

## Quantum Kicked Rotor での Quantum Trajectory

図書館情報大学 鎮目浩輔<sup>1</sup>, ロスアラモス研究所 Salman Habib, Kurt Jacobs

Quantum Kicked Rotor 系が decoherence を受ける場合の quantum trajectory を調べ、次の結果を得た。

1. ノイズが弱く、系が十分古典化しない場合でも局在化は働く。つまり各 quantum trajectory の幅はある時刻  $t_{sat}$  で増加が止まる。
2. 局在化は系が pure(decoherence なし) な量子力学的時間発展から逸脱するしばらく前に起きる。

### 1 Introduction

#### 1.1 Quantum trajectory(QT)

Quantum trajectory [1][2] とは、decoherence を受ける量子系を記述するために使われる数学的な道具である。また連続的な量子観測が行われる場合、確率的に表れる観測結果のそれぞれに対応する状態という物理的な意味も持つ。

伝統的な量子統計力学では decoherence を受ける系の状態は密度行列  $\hat{\rho}$  で記述され、時間発展は Master 方程式

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = \frac{-i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}] - \frac{D}{\hbar^2} [\hat{x}, [\hat{x}, \hat{\rho}]] \quad (1)$$

で記述される。ただしここでは Caldeira-Legget 型の Master 方程式で高温極限を取り、拡散だけを考慮することを前提とする。量子観測では位置の連続測定を行うことに対応する。一方、quantum trajectory では系の状態は状態ベクトルのアンサンブル

$$\{|\psi_k\rangle\}_{k=1,\dots,N} \quad (2)$$

で記述され、任意の物理量  $\hat{I}$  の平均値は

$$\langle \hat{I} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \langle \psi_k | \hat{I} | \psi_k \rangle \quad (3)$$

<sup>1</sup>E-mail: shizume@ulis.ac.jp

で与えられる。このアンサンブルはある種の観測を行ったとき結果として表れる状態の集まりでもある。各 trajectory の時間発展は stochastic Schrodinger 方程式 [2][3]

$$|\psi(t+dt)\rangle = A e^{-2kdt(\hat{x}-((\hat{x}+\xi))^2)} e^{-i\hat{H}dt/\hbar} |\psi(t)\rangle \quad (4)$$

に従う。ここで  $k = D/\hbar^2$ ,  $\xi = (8k)^{-1/2}dW/dt$  で  $W$  は Wiener 過程、 $A$  は正規化定数。quantum trajectory は次の重要な性質を持つ：

- $\{|\psi_j(t)\rangle\}$  は  $\hat{\rho}(t)$  の unravelling になっている。すなわち

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N |\psi_j(t)\rangle \langle \psi_j(t)| = \hat{\rho}(t) \quad (5)$$

- 波束  $\psi(x,t) = \langle x|\psi(t)\rangle$  には局在化する傾向がある。一般的にいてポテンシャルの非線形性は波束を広げ、decoherence は局在化させる。従って両者の競合になる。特に系が古典化するほどの decoherence を受ける場合には、波束は最小波束になり、古典的な軌道を追う [3]。

quantum trajectory は decoherence による量子系の古典化の議論で重要性が認められている。例えば量子力学から古典的なカオスを導き出す試みは、カオスに不可欠な粒子の軌跡という概念が量子力学にないため困難であった。それに対し軌跡を quantum trajectory に対応させることによりこの困難を回避し、stroboscopic plot や Lyapunov 指数を量子力学+decoherence で導出することが可能であることが示されている [2][3]。

## 1.2 Quantum Kicked Rotor (QKR)

Kicked rotor(Standard map)[4] は Hamiltonian

$$H = \frac{p^2}{2} + \kappa \cos(x) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n) \quad (6)$$

に従う系で、 $t = n = 1, 2, \dots$  において  $\cos$  ポテンシャルによるキックを受け、キックの間は自由発展を行う。この系は量子古典対応が破れるという重要な性質を持つ。すなわち初期条件として同じ形の分布 (古典では確率密度、量子では Winger 関数) を取っても、時間発展を古典力学で扱うか量子力学で扱うかにより分布の運動が大きく異なる。 $x$  方向の分布はどちらも同じように単調に広がる (ここでは、無限に広い空間内の周期的ポテンシャルを持つ系として扱う)。一方、運動量方向での分布は古典的な場合には単調に広がるが、量子的な場合にはある時点で幅が固定され、拡散が止まる。この違いは  $\langle p^2 \rangle$  の値にもっとも明確に表れる。本研究のために行った計算の結果 (図 1) を例として説明する

パラメータの値は  $\hbar = 1, \kappa = 10$ 。

- 古典的な場合 (グラフの一番上の線)、分布が単調に拡がるので  $\langle p^2 \rangle$  は時間に単純に比例して増大する:  $\langle p^2 \rangle_d \simeq K_d t$ 。  $K_d$  はキックの強さ  $\kappa$  で決まる定数であり、例では  $K_d \simeq 31$ 。
- 量子的で decoherence がない場合 (一番下の線) しばらくは古典的な運動を追うが、ある時刻  $t_{break}$  (例では  $t_{break} \sim 5$ ) 以降は増加率が落ち、やがて増加が止まる:
 
$$\langle p^2 \rangle_{qu} \simeq \langle p^2 \rangle_d \quad (t < t_{break}),$$

$$\langle p^2 \rangle_{qu} \neq \langle p^2 \rangle_d \quad (t_{break} < t)$$

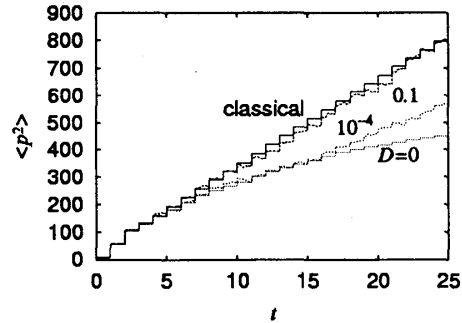


図1 Kicked Rotor での  $\langle p^2 \rangle$   
一番上の線が古典力学によるもので一番下が量子力学によるもの。それらの中にある2本は量子+decoherence の場合。上のものが  $D = 0.1$ 、下が  $D = 10^{-4}$  の結果。

