

# リヤプノフベクトルによる多自由度カオスの解析

名古屋大学理学部物理R研  
小西哲郎

tkonishi@allegro.phys.nagoya-u.ac.jp

http://jegog.phys.nagoya-u.ac.jp/~tkonishi/research/

## 1 カオスとリヤプノフ数

図1はおなじみの2重振り子である。振幅が小さいときは基準振動の重ね合わせで規則的に運動する(図1(b))。このような場合には初期値を多少ずらしてもその後の運動にはあまり影響が無い。(図1(c))

ところが、振幅を大きくすると例えば下の振り子が一方向にぶんぶん回りだしたりして不規則な運動になる。例えば図2(a)では、 $t \sim 40$ 付近では、それまで振動していた下の振り子が右回りに2回半、続けて左回りに5回連続して回転している。このとき、初期値をわずかにずらしてみると、先程とは違ってその後の運動は大きく変わってしまう(図2(b))。

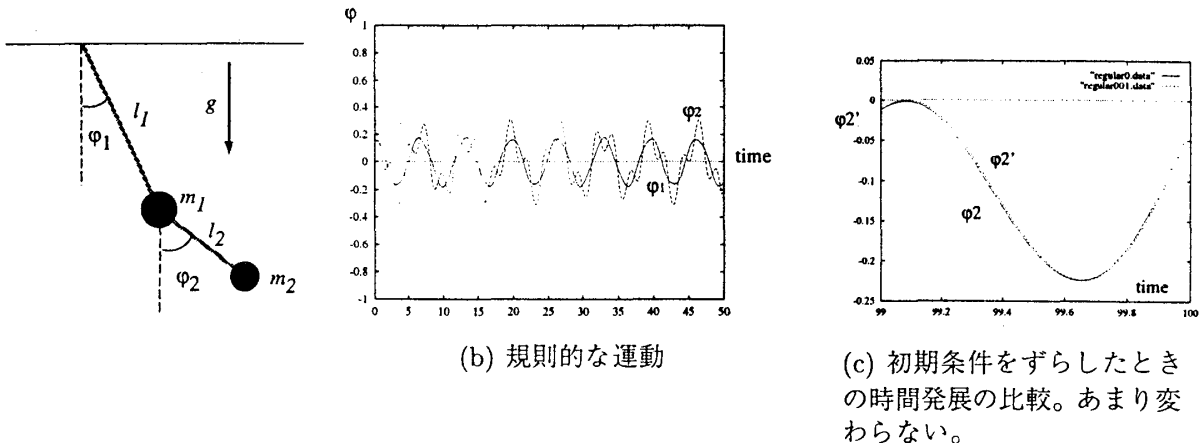


Figure 1: 2重振り子とその運動：規則的な場合

一般に、初期条件  $x_0$  を時刻  $t$  まで時間発展させる写像  $\phi_t : x_0 \mapsto x_t = \phi_t(x_0)$  を考えると、時刻  $t$  での系の状態  $x_t$  は初期値  $x_0$  を変化させるにつれて連続的に変化するという点においては、運動が規則的であろうと不規則であろうと変わりはない。別な言い方をすると、初期条件  $x_0 + \delta x_0$  に対して  $\phi_t(x_0 + \delta x_0) = x_t + \delta x_t$  と書けば、 $\phi_t$  が微分可能であれば初期値のずれ  $\delta x_0$  と時刻  $t$  でのずれ  $\delta x_t$  は(無次元の)係数  $C$  を用いて  $|\delta x_t| = C|\delta x_0|$  と書けてしまう。しかし、この無次元の係数  $C$  は実は時間の関数であり、

