重力多体系の物理と数値計算 — 大自由度系における平衡と緩和

牧野淳一郎
東京大学理学系研究科天文学専攻

1 はじめに

このサブゼミでは、自己重力系の物理がどういうものかということと、それがどのように研究されるか、具体的には、自己重力多体系のコンピュータシミュレーションがどのようなものであり、その方法が自己重力系の物理自体にどのように適応しているかということを簡単にまとめたい。[1]

このような話が、物性物理を専門とする皆さんの役に立つかどうかはやるほうも良くわからないが、なにか興味を持っていただければ幸いである。

2 自己重力多体系とは？

まず、一体どんなものを考えるかということだが、基本的には例えば銀河とか星団といった、多数の恒星が集まってできている系を考える。こういったものは天文学の対象としてはごく一般的なものであるといえる。恒星は見える宇宙の主な構成要素である[2] が、これは宇宙に一様に分布しているわけではなく、小さいところでは銀河星団（散開星団ともいう、例えばプレアデスやヒアデス）、球状星団、さまざまな大きさの銀河、銀河が集まってできる銀河群や銀河団、それ以上の大きさの宇宙の大規模構造といった、多様なスケールでの構造をもっている。

このように多様なスケールでの構造を持つこと自体が、自己重力系としての我々の宇宙を特徴づける基本的な性質であるということもできよう。それでは、なぜそのような多様な構造が存在するのだろうか？

星団、銀河などを、恒星が多数集まっている系として見れば、これはスケールが非常に違うとはいえ分子が多数集まってできている普通のバルクな物質と変わるところはないはずである。つまり、例えば統計力学で記述できそうな気がする。

2.1 「統計力学的」アプローチ

この原稿は物性若手夏の学校用ということなので、まず、統計力学的な扱いという方向から考えてみる。現実の系では星は一つ一つ個性があり、例えば質量も違うわけだが、まずはそういうことは深く考えないで星

[1] とはいえ、ページ数と時間の制約のため、この原稿には実際の講義内容の 1/3 程度の概要しか入っていない。講義に使った資料が http://grape.astron.s.u-tokyo.ac.jp/~makino/talks/index-j.html においてあるので、詳しくはそちらをみてほしい。

[2] 見えない質量 —ダークマター —というものがあるということに現在の標準的な宇宙や銀河のモデルではなっているが、これはとにかく見えないのでなにでできているかはいまだわかっていない

はみな同じ質量 m を持ち、それが N 個あるということにする。

自己重力系は、そのような N 個の星（以下、「粒子」と書くこともある）が、自分自身が作る重力場の中で運動しているような系である。

さて、統計力学を適用しようというわけだが、すぐに困るのは、実は自己重力系には熱平衡状態がない、つまり、エントロピーが極大値をとる分布というものが存在しないということである。

これはいろんな方法で示すことができるが、例えば以下のようないい方ができる。

熱平衡であるためには、（古典統計なので）速度分布関数はマックスウェル・ボルツマンでないといけない。しかし、これは不可能である。というのは、マックスウェル分布では速度分布は速度無限大まで広がる（指数関数的におちはするが）テイルをもつが、自己重力系では、エネルギーがある値（具体的には、無限遠でのポテンシャルエネルギーの値。普通はこれをゼロ点にとる）以上のものは系から脱出して無限遠に消えていってしまうからである。

この一つの例が 3 体問題である。粒子 3 個を適当な初期状態において、全系のエネルギー（重力のポテンシャルエネルギーと各粒子の運動エネルギーの和）が負になるようにしておくと、しばらくの間は 3 つがそれぞれお互いの回りを動くような状態が続く。しかし、ほとんどすべての場合にこの状態は不安定であり、粒子のうちの 2 つが強く結合した状態になり 3 つめがその反作用ではね飛ばされるという現象が起きる。こうなると、はね飛ばされた粒子はもちろんもうなにもしないし、2 体の系というのはケプラー軌道でこれは無限に安定なので、これは一つの「最終状態」ではある。

もっと粒子数が多い系でも、本質的には似たようなことが起きる。つまり、そのなかでの粒子同士の散乱の結果、高エネルギーの粒子が作られるとそれは系から逃げていってしまうのである。

