

# 確率モデルを用いた画像修復と統計的手法

東北大学大学院 情報科学研究科 情報基礎科学専攻 田中和之<sup>1</sup>

## 1 はじめに.

ベイズ統計を用いた画像修復は事後確率分布に対する最適化問題として定式化されるがここでハイパーパラメータを如何にして決定するかが重要な問題となる. ハイパーパラメータの決定に対する統計的手法としてよく用いられる方法に最尤推定 [1] およびそれを拡張した最大周辺尤度推定 [2] がある. また, これらの方法の他に絶対零度における定式化として拘束条件付き最適化の方法 [3] も提案されている. 本稿では, これらのハイパーパラメータ決定法に対して統計力学的解析手法である平均場近似およびベータ近似を適用した検討を行う.

## 2 マルコフ確率場モデルと最大周辺尤度推定.

正方格子  $\mathbf{I} \equiv \{(i, j) | i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, M\}$  上で画像修復を考え, 原画像, 劣化画像に対する確率場は  $\mathbf{X} = \{X_{i,j} | (i, j) \in \mathbf{I}\}$ ,  $\mathbf{Y} = \{Y_{i,j} | (i, j) \in \mathbf{I}\}$  でそれぞれ表すこととする. 観測された劣化画像  $\mathbf{y}^* \equiv \{y_{i,j}^* | (i, j) \in \mathbf{I}\}$  は劣化の度合いを表すハイパーパラメータ  $p^*$  をある値に指定することにより, 真の原画像  $\mathbf{x}^* \equiv \{x_{i,j}^* | (i, j) \in \mathbf{I}\}$  が与えられたという条件のもとでの確率分布  $\Pr\{\mathbf{Y} = \mathbf{y} | \mathbf{X} = \mathbf{x}^*, p^*\}$  に従って生成されたものであると仮定する. 本稿ではこの劣化過程を表す条件付き確率分布  $\Pr\{\mathbf{Y} = \mathbf{y} | \mathbf{X} = \mathbf{x}^*, p\}$  は以下の形で与えられるものとする.

$$\begin{aligned} \Pr\{\mathbf{Y} = \mathbf{y} | \mathbf{X} = \mathbf{x}^*, p^*\} &\equiv \prod_{(i,j) \in \mathbf{I}} \left\{ (1 - \delta(x_{i,j}^*, y_{i,j})) p^* + (1 - q p^* + p) \delta(x_{i,j}^*, y_{i,j}) \right\} \\ &= \frac{\exp\left(-\frac{1}{T(p^*)} d(\mathbf{x}^*, \mathbf{y})\right)}{\sum_{\mathbf{y}} \exp\left(-\frac{1}{T(p^*)} d(\mathbf{x}^*, \mathbf{y})\right)} \end{aligned} \quad (1)$$

$$d(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \equiv \sum_{(i,j) \in \mathbf{I}} (1 - \delta(x_{i,j}^*, y_{i,j})), \quad T(p^*) \equiv \frac{1}{\ln\left(\frac{1 - q p^* + p}{p^*}\right)} \quad (2)$$

ここで  $\delta(a, b) = \delta_{ab}$  はクロネッカーのデルタである. 更に原画像に対する事前情報として, 真の原画像  $\mathbf{x}^*$  は事前確率分布  $\Pr\{\mathbf{X} = \mathbf{x}\}$  の高い確率で生成される画像の一つであ

<sup>1</sup>E-mail: kazu@statp.is.tohoku.ac.jp

るとする. これらの前提の下で劣化画像  $\mathbf{y}^*$  が与えられたという条件のもとでの原画像が  $\mathbf{x} \equiv \{x_{i,j} | (i,j) \in \mathbf{I}\}$  である条件付き確率分布, すなわち事後確率分布  $\Pr\{\mathbf{X} = \mathbf{x} | \mathbf{Y} = \mathbf{y}^*, p^*\}$  はベイズの公式により以下のように与えられる.