- 規則的な運動の場合 … たかだか  $|\delta x_t| \propto |\delta x_0| \cdot t$  と、時間に比例する程度

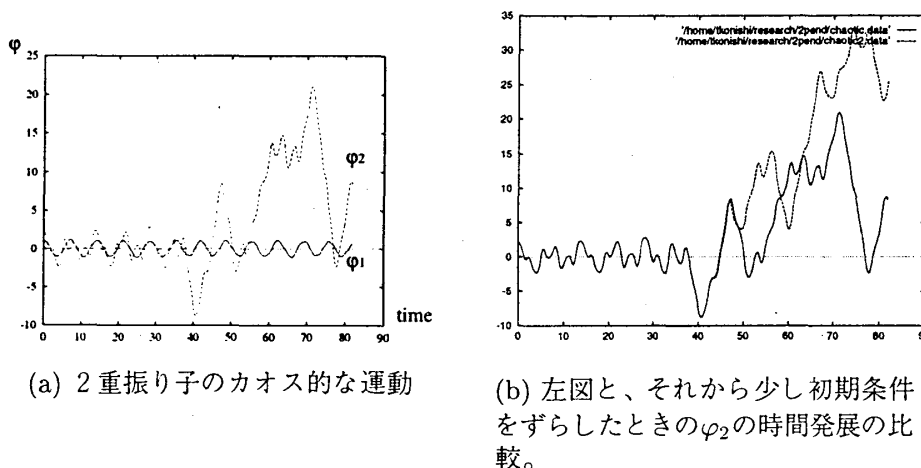


Figure 2: 2重振り子の運動：不規則な場合

- 不規則な運動の場合 …  $|\delta x_t| \propto |\delta x_0| \exp(\lambda t)$  と指数的に増大

と大きな差が出てしまう。この  $\lambda$  をリヤプノフ数(あるいはリヤプノフ指数)と呼ぶ。 $\lambda > 0$  の場合は系は「軌道不安定性がある」といい、このとき系はカオスであると呼ぶ。先程の2重振り子の不規則運動がこれである。

補足：なぜ運動の乱雑さと軌道不安定性が関係するかというと、もしも系に軌道不安定性があったとすると、系が各時刻にどんな状態にあったかによって後の時刻での状態が大きく変化することになり、規則的な運動でそういった状況をつくり出すことは無理である。<sup>1</sup>

$\lambda > 0$  である場合には、系は”予測不能”である。時刻  $t$  での状態を  $\varepsilon$  の精度で予測するために初期条件に要求される精度を考えてみると、

$$|\delta x_t| < \varepsilon \Leftrightarrow c|\delta x_0| \exp(\lambda t) < \varepsilon \Leftrightarrow |\delta x_0| < c^{-1}\varepsilon \exp(-\lambda t)$$

すなわち、 $t$  が大きくなるにつれて、 $x_0$  に要求される精度  $|\delta x_0|$  は極めて大きくなり、結局、先のことはどんどん予測できなくなっていく。(ノイズが入っていない時間発展なのに、実質的に予測不可能)

定義だけでは分かりにくいので次の1次元写像の例題を考えてみよう。 $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1], x \mapsto f(x) \equiv 2x \pmod{1}$   $f(x_t) = x_{t+1}$  により数列  $\{x_0, x_1, \dots\}$  を定めると、2つの初期値  $x_0, x_0 + \delta x_0$  に対し、 $x_t = f^{2t}(x_0) = 2^t x_0 \pmod{1}$ ,  $x'_t = f^{2t}(x_0 + \delta x_0) = x_t + \delta x_t$  から、 $\delta x_t = 2^t \delta x_0 = \delta x_0 \exp((\log 2)t)$  となるので、リヤプノフ数  $\lambda$  は  $\lambda = \log 2 (> 0)$  である。

<sup>1</sup>一方、もしも初期条件によらずに同一のしかし不規則な運動をするような系があったとすると、そこでは運動は乱雑だが軌道不安定性は無い、というちょっと病的な例外が発生する。

