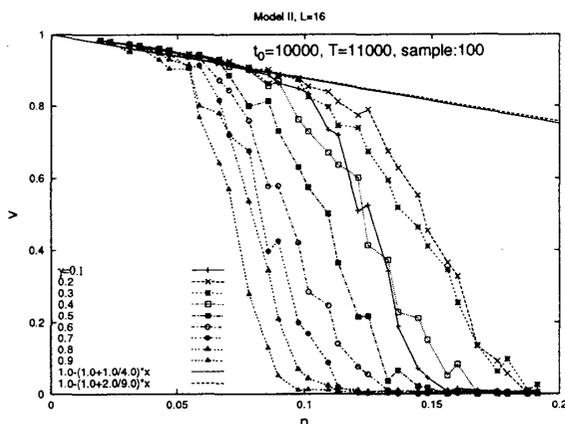


図 10 : 禁止ルール導入後における速度  $v$  の密度  $n$  依存性

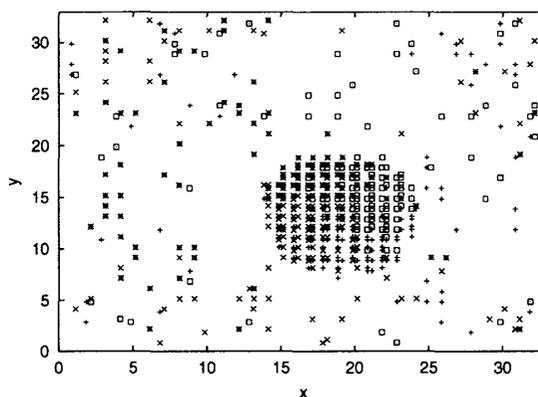


図 11 :  $\gamma = 0.1, n = 0.125$  の場合における車の配置の一例

### 3.2 渋滞の発生を緩和する禁止ルール

図 8 に示されたような車の配置がいったん構成されると、本モデルではそれが解消されることはない。そこで、図 9 に示されるような禁止ルールを導入し渋滞の核の発生を抑制するモデルに対しても同様にシミュレーションを行った。その結果を図 10 に示した。禁止ルールを導入しなかった場合に比べて 2 倍から 5 倍の車の密度まで渋滞が起これないことがわかる。実線と破線の直線で示したのは、1 体近似を用いて自由移動相の車の速度を解析的に求めた結果を示している。詳細は次節で説明するが、自由移動相では速度が  $\gamma$  の値にほとんど依存しないのが特徴である。

図 11 には比較的低密度で渋滞が起こる場合の車の配置例を示した。車の進行方向として 2 方向しか考慮しない BML モデルとは異なる渋滞形成が起こっていることがわかる。

## 4 自由移動相における車の速度

数値シミュレーションの結果をみると、自由移動相の車の速度はほとんど方向転換率  $\gamma$  に依存しないように見える (図 10 参照)。そこで、1 体近似を用いて、自由移動相における車の速度にたいする  $\gamma$  の影響は小さいことを示す。

4 種類の車は進む方向がそれぞれ異なるだけで、速度に対する寄与は同じであるということを用いる。また、速度は 2 次元空間の位置に依存しないと考えられるので、式 (4) から次式が得られる。

$$\begin{aligned}
 v &= \langle v(t) \rangle \\
 &\simeq \frac{4}{2N} \sum_{\vec{r}, \psi} \left\langle \left( \mu_{\vec{r}, \psi}^{t+1} - \mu_{\vec{r}, \psi}^t \right)^2 \right\rangle \\
 &= \frac{2}{N} \sum_{\vec{r}, \psi} \left\langle \left( \mu_{\vec{r}, \psi}^{t+1} + \mu_{\vec{r}, \psi}^t - 2\mu_{\vec{r}, \psi}^{t+1} \mu_{\vec{r}, \psi}^t \right) \right\rangle
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2}{N} \left( \frac{N}{4} + \frac{N}{4} \right) - \frac{4}{N} \sum_{\bar{r}, \psi} \langle \mu_{\bar{r}, \psi}^{t+1} \mu_{\bar{r}, \psi}^t \rangle \\
 &\simeq 1 - \frac{4L^2}{N} \sum_{\psi} \langle \mu_{\bar{r}, \psi}^{t+1} \mu_{\bar{r}, \psi}^t \rangle \\
 &= 1 - \frac{1}{n} \sum_{\psi} \langle \mu_{\bar{r}, \psi}^{t+1} \mu_{\bar{r}, \psi}^t \rangle \tag{6}
 \end{aligned}$$

この式は、車の存在を意味するブール変数の時間相関を見積もれば、速度が求められることを表している。

$\mu$ -型車が占めることのできる交差点内の位置は (11), (21) そして (12) の 3 箇所であるから、 $\langle \mu_{\bar{r}(11)}^t \rangle \simeq n/3$  などと近似できる。また、 $\xi$  は方向転換をする際には 1 で、しない時には 0 であるから、 $\langle \xi \rangle \simeq \gamma$ ,  $\langle \bar{\xi} \rangle \simeq 1 - \gamma$ , と近似できる。信号は、位置に依存せず、奇数時間ステップと偶数時間ステップごとに交互に状態が変わるので、自由移動相では車の動きが信号に遮られることはない。すなわち、 $\langle \bar{\sigma} \rangle \simeq 1$ ,  $\langle \sigma \rangle \simeq 0$  と近似できる。これらの近似を 1 体近似と組み合わせて、 $S_{\bar{r}(11)}^{t+1}$  との相関にもちいると、次式が得られる。