2.2 自己重力系の熱平衡状態

そういうわけで、統計力学から極めて一般的にいえることは、「自己重力系は、十分長い時間が立てば蒸発してしまう」ということである。しかし、これは確かにその通りではあるものの、あまりものの役には立たない。ほとんどの系で、熱力学的な進化のみによって蒸発が起きるタイムスケールは宇宙年齢よりもはるかに長いからである。大体、我々が（これを読んでいるあなたが知りたいかどうかとりあえずおいておくとして）知りたいのは、銀河や星団ではどのようなメカニズムでその形やその中の星の分布が決まっているかということであるから、「いつかはなくなる」といわれてもあんまり嬉しくない。

というわけで、統計力学的な扱いをもう少し意味があるところまで進めようと思うと、2 つの方法が考えられる（他もあるかもしれないけど、あまり調べられていないと思う）。一つは、系の次元を落すことである。粒子が無限遠に逃げてしまうという問題は、空間を 1 次元にすれば回避できる。というのは、1 次元での重力の大きさは距離に依存しない定数であるので、無限遠ではポテンシャルも無限大になるからである。

そういうわけで、一次元系を調べようという話はいろいろあるが、とりあえずこのノートではこれについては触れない。というのは、空間を 1 次元化したことで、例えば散逸をともなう構造形成が起きることといった自己重力系の興味深い性質のほとんどが失われてしまうからである。そういうわけで、一次元重力系はそれ自体として興味深い対象ではあるが、あんまり現実の天体とは関係がない。

もう一つの方法は、壁をつけてしまうことということになる。簡単のために壁は球対称とする。こうしておくと、平衡状態があれば球対称なので算数が簡単になって具合がよろしい。

2.3 無衝突ボルツマン方程式

平衡状態は何かとかいう議論をする前に、支配方程式を決めないと話にならない。そこで、無衝突ボルツマン方程式を導入しておく。いま、粒子数が無限に多い極限を考えると、位相空間での（一体）分布関数 $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$ は以下の無衝突ボルツマン方程式に従う。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla f - \nabla \Phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}} = 0, \tag{1}$$

ここで $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}$ はデカルト座標での位置、速度である。Φ は重力ポテンシャルであり以下のポアソン方程式の解として与えられる。

$$\nabla^2 \phi = -4\pi G \rho. \tag{2}$$

ここで、G は重力定数であり、ρ は空間での質量密度

$$\rho = m \int d\boldsymbol{v} f, \tag{3}$$

である。

これは、通常のボルツマン方程式と同じであるが、特徴的なのは衝突項がないことである。後で説明するが、自己重力多体系の場合、粒子数無限大の極限では重力場が滑らかになって衝突項が消える。

もちろん、この衝突項が系の熱平衡に向かう進化を起こすものなので、これを無視しては本当は話にならないが、まあ、ちょっと我慢してほしい。

まず、力学平衡という概念を導入しておこう。これは、(衝突項を無視するという近似のもとで)、分布関数が時間的に定常であるということである。そのための条件を示すのが以下のジーンズの定理である。

「分布関数が定常であるための必要十分条件は、分布関数が運動の積分の関数として書けることである。」

証明はまっとうな教科書 [BT87] か僕の講義ノート [Ma97] でも見てもらうとして、話を進める。

2.4 熱平衡分布

球対称としたので、運動の積分はエネルギー E と全角運動量 J の2つだけということになる。さらに熱平衡を仮定すると、位置に無関係にどこでも速度分布がマックスウェル分布でないといけないことがわかる。このことと上のジーンズの定理を組み合わせると、系全体の分布を記述する分布関数がエネルギーだけに依存し、これがマックスウェル分布

$$f(\mathcal{E}) = \frac{\rho_1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} e^{\mathcal{E}/\sigma^2} = \frac{\rho_1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \exp\left(\frac{\Psi - v^2/2}{\sigma^2}\right) \tag{4}$$

に従わなければいけないことになる。ここで $\mathcal{E}$ は以下のように定義される。

$$\Psi = -\Phi + \Phi_0, \qquad \mathcal{E} = -E + \Phi_0 = \Psi - v^2/2 \tag{5}$$