等比数列ではない一般の1次元写像  $x_t \mapsto x_{t+1} = F(x_t)$  ( $x_t \in \mathbf{R}$ ) に対しては、 $x_t = F(x_{t-1})$  であるから、

$$\begin{aligned} \delta x_t &= \frac{d}{dx} F(x_{t-1}) \delta x_{t-1} \\ &= \frac{d}{dx} F(x_{t-1}) \frac{d}{dx} F(x_{t-2}) \delta x_{t-2} \\ &= \dots \\ &= \frac{d}{dx} F(x_{t-1}) \frac{d}{dx} F(x_{t-2}) \cdots \frac{d}{dx} F(x_0) \delta x_0 \end{aligned}$$

となる。したがって、リヤプノフ数  $\lambda$  は

$$\left| \frac{dF}{dx}(x_{t-1}) \frac{dF}{dx}(x_{t-2}) \cdots \frac{dF}{dx}(x_0) \right| \sim \exp(\lambda t) \text{ as } t \rightarrow \infty$$

で定まる。(時刻  $t$  での線形化写像の固有値ではない。)

ここで一つ注意を挙げる。リヤプノフ数は、系の状態を知る上では意外と役に立たない。計算は容易だが、そのままでは「カオスか、カオスでないか」の差程度しかわからないのである。(  $\lambda = 0.1$  の系と、  $\lambda = 1$  の系の差にあまり意味は無い。) 特にハミルトン系の場合は可積分系という特異な例外を除けば大抵カオスになるのでリヤプノフ数だけではあまり情報が無い。リヤプノフ数を計算する際の時間的な収束の様子は系の特徴をつかむことができる [KK92, KK94]。

## 2 リヤプノフスペクトルとリヤプノフベクトル

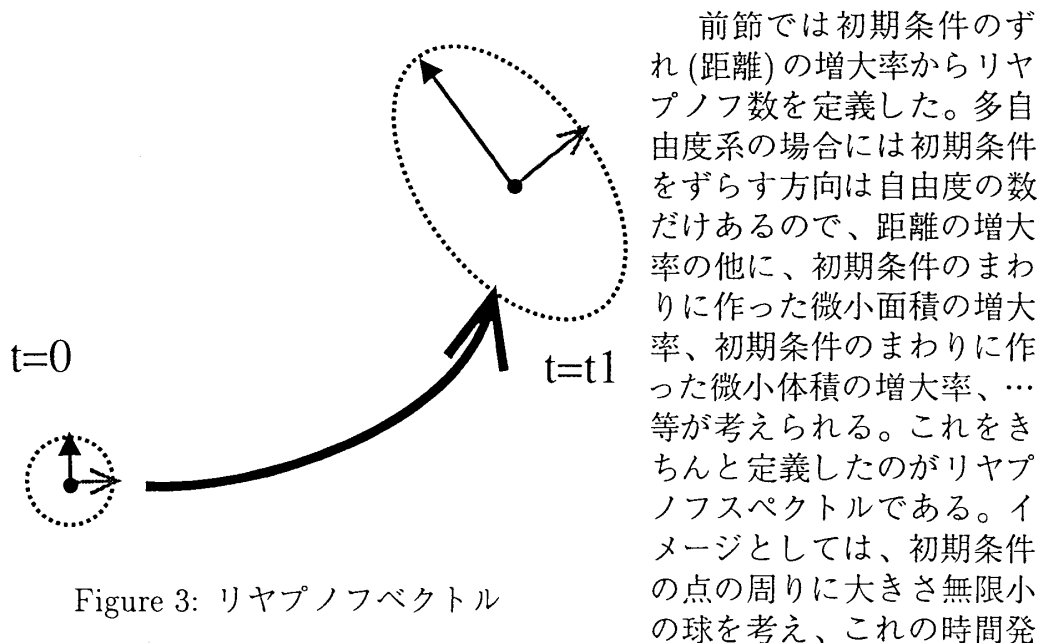


Figure 3: リヤプノフベクトル

展した楕円体の主軸を考えるので、図3のようになる。

力学変数  $z(t) = (z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t))$  (ハミルトン系の場合は  $n = 2N, z_i = q_i, z_{i+N} = p_i$ ) に対してヤコビ行列

$$M(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial(z(t))}{\partial(z(0))} \left( = \frac{\partial(q(t), p(t))}{\partial(q(0), p(0))} \right)$$