$$\Pr\{\mathbf{X} = \mathbf{x} | \mathbf{Y} = \mathbf{y}^*, p^*\} = \frac{\Pr\{\mathbf{Y} = \mathbf{y} | \mathbf{X} = \mathbf{x}^*, p^*\} \Pr\{\mathbf{X} = \mathbf{x}\}}{\sum_{\mathbf{x}} \Pr\{\mathbf{Y} = \mathbf{y} | \mathbf{X} = \mathbf{x}^*, p^*\} \Pr\{\mathbf{X} = \mathbf{x}\}}. \quad (3)$$

事後確率分布  $\Pr\{\mathbf{X} = \mathbf{x} | \mathbf{Y} = \mathbf{y}^*, p^*\}$  から原画像の推定値, すなわち修復画像  $\hat{\mathbf{x}}$  は以下の最大事後確率推定により決定される.

$$\hat{\mathbf{x}} = \operatorname{argmax}_{\mathbf{x}} \Pr\{\mathbf{X} = \mathbf{x} | \mathbf{Y} = \mathbf{y}^*, p^*\} \quad (4)$$

そこでまず統計科学の立場に立って具体的に事後確率分布を構成とハイパーパラメータの決定についてのシナリオを説明する. この場合, 事前確率分布  $\Pr\{\mathbf{X} = \mathbf{x}\}$  は以下の形で与えられるものとする.

$$\Pr\{\mathbf{X} = \mathbf{x}\} = \Pr\{\mathbf{X} = \mathbf{x} | K\} \equiv \frac{\exp(-K\sigma_2(\mathbf{x}))}{\sum_{\mathbf{x}} \exp(-K\sigma_2(\mathbf{x}))} \quad (5)$$

$$\sigma_2(\mathbf{x}) \equiv \sum_{(i,j) \in \mathbf{I}} (2 - \delta(x_{i,j}, x_{i+1,j}) - \delta(x_{i,j}, x_{i,j+1})) \quad (6)$$

式 (1) および式 (5) をベイズの公式 (3) に代入して整理してみると, 事後確率分布は以下のように書き直される.

$$\begin{aligned} \Pr\{\mathbf{X} = \mathbf{x} | \mathbf{Y} = \mathbf{y}^*, p^*\} &= \Pr\{\mathbf{X} = \mathbf{x} | \mathbf{Y} = \mathbf{y}^*, p^*, K^*\} \\ &= \frac{\exp\left(-\frac{1}{T(p^*)} E(\mathbf{x}^* | \mathbf{y}, J(p^*, K^*))\right)}{\sum_{\mathbf{x}} \exp\left(-\frac{1}{T(p^*)} E(\mathbf{x}^* | \mathbf{y}, J(p^*, K^*))\right)} \end{aligned} \quad (7)$$

$$J(p^*, K^*) \equiv T(p^*) K^* \quad (8)$$

ここで  $T(p^*)$ ,  $J(p^*, K^*)$  とは全く無関係に任意の正の実数  $T$  および任意の実数  $J$  に対してエネルギー関数

$$E(\mathbf{x} | \mathbf{y}^*, T, J) \equiv d(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) + J\sigma_2(\mathbf{x}^*) \quad (9)$$

とギブス分布

$$\rho(\mathbf{x} | \mathbf{y}^*, T, J) \equiv \frac{\exp\left(-\frac{1}{T} E(\mathbf{x} | \mathbf{y}^*, J)\right)}{\sum_{\mathbf{x}} \exp\left(-\frac{1}{T} E(\mathbf{x} | \mathbf{y}^*, J)\right)} \quad (10)$$

を導入する. 事後確率分布 (7) において  $T(p^*)$  は常に正の実数であることを考慮すると, 推定画像  $\mathbf{x}$  は最大事後確率推定 (4) で評価しても, 任意の正の実数  $T$  に対して

$$\hat{\mathbf{x}} = \operatorname{argmax}_{\mathbf{x}} \rho(\mathbf{x} | \mathbf{y}^*, T, J(p^*, K^*)) \quad (11)$$

による出現確率最大化により評価しても等価であり、更にはエネルギー最小化問題

$$\hat{\mathbf{x}} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{x}} E(\mathbf{x} | \mathbf{y}^*, J(p^*, K^*)) \quad (12)$$