Φ_0 は定数で、普通は $\mathcal{E} > 0$ で $f > 0, \mathcal{E} \leq$ で $f = 0$ となるようにとる。

これを解くための標準的な方法は、分布関数 f を速度空間で積分して密度ρをポテンシャルの関数として表すことである。この時に誤差関数についての

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-x^2} dx = 1 \tag{6}$$

を使うと、

$$\rho = \rho_1 e^{\Psi/\sigma^2} \tag{7}$$

となる。ポアソン方程式にこれを入れると

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\Psi}{dr}\right) = -4\pi G\rho \tag{8}$$

従って、

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\log\rho}{dr}\right) = -4\pi G\sigma^2\rho \tag{9}$$

を得る。後はこれを数値的に解くわけだが、まず、一つ特別な解があるということを指摘しておく

$$\rho = \frac{\sigma^2}{2\pi G r^2} \tag{10}$$

は、方程式 (9) を満たし、解の一つとなっている。これを singular isothermal sphere と呼ぶ。特別ではない解は、中心密度を有限にして中心から外側に向かって解いていけばいい。この時でも、$r \to \infty$ の極限では singular isothermal に近付き、$\rho \propto r^2$ となる。従って、系の質量は有限にならない。つまり、self-consisitent な熱平衡解というのは所詮存在しなくて、初めに書いたように壁をつけないと意味がある解にはならない。

なお、熱平衡であるということは、実は自己重力的な流体（衝突項が大きいもの）と自己重力多体系で分布関数が同じであるということである。念のため、以下、自己重力流体について方程式を導いておく。静水圧平衡の式は

$$\frac{dP}{dr} = -\rho\frac{GM_r}{r^2} \tag{11}$$

である。状態方程式に等温の

$$P = \frac{k_BT}{m}\rho \tag{12}$$

を使って P を消して、さらに M_r を微分してみれば、

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\log\rho}{dr}\right) = -\frac{4\pi Gm}{k_BT}\rho r^2 \tag{13}$$

要するに、上と同じ方程式が出てくる。

もちろん、これは「熱平衡」という極めて強い条件を課したからである。非平衡状態を考えると自己重力流体では局所的に分布関数がボルツマン分布になるのに対し、自己重力多体系ではジーンズの定理から常に分布関数はグローバルなものであり、しかもそれは必ずボルツマン分布とは違っている。

2.5 熱平衡分布の熱力学的安定性

若干前置きが長くなったが、壁が断熱壁であるとしてこの熱平衡解の振舞いがどんなものかもう少し考えてみる。上の解き方では、中心での密度、温度を与えて外に向かって解いていって、適当なところで打ち切った（そこに壁があるとした）わけだが、何が起きるかという観点からは壁の半径 R、中の物質の総質量 M を固定し、全系のエネルギー E を変化させて対応する解がどうなるか調べるというのがわかりやすいであろう。で、後ですぐに明らかになる理由から、E ではなく中心での密度 ρ_0 と壁のところでの密度ρ_w の比 $D = \rho_0/\rho_w$ をパラメータにとることにする。重力がある分中心密度が高いわけで、D の値は重力の効き方の程度に対応している。R, M を固定した時には、$D = 1$ の極限は $E \to +\infty$ に対応する。重力のポテンシャルエネルギーは GM^2/R の程度の大きさであるからである。

さて、では D をどんどん大きくしていくとエネルギーはどうなるかというわけだが、結果だけを書くと、エネルギーは D のある値（数値的には 709 くらい）で極小になる。そのあとは振動的に $D = \infty$ での値 $-GM^2/4R$ に近付く。

ここでチャンドラセカール大先生による linear series analysis を適用するなら、この $D = 709$ から先は熱力学的に不安定ということになる。しかし、これでは不安定といってもどんなものかというのは良くわからな

い。不安定モードがどんなものかというのを初めて具体的に示したのは、Hachisu & Sugimoto [HS78] である。といっても、実は彼らが調べたのは自己重力多体系ではなく流体の場合である。というのは、流体だと上に述べたように局所熱平衡で議論して良くなって、熱力学的な量を使って安定性を議論することができるからである。

等温状態なのでエントロピーは通常ならば極大値である。これは、任意のエントロピーの再分配に対して、$\Delta S = 0, \Delta S^2 < 0$ となっているということを意味する。