$$\begin{aligned}
 \langle S_{\bar{r}(11)}^{t+1} \mu_{\bar{r}(11)}^t \rangle &= \langle \mu_{\bar{r}(11)}^t \bar{\xi}_{\bar{r}(11)}^t \sigma^t \rangle \\
 &\quad + \langle \mu_{\bar{r}(11)}^t \bar{\xi}_{\bar{r}(11)}^t \bar{\sigma}^t (\nu_{\bar{r}(12)}^t + \mu_{\bar{r}(12)}^t + \beta_{\bar{r}(12)}^t) \rangle \\
 &\quad + \langle \mu_{\bar{r}(11)}^t \xi_{\bar{r}(11)}^t (\alpha_{\bar{r}-\bar{x}(21)}^t + \beta_{\bar{r}-\bar{x}(21)}^t + \mu_{\bar{r}-\bar{x}(21)}^t) \rangle \\
 &\quad + \langle \mu_{\bar{r}(11)}^t \xi_{\bar{r}(11)}^t \bar{\sigma}^t (\bar{\xi}_{\bar{r}-\bar{x}(22)}^t + \alpha_{\bar{r}-\bar{x}(22)}^t) \rangle \\
 &\simeq \frac{n}{3} (1 - \gamma) n + \frac{n}{3} \gamma n + \frac{n}{3} \gamma \left( (1 - \gamma) \frac{n}{3} + \frac{n}{3} \right) \\
 &= \frac{n^2}{3} + \frac{n^2}{9} \gamma (2 - \gamma) \tag{7}
 \end{aligned}$$

また、 $\mu \bar{\mu} = 0$  であるから、

$$\langle M_{\bar{r}, \psi}^{t+1} \mu_{\bar{r}, \psi}^t \rangle = 0 \tag{8}$$

が得られる。

$\bar{r}(12)$ ,  $\bar{r}(21)$  に関しても同様の近似を適用すると次の 2 式が得られる。

$$\begin{aligned}
 \langle S_{\bar{r}(12)}^{t+1}(\mu) \mu_{\bar{r}(12)}^t \rangle &= \langle \mu_{\bar{r}(12)}^t (\mu_{\bar{r}+\bar{y}(11)}^t + \nu_{\bar{r}+\bar{y}(11)}^t + \alpha_{\bar{r}+\bar{y}(11)}^t) \rangle \\
 &\quad + \langle \mu_{\bar{r}(12)}^t \sigma^t (1 - \mu_{\bar{r}+\bar{y}(11)}^t) (1 - \nu_{\bar{r}+\bar{y}(11)}^t) (1 - \alpha_{\bar{r}+\bar{y}(11)}^t) \\
 &\quad \quad \times (\bar{\xi}_{\bar{r}+\bar{y}(21)}^t \alpha_{\bar{r}+\bar{y}(21)}^t + \mu_{\bar{r}+\bar{y}(21)}^t) \rangle \\
 &\simeq \frac{n^2}{3} + \frac{n}{3} \left( (1 - \gamma) \frac{n}{3} + \frac{n}{3} \right) \tag{9}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle S_{\bar{r}(21)}^{t+1}(\mu) \mu_{\bar{r}(21)}^t \rangle &= \langle \mu_{\bar{r}(21)}^t \sigma^t (\mu_{\bar{r}(11)}^t + \nu_{\bar{r}(11)}^t + \alpha_{\bar{r}(11)}^t) \rangle \\
 &\simeq \frac{n^2}{3} \tag{10}
 \end{aligned}$$

式 (7)– (10) を式 (6) に用いると

$$\begin{aligned}
 v &\simeq 1 - \frac{1}{n} \sum_{\psi} \langle \mu_{\vec{r},\psi}^{t+1} \mu_{\vec{r},\psi}^t \rangle \\
 &\simeq 1 - \frac{1}{n} \sum_{\psi} \langle S_{\vec{r}\psi}^t(\mu) \mu_{\vec{r},\psi}^t \rangle \\
 &= 1 - \left\{ 1 + \frac{1}{9}(2 - \gamma)(1 + \gamma) \right\} n
 \end{aligned} \tag{11}$$

となる。これは、自由移動相における車の速度にたいして、 $\gamma = 1/2$  のとき  $n$  依存性が最も大きくなり、 $\gamma = 0$  と  $\gamma = 1$  のとき最も小さくなることを意味する。それぞれの場合を図 10 の実線と破線の直線で表したが、自由移動相における速度の  $\gamma$  依存性は小さいことがわかる。

## 5 おわりに

本研究では、2次元正方格子上的4方向交通流をセルオートマトンを用いてモデル化した。数値シミュレーションを用いて、2方向モデルの場合と同様に自由移動相から渋滞相への相転移があることを発見した。2方向モデルとの大きな違いは、車の方向転換を導入することにより渋滞の核となる配置が発生しやすくなり、比較的低い車の密度で渋滞が発生してしまう点である。これは、渋滞の核となる配置を規制するような禁止ルールを導入することにより大幅に緩和された。

また、自由移動相の車の速度は、1体近似を用いて説明され、車の方向転換率にほとんど依存しないが、車の密度には依存することが明らかになった。

## 参考文献

- [1] O. Biham, A. A. Middleton and D. Levine, Phys. Rev. A **46** (1992) R6124.
- [2] J. A. Cuesta, F. C. Martínez, J. M. Molera and A. Sánchez, Phys. Rev. E **48** (1993) R4175.
- [3] T. Nagatani, Phys. Rev. E **48** (1993) 3290.
- [4] S. Tadaki and M. Kikuchi, Phys. Rev. E **50** (1994) 4564.
- [5] T. Horiguchi and T. Sakakibara, Physica A **252** (1998) 388.
- [6] T. Horiguchi and T. Sakakibara, Interdis. Inf. Sci. **4** (1998) 39.