(これは前節で  $DF$  と書いたもの) を定めると、リヤプノフスペクトル  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  は行列  ${}^t M(T)M(T)$  の固有値の指数部分の係数であり、リヤプノフベクトル  $\vec{v}_i$  はその固有ベクトルである [ER85]. すなわち、 $t \rightarrow \infty$  につれて、 $N \times N$  行列  $P$  により

$${}^t M(T)M(T) = P \text{diag}(\exp(2\lambda_1 t), \exp(2\lambda_2 t), \dots, \exp(2\lambda_N t)) P^{-1}$$

と対角化される。 $\lambda_i$  は  $\vec{v}_i$  向きの不安定性を表している。

リヤプノフスペクトルおよび行列  $P$  (すなわちリヤプノフベクトル) は  $t$  によらず一定の値に収束する。(詳しくは Appendix A 参照.)

リヤプノフスペクトルの具体的な計算方法については例えば [SN79, ER85], その比較については [GPL93] を参照されたい。ただし、 $M$  ではなく  ${}^t M M$  が現われる理由が分かるようにここで簡単に概略だけべる。Appendix の最後に書いたように、リヤプノフ数を求めるには、初期ベクトル (初期条件の接空間にある)  $\vec{v}$  をとって来て、 $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log \|M(T) \vec{v}\|$  を求めれば良い。ここで

$$\|M(T) \vec{v}\|^2 \equiv {}^t \vec{v} {}^t M(T)M(T) \vec{v}$$

によって  ${}^t M M$  が現われる。

リヤプノフスペクトルが得られると分かることには以下のようなことがある；

- 形状そのものからの議論

たとえば、ゼロ付近の指数が多いということは、あまりカオス化していない自由度が多いという事であり、系は多自由度であっても本質的には低自由度カオスである事を意味する。

- リヤプノフスペクトルには系の詳細によらない普遍的な形があると考えられる場合があり [Rue82, EW88]、それを random matrix と比較することで実際の物理系の状態を知ろうとする試み [LPR86, Yam98]

- $h_{KS}$  : Kolmogolov-Sinai entropy (metric entropy と呼ぶ) との関係 (Pesin identity)  $h_{KS} = \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i$  から、リヤプノフスペクトルを求めることにより  $h_{KS}$  を求めることが出来る。ここで、 $h_{KS}$  は「時系列の  $-p \log p$ 」(どのくらい時系列にバリエーションがあるか) として定義される。[AA68, ER85]

一方、リヤプノフベクトルではつぎのような研究がある；

- ベクトルの局在性(成分における)とカオスの強さとの関係を議論したものがある [Kan86]。系の運動がカオス的であるならば、そのヤコビ行列はランダムマトリクスに近く、そこから作られる固有ベクトルも(アンダーソン局在同様)局在する傾向にある。
- また、リヤプノフベクトルを見ることで系がどのような不安定性を持っているのかを見ることが出来る。これに関しては次節で述べる。

### 3 多粒子系のクラスター構造とリヤプノフスペクトル, リヤプノフベクトル

ここでは多粒子系のカオスを作るクラスター構造の解析にリヤプノフスペクトルとベクトルを応用した話の概略を紹介する。詳しくは文献 [KK92, KK94] を参照されたい。

大域結合した symplectic map

$$p'_i = p_i + k \sum_{j=1}^N \sin 2\pi(x_j - x_i) \pmod{1}, \quad x'_i = x_i + p'_i \pmod{1}.$$

( $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $k > 0$  引力相互作用) では、系は結合定数  $k$  の値が同じでも初期条件により粒子が集合して運動するクラスター状態と一見無相関に運動する一様乱雑状態の 2 通りの運動形態をとる。ここで、2 つの状態ともカオスなので、系は時間とともにこの 2 状態の間を行き来することになる。(また、相空間内に 2 つの異なる性質のカオス領域が共存していることになる。)