熱をちょっとどこかからとって別のところに与えると、それによる温度変化を考えなければ（一次の変分）エントロピーは変わらない。また、温度変化を考えると（二次の変分）、普通は熱をもらった方は温度が上がっているのでもらうエントロピーは少なく、出したほうは逆に温度が下がるので出ていくエントロピーが多い、従って、系全体としては普通は摂動を与えるとエントロピーが減る、すなわち、平衡状態はエントロピー極大に相当している。

以上から、もし、熱を取り去った時に温度が上がるようなことがあればエントロピー極大ではないかもしれないということが想像できよう。もちろん、常識的な熱力学の対象ではそんなことはあり得ないわけだが、自己重力系ではそうではない。

Hachisu & Sugimoto の方法では、摂動に対してΔS^2を求め、その符号から安定か不安定かを決めている。この方法では、もちろん、熱力学的に安定かどうかをきめることは出来るが、不安定性がどのように発展するかを調べることはできない。というのは、そのためには熱伝導の式もカップルさせて線形応答を求めないといけないのに、そのような解析は行なっていないからである。というわけで、しばらく前にそういう解析をやってみた [MH91] ので、以下はその結果を使う。

熱伝導の式は

$$K\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{L}{4\pi r^2} \tag{14}$$

と書ける。ここで、 $L(r)$ は半径 r のところでの熱流束であり、 K は熱伝導の係数である。K は温度、密度の関数だが、ここでは等温に近いので密度だけの関数として

$$K = \rho^\alpha \tag{15}$$

という形を仮定する。放射伝達であれば $\alpha = -1$ である。

ここで細かい話は省くが、自己重力質点系の場合は、密度が高いほうが熱平衡に達するタイムスケールが短い。このことを熱伝導係数でむりやりに表現すると、$\alpha = 1$ となる。

エントロピーについての式は

$$\frac{\partial L}{\partial r} = -4\pi r^2 \rho T \frac{\partial s}{\partial t}\Big|_M. \tag{16}$$

で与えられ、境界条件は

$$L = 0 \quad \text{for} \quad M = 0 \quad \text{and} \quad M = 1. \tag{17}$$

ということになる。以下、式の細かいところを見たい人は原論文に当たってもらうとして、結果だけ書く。

図 1 に示すのは第一固有値（ここではすべての固有値が負なので、最も 0 に近いもの）に対応する固有関数である。

ここで、 D は中心の密度と壁のすぐ内側での密度の比である。$D = 1$ というのは、温度が無限に高くて重力エネルギーが相対的に小さい極限である。これに対し、 $D = \infty$ は singular isothermal に対応する。

$D = 1.05$ は、要するに重力が無視できる場合である。この時はもちろん応答はベッセル関数かなにかで書ける。注意して欲しいことは、圧力の変化がないこと、エントロピーと温度がちゃんと比例関係にあることである。重力が無視できるので普通の振舞いをしているわけである。つまり、密度、温度の変化が圧力変化がなくなるように働く。これは、静水圧平衡を保つためである。