にも帰着される. ハイパーパラメータ  $p^*, K^*$  に対する推定値  $\hat{p}, \hat{K}$  は統計科学の立場に置いては最尤推定 [1] または最大周辺尤度推定 [2] に従って決定される. 最尤推定においてはハイパーパラメータ  $p^*, K^*$  の値が与えられたという状況のもとでの原画像と劣化画像に対する結合確率分布

$$\Pr\{\mathbf{X} = \mathbf{x}, \mathbf{Y} = \mathbf{y} | p^*, K^*\} \equiv \Pr\{\mathbf{Y} = \mathbf{y} | \mathbf{X} = \mathbf{x}, p^*\} \Pr\{\mathbf{X} = \mathbf{x} | K^*\}$$

を真の原画像  $\mathbf{x}^*$  とその原画像から生成され観測された劣化画像  $\mathbf{y}^*$  が与えられたという状況の下でのハイパーパラメータ  $p, K$  に対する尤度関数  $\Pr\{\mathbf{X} = \mathbf{x}^*, \mathbf{Y} = \mathbf{y}^* | p, K\}$  と見なして最大化するように推定値  $\hat{p}, \hat{K}$  を決定しようというものである.

$$\begin{aligned} (\hat{p}, \hat{K}) &= \operatorname{argmax}_{(p, K)} \Pr\{\mathbf{X} = \mathbf{x}^*, \mathbf{Y} = \mathbf{y}^* | p, K\} \\ &= \operatorname{argmax}_{(p, K)} \Pr\{\mathbf{Y} = \mathbf{y}^* | \mathbf{X} = \mathbf{x}^*, p\} \Pr\{\mathbf{X} = \mathbf{x}^* | K\} \end{aligned} \quad (13)$$

尤度関数  $\Pr\{\mathbf{X} = \mathbf{x}^*, \mathbf{Y} = \mathbf{y}^* | p, K\}$  の  $p$  と  $K$  に対する極値の条件から実際の計算においては  $\hat{p}$  と  $\hat{K}$  は以下の方程式から決定される.

$$\sum_{\mathbf{x}} d(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \Pr\{\mathbf{Y} = \mathbf{y}^* | \mathbf{X} = \mathbf{x}, \hat{p}\} = d(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*), \quad \sum_{\mathbf{x}} \sigma_2(\mathbf{x}) \Pr\{\mathbf{X} = \mathbf{x} | \hat{K}\} = \sigma_2(\mathbf{x}^*) \quad (14)$$

また、最大周辺尤度推定においては尤度関数  $\Pr\{\mathbf{X} = \mathbf{x}^*, \mathbf{Y} = \mathbf{y}^* | p, K\}$  から定義される周辺尤度関数

$$L(p, K) \equiv \sum_{\mathbf{x}} \Pr\{\mathbf{X} = \mathbf{x}, \mathbf{Y} = \mathbf{y}^* | p, K\} \quad (15)$$

を最大化するように推定値  $\hat{p}, \hat{K}$  を決定しようというものである.

$$\begin{aligned} (\hat{p}, \hat{K}) &= \operatorname{argmax}_{(p, K)} L(p, K) = \operatorname{argmax}_{(p, K)} \sum_{\mathbf{x}} \Pr\{\mathbf{X} = \mathbf{x}, \mathbf{Y} = \mathbf{y}^* | p, K\} \\ &= \operatorname{argmax}_{(p, K)} \sum_{\mathbf{x}} \Pr\{\mathbf{Y} = \mathbf{y}^* | \mathbf{X} = \mathbf{x}, p\} \Pr\{\mathbf{X} = \mathbf{x} | K\} \end{aligned} \quad (16)$$

周辺尤度関数  $L(p, K)$  の  $p$  と  $K$  に対する極値の条件から実際の計算においては  $\hat{p}$  と  $\hat{K}$  は以下の方程式から決定される.