リヤプノフスペクトルは両状態ではほぼ同じであったが、唯一異なったのは「最小」なもの  $\lambda_{N-1}$  の値であった ([KK92] の Fig.4) ;

$$\begin{cases} \lambda_i(\text{cluster}) \simeq \lambda_i(\text{非 cluster}) & i = 1, 2, \dots, N-2 \\ (0 <) \lambda_i(\text{cluster}) \ll \lambda_i(\text{非 cluster}) & i = N-1 \end{cases}$$

( $\lambda_N$  は、運動量保存則のために常に  $\lambda_N \equiv 0$  である。) そこで、この  $\lambda_{N-1}$  に対応する部分空間がクラスター構造に関係しているものと思われる。

註: リヤプノフ数の計測は有限時間内、すなわち、系がクラスター状態あるいは非クラスター状態にある時間範囲内で行った。

リヤプノフベクトルを調べてみると、クラスター状態での  $\lambda_{N-1}$  に対応するベクトルとそれ以外(クラスター状態での  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N-2$ ) に対応するものおよび非クラスター状態での全てのベクトル) では大きな違いが見られた。

今ここで簡単に「リヤプノフベクトルを調べてみると」と書いたが、 $2N$  次元のベクトルを調べると言ってもどう見たら良いか分からないと思うかも

知れない。が、今扱っているのは粒子系なので、 $2N$ 次元のベクトルは各粒子の座標と運動量のずれ

$$dq_1, dq_2, \dots, dq_N, dp_1, dp_2, \dots, dp_N$$

を表しており、 $2N$ 次元のベクトルを  $N$ 個の2次元ベクトル(今空間は1次元である)の集まり

$$(dq_1, dp_1), (dq_2, dp_2), \dots, (dq_N, dp_N)$$

として図示することが出来る。

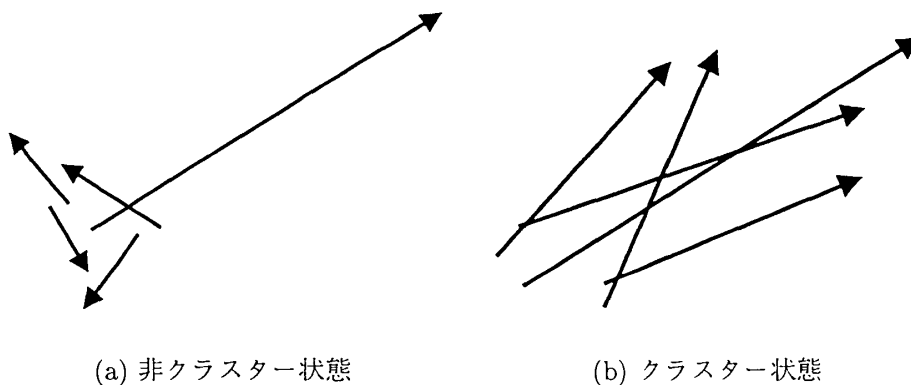


Figure 4:  $\lambda_{N-1}$ に対するリヤプノフベクトル。各粒子の一体相空間上の位置  $(q, p)$  を起点として描いてある。クラスター状態ではずれは各粒子ほぼ同じで、非クラスター状態ではバラバラ。

クラスター状態での  $\lambda_{N-1}$  に対応するベクトルは、多数の粒子をほぼ同じようにずらすずれを表していた ([KK92] Fig.9)。これは、個々の粒子よりは、クラスター全体をずらす事に対応した不安定性を表していることになる。クラスター(の重心)の軌道自身もカオス的なので、それがずれることに対応する不安定性である。

註2:  $\lambda_{N-1}$  はクラスターの軌道不安定性に関連したものであり、クラスター状態の寿命のタイムスケールとは直接の関係は無い。(場所がうろうろしているのであって、状態そのものが不安定という事とはまた違う。)

一方、それ  $(N-1)$  番目) 以外のリヤプノフベクトルは、粒子間の協同性は無く、どれか一つの粒子を大きくずらすようなずれを表していた ([KK92] Fig.9)。これはいわば熱的な不安定性と言えよう。模式的には図4の様に書かれる。