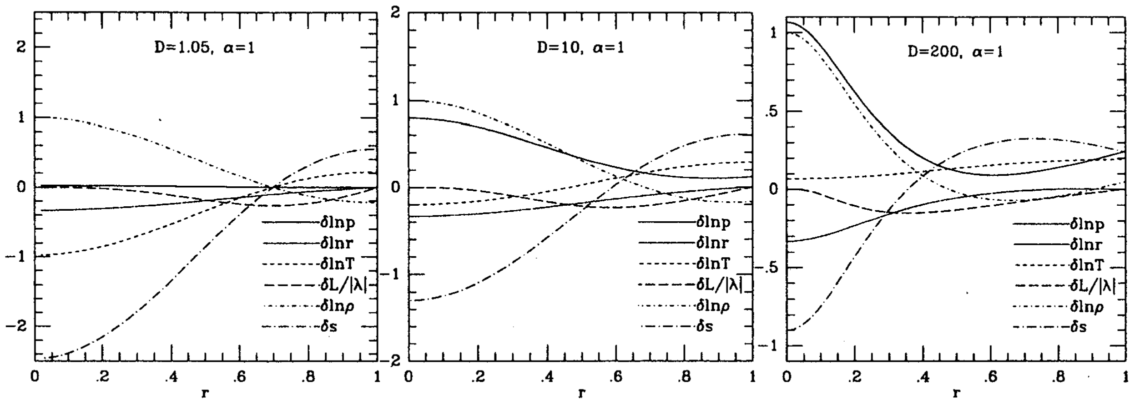

図 1: 安定領域の応答

なお、ここでは、中心から熱を奪って外に与えるようなものを考えているが、その逆も固有関数であることに注意してほしい。これは、線形化した方程式の解だからである。

さて、少し中心密度を上げると、摂動に対する圧力の応答が変わって、中心で圧力が上がるようになる。これは、熱を奪われることに応答して縮むと、重力も強くなるので、つじつまをあわせるにはもうすこし縮んで圧力を上げる必要が起きるからである。このために、温度の応答は与えたエントロピーからはずれてくる。もっとどんどん温度をさげて、D を大きくすると、ついには、熱を奪ったにもかかわらず、温度が中心でも上昇するようになる。

もちろん、この解は負の固有値に対応するものであり、いぜんとして安定である。それは、温度勾配としては依然として中心に向かって下がっていて、ちゃんとエントロピー変化を打ち消す向きに熱がながれるからである。

2.6 中立安定

さて、もっと D を大きくすると、ついには固有値が 0、すなわち与えられた摂動が減衰しなくなる。この状況を図 2 に示す。与えられた摂動が減衰しないということは、温度勾配ができないということである。実際、応答は δT が定数になっている。

2.7 重力熱力学的不安定

さらにもっと温度を下げ、D を大きくすると、ついには固有値が正になる。図 3 にいくつかの例を示す

どの場合でも中心でエントロピーが減っているのに温度が大きく上がり、それが外側の温度上昇を追い越している。その結果中心から外に向かう熱流ができるのである。

なお、ちょっと注意して欲しいのは、α の値によって応答が大きく違うことである。D が同じ時、$\alpha = 1$ の方が$\alpha = -1$ に比べて中心に集まったような応答になっている。これは、熱伝導が密度の高いところで速いためと考えて良い。