$$\sum_{\mathbf{x}} d(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \Pr\{\mathbf{X} = \mathbf{x} | \mathbf{Y} = \mathbf{y}^*, \hat{p}, \hat{K}\} = \sum_{\mathbf{x}} d(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \Pr\{\mathbf{Y} = \mathbf{y}^* | \mathbf{X} = \mathbf{x}, \hat{p}\} \quad (17)$$

$$\sum_{\mathbf{x}} \sigma_2(\mathbf{x}) \Pr\{\mathbf{X} = \mathbf{x} | \mathbf{Y} = \mathbf{y}^*, \hat{p}, \hat{K}\} = \sum_{\mathbf{x}} \sigma_2(\mathbf{x}) \Pr\{\mathbf{X} = \mathbf{x} | \hat{K}\} \quad (18)$$

統計科学の立場と全く異なる推定法に拘束条件付き最適化による方法 [3] がある. この方法においては事前確率分布として式 (5) の代わりに以下の分布が採用される.

$$\Pr\{\mathbf{X} = \mathbf{x}\} \equiv \frac{\delta(\sigma_2(\mathbf{x}), \sigma_2(\mathbf{x}^*))}{\sum_{\mathbf{x}} \delta(\sigma_2(\mathbf{x}), \sigma_2(\mathbf{x}^*))} \quad (19)$$

式 (1) と式 (19) を式 (3) に代入し, 得られた事後確率分布  $\Pr\{\mathbf{X} = \mathbf{x} | \mathbf{Y} = \mathbf{y}^*, p^*\}$  に対して最大事後確率推定 (4) を見直すことにより, 原画像に対する推定画像  $\hat{\mathbf{x}}$  は以下のような拘束条件付き最適化問題に帰着される.

$$\hat{\mathbf{x}} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{x}} \{d(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) | \sigma_2(\mathbf{x}) = \sigma_2(\mathbf{x}^*)\} \quad (20)$$

拘束条件  $\sigma_2(\mathbf{x}) = \sigma_2(\mathbf{x}^*)$  に対してラグランジュの未定乗数  $J$  を導入することにより以下のようなエネルギー最小化問題に帰着される.

$$\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}(\hat{J}) = \operatorname{argmin}_{\mathbf{x}} E(\mathbf{x} | \mathbf{y}^*, \hat{J}), \quad \hat{J} = \arg\{\mathbf{x}(J) | \sigma_2(\mathbf{x}(J)) = \sigma_2(\mathbf{x}^*)\} \quad (21)$$

このエネルギー最小化問題は任意の正の  $T$  に対して以下の確率最大化問題に等価であることは明らかである.

$$\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}(\hat{J}) = \operatorname{argmax}_{\mathbf{x}} \rho(\mathbf{x} | \mathbf{y}^*, T, \hat{J}), \quad (T > 0) \quad (22)$$

### 3 平均場近似とベータ近似による反復計算アルゴリズム

前節で問題設定の定式化を与えたが  $\exp(MN)$  のオーダーの膨大な計算量を必要とするため, 本節ではこれを  $MN$  のオーダーの計算量で精度良く計算する統計力学的近似解析手法として平均場近似とベータ近似を与える.

式 (10) により与えられるギブス分布  $\rho(\mathbf{x} | \mathbf{y}^*, T, J)$  は以下の自由エネルギー最小の変分原理を満たすことが知られてる.

$$\rho(\mathbf{x} | \mathbf{y}^*, T, J) = \arg \min_f \left\{ f(\mathbf{x}) \left( E(\mathbf{x} | \mathbf{y}^*, T, J) + T \ln(f(\mathbf{x})) \right) \right\} \quad (23)$$

平均場近似の場合, 確率分布  $\rho(\mathbf{x} | \mathbf{y}^*, T, J)$  から各画素  $i$  ごとに周辺確率分布

$$\rho_{i,j}^{(1)}(m | \mathbf{y}^*, T, J) \equiv \sum_{\mathbf{x}} \rho(\mathbf{x} | \mathbf{y}^*, T, J) \delta(x_{i,j}, m) \quad (24)$$

を導入し,  $\rho(\mathbf{x} | \mathbf{y}^*, T, J)$  を以下のように近似的に表されるものと仮定する.