このように、リヤプノフスペクトルとリヤプノフベクトルを見ることにより、系のさまざまな軌道不安定性を、クラスター構造に関係した協同的なものとそうでないものに分離することが出来た。

## 4 まとめ

リヤプノフベクトルはリヤプノフスペクトルと並び多自由度系のカオスの特徴付ける基本的な特性量である。その計算方法も確立しており、系の時間発展法則が与えられればリヤプノフスペクトル・ベクトルを計算することは難しくない。

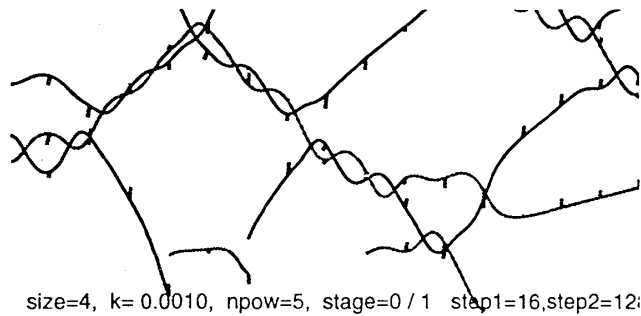


Figure 5: 短距離型モデルにおける時間発展. 横軸は時間、縦軸は座標

ただし、リヤプノフ解析をすればカオスの特性が良く分かるかと言うと必ずしもそうとは言い切れない。図5は前節で紹介した系の相互作用を短距離にしたもので、クラスタの生成崩壊がみられている。軌道の横にヒゲ状に書かれているのは各時刻でのリヤプノフベクトルである。この計算の狙いは、不安定性の向きを表すリヤプノフベクトル

を見ることにより、状態の変化のカオスとしての特徴を抜き出せるのではないかということである。ところがこれは失敗で、この図を見ても何もわからないのである。

現段階ではリヤプノフ解析で何が分かるのかは判然としておらず、スペクトルもベクトルも万能試薬とは言いがたい。リヤプノフスペクトル・ベクトルを計ることで系のどんな特性が明らかになるのかはまだ今後の研究を待たねばならない。

## A リヤプノフベクトルの収束 (Multiplicative ergodic theorem)

ここではリヤプノフスペクトルとリヤプノフベクトルに関連した定理である Oseledec の multiplicative ergodic theorem を紹介する [ER85]。

$M$ : 今考えている状態の空間 (相空間)

$\rho$ :  $M$  上の確率測度

$f: M \rightarrow M$ :  $M$  上の保測写像 (確率を保つ写像) であって、 $\rho$  がエルゴード的であるようなもの

$T: M \rightarrow M$ :  $m \times m$  行列で、

$$\int \rho(dx) \log^+ \|T(x)\| < \infty \quad (1)$$

であるようなもの。ここで、 $\log^+ u \equiv \max(0, \log u)$ 。

行列  $T_x^n$  を

$$T_x^n \stackrel{\text{def}}{=} T(f^{(n-1)}x) \cdots T(fx)T(x). \quad (2)$$

で定義する。(注意： $n$ は便宜的な記号であり、 $T_x^n \neq (T(x))^n$  である。) すると、 $\rho$ についてほとんど全ての  $x$  に対し、つぎの極限  $\Lambda_x$  が存在する；

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (T_x^{n*} T_x^n)^{1/2n} = \Lambda_x. \quad (3)$$

ここで  $T_x^{n*}$  は  $T_x^n$  の共役。

$\Lambda_x$  の固有値を  $\{e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_m}\}$  ( $\lambda_i \geq \lambda_j$  for  $i > j$ ) と書いたとき、 $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$  をリヤプノフスペクトルと呼ぶ。

リヤプノフ指数  $\lambda_i$  は縮退しているかも知れないので、これらから相異なるものだけ取り出して大きいものから並べて  $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots$  と書く。 $\lambda^{(i)}$  に対応する  $\Lambda_x$  の固有空間を  $V_x^{(i)}$  と書く。