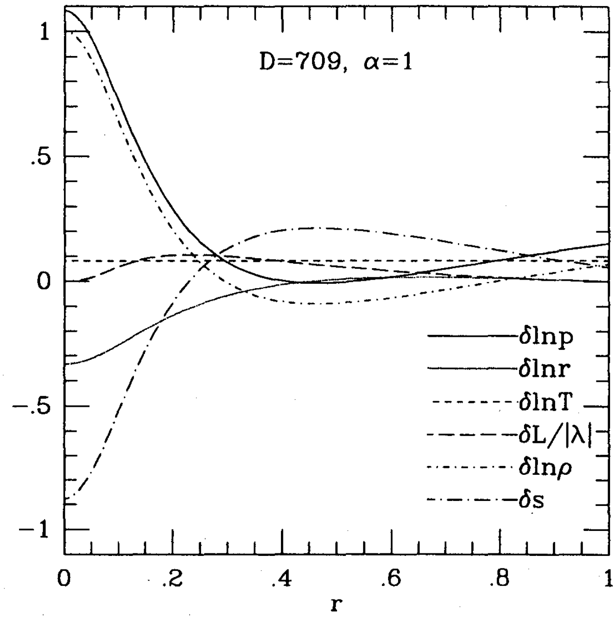

図 2: 中立応答

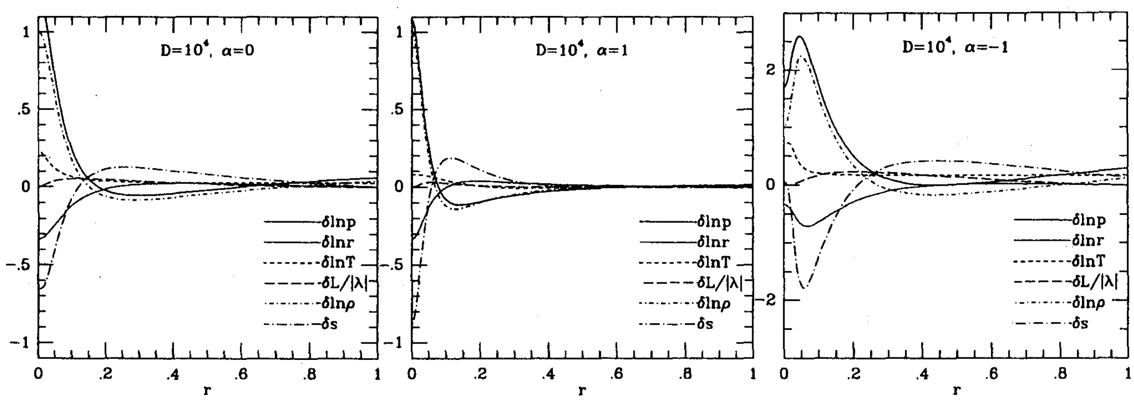

図 3: 不安定応答

2.8 有限振幅での進化

さて、このあとどうなるかということを調べるためには、数値計算をする必要がある。Hachisu *et al.* [HN78] は、自己重力流体についてそのような数値計算を行なった。

中心に熱を与えると、中心は温度を下げつつ膨張する。このときは、結局最終的には安定平衡にいってしまうことになる。しかし、中心から熱をとったときにはどこかいき先があるわけではない。

この後の進化は、熱伝導のタイムスケールによる。密度が上がるとタイムスケールが長くなるような場合には、大雑把にいってかなり大きなものが全体として収縮していく。

これに対し、恒星系に対応する場合では、密度が上がるとタイムスケールが短くなる。この時は、密度の高い「コア」が出来、それが自己相似的な収縮を続ける。これに関する詳細な解析は Lynden-Bell & Eggleton [LE80] に与えられているので、以下考え方だけを示す。

ここでいう自己相似解というのは、ある物理量 y が

$$y(r,t) = y_0(t) y_*[r/r_0(t)]. \tag{18}$$

と書けるようなものである。さらに、r_0 と y_0 が時間のベキで書ける(これは数値計算の結果がそうなっている)とすれば、

$$r_0 = (t_0 - t)^{\beta}, \tag{19}$$

とか

$$y_0 = (t_0 - t)^{\gamma}, \tag{20}$$

と書け、結局

$$y_0 = r_0^{\gamma/\beta}. \tag{21}$$

という関係が出てくる。

自己相似解ということで、いろんな無次元量は一定と考えられる。特に、今コアというものを考えて、その半径を r_c とすれば

$$\sigma^2 \propto \frac{GM_c}{r_c} \sim \rho_0 r_0^2. \tag{22}$$

ここで ρ_0 を

$$\rho_0 = r_0^{\alpha}, \tag{23}$$

と書けば

$$r_0 = (t_0 - t)^{2/(6+\alpha)}. \tag{24}$$

となる。

実際に $r_0(t)$ とかを求めるには、やはり固有値問題を解くことになる。Lynden-Bell & Eggleton は実際に解いて、

$$\rho = r^{-2.21}. \tag{25}$$

という答を得た。

2.9 ガスと N 体の違い

実は、このあたりの進化、すなわち重力熱力学的不安定や自己相似解については、ガス近似、フォッカー・プランク近似を使って分布関数の進化を数値計算する方法、N 体計算の間の一致は素晴らしくよい。これが何故かというのは本当にわかってるのかといわれると困るようなものだが。

ガスではうまく表現出来なくなるのは、質量分布がある場合、非等方性が発達する場合等である。

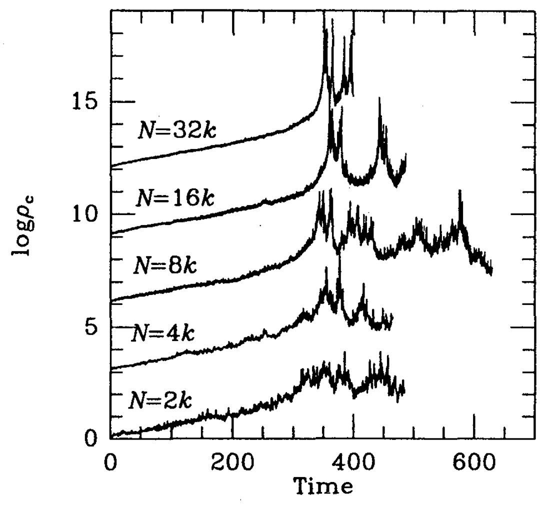

図 4: 重力熱力学的振動

2.10 自己相似解の後の進化

さて、自己相似解は、ある時刻 t_0 で密度が無限大になる。これを collapse と呼んでいる。実際にそんなことが起きるのか、また、そのあとはどうなるのかというのは現実的には重要な問題である。というのは、多くの球状星団、あるいは小さな銀河では、タイムスケールを見積もるとすでに collapse しているはずだからである。