$$\rho(\mathbf{x} | \mathbf{y}^*, T, J) \simeq \prod_{(i,j) \in \mathbf{I}} \rho_{i,j}(x_{i,j} | \mathbf{y}^*, T, J) \quad (25)$$

ベータ近似 [4] の場合, 更に各最近接画素対ごとに周辺確率分布

$$\rho_{i,j}^{(2h)}(m, m' | \mathbf{y}^*, T, J) \equiv \sum_{\mathbf{x}} \rho(\mathbf{x} | \mathbf{y}^*, T, J) \delta(x_{i,j}, m) \delta(x_{i+1,j}, m') \quad (26)$$

$$\rho_{i,j}^{(2v)}(m, m' | \mathbf{y}^*, T, J) \equiv \sum_{\mathbf{x}} \rho(\mathbf{x} | \mathbf{y}^*, T, J) \delta(x_{i,j}, m) \delta(x_{i,j+1}, m') \quad (27)$$

を導入し,  $\rho(\mathbf{x} | \mathbf{y}^*, T, J)$  が以下のように近似的に表されるものと仮定する.

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x} | \mathbf{y}^*, T, J) \simeq & \prod_{(i,j) \in \mathbf{I}} \rho_{i,j}^{(1)}(x_{i,j} | \mathbf{y}^*, T, J) \prod_{(i,j) \in \mathbf{I}} \frac{\rho_{i,j}^{(2h)}(x_{i,j}, x_{i+1,j} | \mathbf{y}^*, T, J)}{\rho_{i,j}^{(1)}(x_{i,j} | \mathbf{y}^*, T, J) \rho_{i+1,j}^{(1)}(x_{i+1,j} | \mathbf{y}^*, T, J)} \\ & \times \prod_{(i,j) \in \mathbf{I}} \frac{\rho_{i,j}^{(2v)}(x_{i,j}, x_{i,j+1} | \mathbf{y}^*, T, J)}{\rho_{i,j}^{(1)}(x_{i,j} | \mathbf{y}^*, T, J) \rho_{i,j+1}^{(1)}(x_{i,j+1} | \mathbf{y}^*, T, J)} \quad (28) \end{aligned}$$

いずれの場合にも式 (25) および (28) の右辺を  $\rho(\mathbf{x} | \mathbf{y}^*, T, J) \{E(\mathbf{x} | \mathbf{y}^*, T, J) + T \ln(\rho(\mathbf{x} | \mathbf{y}^*, T, J))\}$  に代入し, 周辺確率分布に対するいくつかの拘束条件のもとで変分をとることにより周辺確率分布に対する非線形方程式が得られる. これを反復法により数値的に解くことにより近似的に  $T$  および  $J$  の様々の値に対して周辺確率分布が計算され, 式 (22) で与えられた最適解  $\mathbf{x}(J)$  は十分小さい  $T$  の値に対して

$$\hat{x}_{i,j}(J) = \arg \max_{m=0,1,2,\dots,q-1} \rho_{i,j}^{(1)}(m | \mathbf{y}^*, T, J) \quad (29)$$

により得ることもできる.

#### 4 $d(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ および $\sigma_2(\mathbf{x}^*)$ の評価.

本節では  $d(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$  と  $\sigma_2(\mathbf{x}^*)$  の値を劣化画像  $\mathbf{y}^*$  から評価する方法を与える. この推定法は 2 値画像修復に対して文献 [3] で与えられているが, ここでは階調数が  $q$  の画像に対して一般化して簡単に説明する.