$E_x^{(i)}$  を  $\mathbf{R}^m$  の部分空間で、固有値  $\leq \exp \lambda^{(i)}$  for  $\Lambda_x$  に対応するものとする。先程の  $V^{(i)}$  で書けば  $E_x^{(i)} = V_x^{(i)} \cup V_x^{(i+1)} \cup \dots = \cup_{\ell \geq i} V_x^{(\ell)}$  である。

すると、

$$\mathbf{R}^m = E_x^{(1)} \supset E_x^{(2)} \supset \dots \quad (4)$$

であり、つぎが成り立つ；

定理.  $\rho$  についてほとんど全ての  $x$  に対し、もしも  $\vec{u} \in E_x^{(i)}$  かつ  $\vec{u} \notin E_x^{(i+1)}$  であるならば、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|T_x^n \vec{u}\| = \lambda^{(i)} \quad (5)$$

特に、 $i=1$  の時を考える。右辺は最大リヤプノフ数である。左辺のベクトルは、( $E_x^{(1)} = \mathbf{R}^m$  なので)  $\vec{u} \notin E_x^{(i+1)}$  つまり  $\vec{u}$  が 2 番目以降の固有値に対応する固有ベクトルの線形結合では書かれない。ほとんど全てのベクトルはこの条件を満たすので、結局、勝手なベクトル  $\vec{u}$  を選んできて上式の左辺を計算すれば最大リヤプノフ数が求まることになる。

また、初期ベクトル  $\vec{u}$  として部分空間  $E_x^{(i)}$  に含まれるもの (別の言い方をすれば、 $V_x^{(k)}$ ,  $k < i$  には含まれないもの) を持って来れば、ほぼ確実に  $\lambda^{(i)}$  が求まる。

## References

- [AA68] V. I. Arnold and A. Avez. *Ergodic Problems in Classical Mechanics*. Benjamin-Cummings, Reading, Massachusetts, 1968.
- [ER85] J.-P. Eckmann and D. Ruelle. Ergodic theory of chaos and strange attractors. *Rev. Mod. Phys.*, Vol. 57, p. 617, 1985.



- [EW88] J.-P. Eckmann and C. E. Wayne. Lyapunov spectra of infinite chains of nonlinear oscillators. *J. Stat. Phys.*, Vol. 50, p. 853, 1988.
- [GPL93] K. Geist, U. Parlitz, and W. Lauterborn. Comparison of different methods for computing Lyapunov exponents. *Prog. Theor. Phys.*, Vol. 83, pp. 875 – 893, 1993.
- [Kan86] K. Kaneko. Lyapunov analysis and information flow in coupled map lattices. *Physica*, Vol. 23D, pp. 436–447, 1986.
- [KK92] T. Konishi and K. Kaneko. Clustered motion in symplectic coupled map systems. *J. Phys.*, Vol. A 25, pp. 6283 – 6296, 1992.
- [KK94] K. Kaneko and T. Konishi. Peeling the onion of order and chaos in a high-dimensional Hamiltonian dynamical systems. *Physica*, Vol. D 71, pp. 146–167, 1994.
- [LPR86] R. Livi, A. Politi, and S. Ruffo. Distribution of characteristic exponents in the thermodynamic limit. *J. Phys.*, Vol. A 19, pp. 2033–2044, 1986.
- [Rue82] D. Ruelle. Large volume limit of the distribution of characteristic exponents in turbulence. *Comm. Math. Phys.*, Vol. 87, p. 287, 1982.
- [SN79] I. Shimada and T. Nagashima. A numerical approach to ergodic problem of dissipative dynamical systems. *Prog. Theor. Phys.*, Vol. 61, p. 1605, 1979.
- [Yam98] Yoshiyuki Y. Yamaguchi. New universality of Lyapunov spectra in Hamiltonian systems. *J. Phys. A*, Vol. 31, pp. 195–207, 1998.