その後どうなるかについては、いろんな可能性が考えられた。特に、これによってブラックホールを作るというアイディアはそれなりに真剣に検討されたし、まだ完全に見捨てられたわけではない。

しかし、現在のところ、典型的な球状星団や銀河では、ブラックホールが出来るというのはありそうにないとされている。コアが十分に小さくなると、エネルギー供給源が出来るからである。

ここでのエネルギー供給の元は連星である。仮に星団があらかじめ連星をもっていなかったとしても、コアが十分に小さくなると、そのなかで 3 体相互作用で連星ができるようになる。これは基本的には星のなかで温度、密度が上がると核融合が始まるというのと変わるところはない。ただし、量子力学的な効果やポテンシャル障壁はないので、連星の出来やすさは密度と温度（平均速度）の関係だけで決まる。

連星によるエネルギー供給が入ると、コアの収縮は止まる。熱源として連星を考えた計算を始めて行なったのは Henon [Hen75] であり、1982 年ころまでにいくつかそのような計算が行なわれた。それらでは、コアからの熱伝導による熱の流出と連星からのエネルギー入力がバランスし、系全体がホモロガスな膨張をするという結果が得られていた。

しかし、 1983 年になって、 Sugimoto & Bettwieser [SB83] は、実はこのホモロガスな膨張解も熱力学的に不安定であるという発見をした。そのあと数年に渡る論争があったが、1985 年には他のグループによるガスモデル計算、1986 年には FP 計算でも振動が確認された。実際に粒子系でそんなものが起きるかどうかにはさらに議論があったが、1995 年になって N 体数値計算でも確かに振動が起きるということが見い出された。

3 現実的な系

前節で見たように、極めて単純な自己重力系、すなわち、同じ重さの質点がおおむね球状に集まっている系については、その熱力学的な進化の過程がどんなものかというのはほぼ明らかになったと考えてよい。しか

し、実際の天体現象を考えると、

- 多くの系は年齢が熱力学的進化のタイムスケールよりはるかに若い
- 回転や速度の非等方性の効果は無視できない
- 構成要素である星の質量は等しくない
- 星は質点ではなく、大きさをもつ
- 星間ガスとかそういうものもないわけではない
- 相対論的効果とか、、、

と、いろんなことがあるわけである。これらの効果を見ていくためには、前節で得られたような基本的な描像を手がかりとしつつ、現実的な効果を採り入れた数値計算によって調べていくということになる。で、それはそうなんだが、夏の学校事務局からおおせつかった page limit は既に来ているので、以下、数値計算についてどういう話を扱いたいかという項目だけ書く。こちらのより詳しい内容は別に物性研究に書くことになっているので、興味がある人はそちらを見て欲しい。講義ノートとしては内容が中途半端になって申し訳ない。

- 引力だけの系であることによる困難
- 構造形成に伴う困難
- 遠距離力であることによる困難
- 最近の話題 — FMM と symmetric methods

参考文献

[BT87] Binney, J. and Tremaine S., Galactic Dynamics, Princeton University Press, 1987

[Hen75] Henon M. (1975) In *Dynamics of stellar systems*, pages 133–149. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht.

[HN78] Hachisu I., Nakada Y., and Sugimoto D. (1978) *Progess of Theoretical Physics,* 60, 393–402.

[HS78] Hachisu I. and Sugimoto D. (1978) *Progess of Theoretical Physics,* 60, 123–135.

[LE80] Lynden-Bell D. and Eggleton P. P. (1980) *Monthly Noticies of Royal Astronomical Society,* 191, 483–498.

[Ma97] http://www.grape.astron.s.u-tokyo.ac.jp/~makino/kougi/stellar_dynamics/kougi.html

[MH91] Makino J. and Hut P. (1991) *The Astrophysical Journal,* 383, 181.

[SB83] Sugimoto D. and Bettwieser E. (1983) *Monthly Noticies of Royal Astronomical Society,* 204 19P–22P.