原画像  $\mathbf{x}^*$  に対する局所的な事前情報として次の等式が成り立つものと仮定する.

$$\left( \delta(x_{i-1,j}^*, x_{i,j}^*) + \delta(x_{i,j}^*, x_{i+1,j}^*) \right) \left( \delta(x_{i-1,j}^*, x_{i,j}^*) + \delta(x_{i,j}^*, x_{i+1,j}^*) \right) \neq 0 \quad (30)$$

この仮定は 3 つの縦方向または横方向に連続した画素に対して 010 あるいは 120 などのパターンは現れないということを意味する. 原画像および劣化画像において 3 つの縦方向または横方向に連続した画素が  $(m, m', m'')$  という値をとる確率を  $P_x(m, m', m'')$  および  $P_y(m, m', m'')$  として次の定義により導入する.

$$\begin{aligned} P_x(m, m', m'') \equiv & \frac{1}{2MN} \sum_{(i,j) \in \mathbf{I}} \left( \Pr\{X_{i-1,j} = m, X_{i,j} = m', X_{i+1,j} = m''\} \right. \\ & \left. + \Pr\{X_{i,j-1} = m, X_{i,j} = m', X_{i,j+1} = m''\} \right) \quad (31) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_y(m, m', m'') \equiv & \frac{1}{2MN} \sum_{(i,j) \in \mathbf{I}} \left( \Pr\{Y_{i-1,j} = m, Y_{i,j} = m', Y_{i+1,j} = m''\} \right. \\ & \left. + \Pr\{Y_{i,j-1} = m, Y_{i,j} = m', Y_{i,j+1} = m''\} \right) \quad (32) \end{aligned}$$

式 (1) により与えられる劣化過程から  $P_x(m, m', m'')$  と  $P_y(m, m', m'')$  の間には

$$P_y(m, m', m'') = \sum_{n \in \mathbf{Q}} \sum_{n' \in \mathbf{Q}} \sum_{n'' \in \mathbf{Q}} P_{yx}(m|n) P_{yx}(m'|n') P_{yx}(m''|n'') P_x(n, n', n''),$$

$$(m, m', m'' \in \mathbf{Q} \equiv \{0, 1, 2, \dots, q-1\}) \quad (33)$$

$$P_{yx}(n|m) \equiv p^{1-\delta(m,n)} (1 - qp + p)^{\delta(m,n)} \quad (m, n \in \mathbf{Q}) \quad (34)$$

という関係があることがわかる。また、仮定 (30) により

$$P_x(m, m', m'') = 0, \quad (m \neq m', m'' \neq m') \quad (35)$$

という性質が要請され、更に対称性によって

$$P_x(m, m', m'') = P_x(m'', m', m) \quad (36)$$

という性質をもつことも自然に理解できる。確率分布  $P_x(m, m', m'')$  および  $P_{xy}(m|n)$  から

$$\hat{\sigma}_2^x \equiv \sum_{n \in \mathbf{Q}} \sum_{n' \in \mathbf{Q}} \sum_{n'' \in \mathbf{Q}} P_x(n, n', n'') (1 - \delta(n, n')) \quad (37)$$

$$(q-1)\hat{p} \equiv \sum_{m \in \mathbf{Q}} \sum_{n \in \mathbf{Q}} P_{xy}(m|n) (1 - \delta(m, n)) \quad (38)$$

を導入すると、これらの量は  $\sigma_2(\mathbf{x}^*)/(2MN)$  および  $d(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)/(MN)$  の推定値として見なすことができる。式 (33), (35), (36) および式 (37), (38) をまとめることにより、 $\hat{\sigma}_2^x$  および  $\hat{p}$  に対する決定方程式を以下のように得ることができる。

$$\sigma_3^y = (q-1)\hat{p}(2 - q\hat{p}) + 2(1 - q\hat{p})^2 \hat{\sigma}_2^x \quad (39)$$

$$\sigma_2^y = (q-1)\hat{p}(2 - q\hat{p}) + (1 - q\hat{p})^2 \hat{\sigma}_2^x \quad (40)$$

$$\sigma_2^y \equiv \sum_{n \in \mathbf{Q}} \sum_{n' \in \mathbf{Q}} \sum_{n'' \in \mathbf{Q}} P_y(n, n', n'') (1 - \delta(n, n')) \quad (41)$$

$$\sigma_3^y \equiv \sum_{n \in \mathbf{Q}} \sum_{n' \in \mathbf{Q}} \sum_{n'' \in \mathbf{Q}} P_y(n, n', n'') (1 - \delta(n, n'')) \quad (42)$$

ここで  $\sigma_2^y$  および  $\sigma_3^y$  は観測された劣化画像  $\mathbf{y}^*$  から次の式により評価される。

$$\sigma_2^y = \frac{1}{2MN} \sum_{(i,j) \in \mathbf{I}} (2 - \delta(y_{i,j}^*, y_{i+1,j}^*) - \delta(y_{i,j}^*, y_{i,j+1}^*)) \quad (43)$$

$$\sigma_3^y = \frac{1}{2MN} \sum_{(i,j) \in \mathbf{I}} (2 - \delta(y_{i,j}^*, y_{i+2,j}^*) - \delta(y_{i,j}^*, y_{i,j+2}^*)) \quad (44)$$

## 5 数値実験.

本節では図 1(a) に示す 4 階調 ( $q = 4$ ) の原画像  $x^*$  および劣化画像  $y^*$  に対して数値実験の結果を与える.

図 1(b) の劣化画像  $y^*$  は  $(q - 1)p^* = 0.3$  と設定して式 (1) に従って生成されたものである. 原画像  $x^*$  および劣化画像  $y^*$  から  $d(x^*, y^*)$  および  $\sigma_2(x^*)$  を直接評価した場合

$$\left(\frac{1}{MN}\right)d(x^*, y^*) \simeq 0.29727, \quad \left(\frac{1}{2MN}\right)\sigma_2(x^*) \simeq 0.10036 \quad (45)$$

という値が与えられるが, 第 4 節に与えられた推定法で対応する値を評価した場合

$$(q - 1)\hat{p} \simeq 0.29608, \quad \hat{\sigma}_2^x \simeq 0.10050 \quad (46)$$

という推定値がそれぞれ得られる. この推定値をもとに第 2 節で説明した拘束条件付き最適化の方法, 最尤推定にもとづく方法, 最大周辺尤度推定により得られた修復画像  $\hat{x}$  を図 2 にそれぞれ与える. 図 2 では修復画像  $\hat{x}$  は第 3 節で与えた平均場近似及びベータ近似をもとにして構成された反復計算アルゴリズムを用いて得られている. ハイパーパラメータ  $\hat{J}$  および  $J(\hat{p}, \hat{K})$  の値は式 (46) の値を下にして第 2 節で与えられた各方法にもとづいて評価されている. 拘束条件付き最適化の方法はハイパーパラメータ  $\hat{J}$  を絶対零度におい

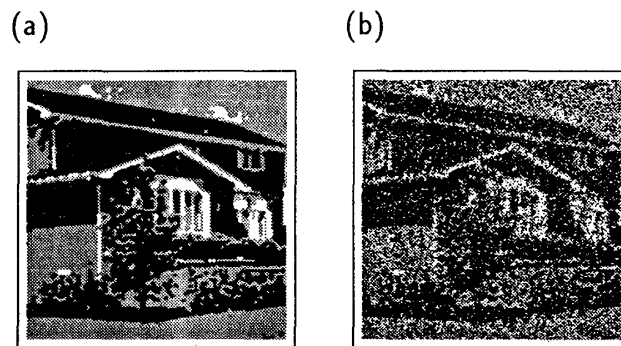


図 1: 原画像および劣化画像. (a) 原画像  $x^*$  ( $q = 4$ ,  $\sigma_2(x^*)/(2MN) \simeq 0.10036$ ). (b)  $(q - 1)p^* = 0.3$  と設定して生成された劣化画像  $y^*$  ( $d(x^*, y^*)/(MN) \simeq 0.29727$ ).

て決定しているがこの場合には平均場近似とベータ近似において修復結果にさほどの違いはみられないが, 最尤推定および最大尤度推定においてはハイパーパラメータ  $J(\hat{p}, \hat{K})$  は有限温度において決定されており, 特に最大周辺尤度推定では近似の精度がかなり影響していることがわかる.

## 謝辞

本稿を締めくくるにあたり, 著者との多くの議論にお付き合いいただいた東京工業大学大学院理工学研究科の西森秀稔教授, 東京工業大学大学院総合理工学研究科の樺島祥介講

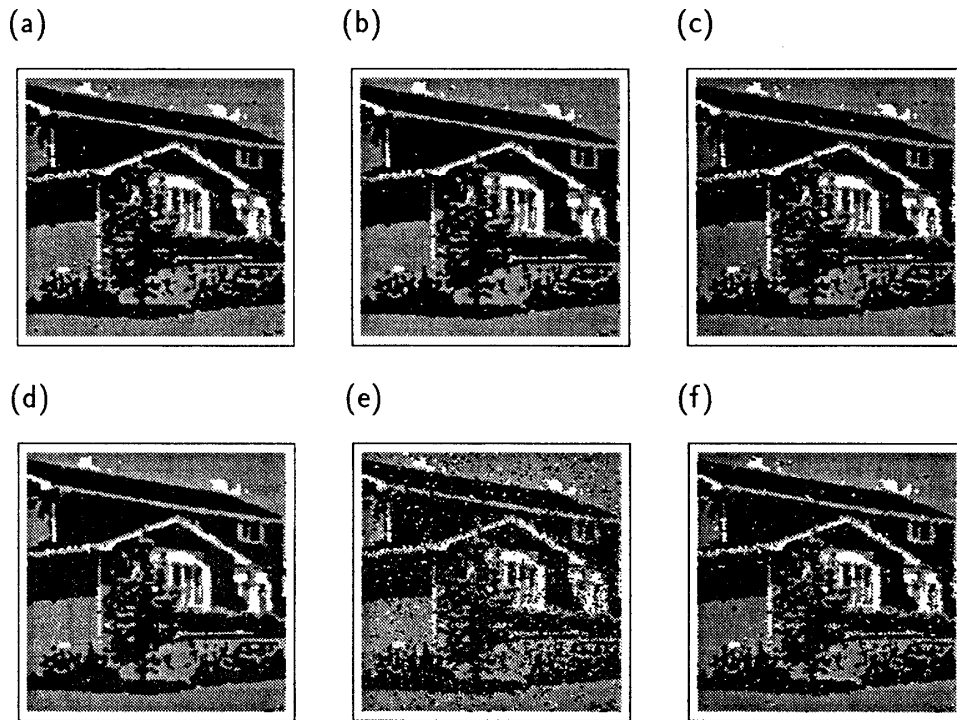


図 2: 図 1(b) に与えられた劣化画像  $y^*$  に対して得られた修復画像  $\hat{x}$ . (a) 拘束条件付き最適化と平均場近似 ( $\hat{J} = 0.57969$ ,  $d(\hat{x}, y^*)/(MN) \simeq 0.05916$ ). (b) 拘束条件付き最適化とベータ近似. ( $\hat{J} = 0.58052$ ,  $d(\hat{x}, y^*)/(MN) \simeq 0.05730$ ). (c) 最尤推定と平均場近似. ( $J(\hat{p}, \hat{K}) = 0.54704$ ,  $d(\hat{x}, y^*)/(MN) \simeq 0.06085$ ). (d) 最尤推定とベータ近似. ( $J(\hat{p}, \hat{K}) = 0.59177$ ,  $d(\hat{x}, y^*)/(MN) \simeq 0.05844$ ). (e) 最大周辺尤度推定と平均場近似. ( $J(\hat{p}, \hat{K}) = 0.36937$ ,  $d(\hat{x}, y^*)/(MN) \simeq 0.13367$ ). (f) 最大周辺尤度推定とベータ近似. ( $J(\hat{p}, \hat{K}) = 0.47121$ ,  $d(\hat{x}, y^*)/(MN) \simeq 0.08759$ ).

師, 日本大学工学部情報工学科の守田徹教授, 東北大学大学院情報科学研究科の堀口剛教授に深く感謝したい.

## 参考文献

- [1] S. Lakshmanan and H. Derin, IEEE Tran. Pattern Anal. and Mach. Intel. **11** (1989), 799.
- [2] J. M. Pryce and A. D. Bruce, J. Phys. A **28** (1995), 511.
- [3] T. Morita and K. Tanaka, Physica A, **223** (1996), 244.
- [4] K. Tanaka and T. Morita, Physics Letters A **203** (1995), 122.