さらに量子力学で decoherence を加えた場合 (DQ) について次のことが知られている :

- Decoherence が十分強い ( $D$  が十分大きい) と量子古典対応が復活し、  $t_{break} < t$  でも古典的運動を追い、  $\langle p^2 \rangle_{DQ} \simeq \langle p^2 \rangle_d$  となる。図1では  $D = 0.1$  に対応する線で、  $\langle p^2 \rangle_d$  とほとんど同じ値を取っている。
- ノイズが小さい場合には古典と量子の中間的な発展をする。図1の  $D = 10^{-4}$  の線を例にとると
  1. しばらくは量子的な運動を追う ( $\langle p^2 \rangle_{DQ} \simeq \langle p^2 \rangle_{qu}$ )
  2. しかしある時刻  $t_{DQ} (\sim 15)$  を境にして量子的な運動から離れ、再び時間に比例する様になる:  $\langle p^2 \rangle_{DQ} \simeq K_{DQ} t$ 。係数  $K_{DQ} (\sim 25)$  は  $D$  に依存する。  $D = 0.1$  でも定性的には同じ。2つの場合の  $t_{DQ}$  と  $K_{DQ}$  をまとめて書くと:
    - (a)  $D = 10^{-4}$  では  $t_{DQ} \sim 15, K_{DQ} \sim 25$
    - (b)  $D = 0.1$  では  $t_{DQ} \sim 5, K_{DQ} \sim 31$
 そして  $K_{DQ} < K_d$  であるため、  $t_{DQ} < t$  では  $\langle p^2 \rangle_{qu} < \langle p^2 \rangle_{DQ} < \langle p^2 \rangle_d$

## 2 問題と計算

QT は 1.1 節で述べた様に系の古典化および量子観測と深いつながりを持っている。簡単にいうと、decoherence が十分強く働くと QT が十分狭い範囲に局在化し、その結果 Ehrenfest の定理により古典力学が復活する。そこで QKR の上記の性質が QT の幅と何らかの関係が持つかどうか調べることは興味深い。本論文では次の2点に注目する。

- Q1 QT の局在化はノイズが弱い場合でも働くか。つまり、系を古典化するには弱すぎるノイズの場合には、QT は果てしなく広がっていくか、それともある幅で局在化するのか。

Q2 時刻  $t_{DQ}$ 、すなわち QKR の運動が量子的なものから逸脱する時刻と QT の局在化には何らかの関係があるか。例えば  $t_{DQ}$  において運動が質的に変わることから、それが波束が局在化する時刻と関係する可能性がある。

これらの問題を調べるため、例として示した QKR において QT の時間発展を計算した。パラメータは上に示したのと同じ次の値：

- $\hbar = 1, \kappa = 10(K_d \simeq 31), D = 10^{-4}$  および  $D = 0.1$

また、

- QT の数  $N = 10^3$

### 3 結果

QT の幅の振舞を示す目安として QT それぞれの  $x$  方向および  $p$  方向の幅の平均：

(a)  $x$  方向の幅の平均:  $\Delta x \equiv \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \langle (\hat{x} - \langle \hat{x} \rangle)^2 \rangle_j}$

(b)  $p$  方向の幅の平均:  $\Delta p \equiv \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \langle (\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle)^2 \rangle_j}$

を用いた。これらの  $\Delta x$  と  $\Delta p$  を次の図 2 の (a) と (b) に示す。

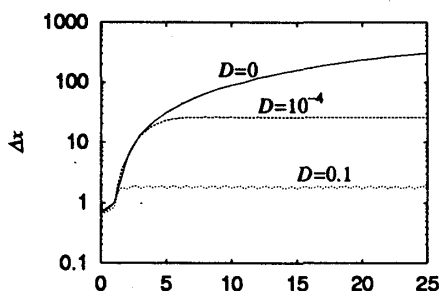


図 2(a) QT の  $x$  方向の幅  $\Delta x$   
一番上の線は  $D=0$  の pure な量子的時間発展の場合。その下が  $D=10^{-4}$ 、その下が  $D=0.1$ 。  $D=10^{-4}$  では  $t \sim 4$  で幅が平衡値に達し、 $D=0.1$  では  $t \sim 2$  で達している。

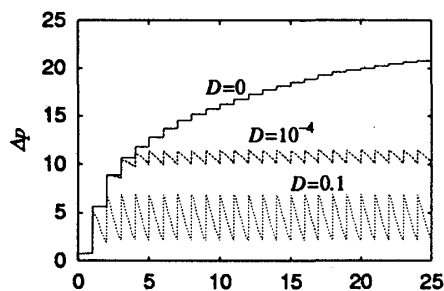


図 2(b) QT の  $p$  方向の幅  $\Delta p$   
一番上の線は  $D=0$  の pure な量子的時間発展の場合。次が  $D=10^{-4}$ 、その下が  $D=0.1$ 。幅が平衡値に達する時刻は  $\Delta x$  の場合とほとんど同じになっている。

図から、まず、波束の幅の増加は  $D=10^{-4}$  の decoherence が弱い場合でもある時点で止まること、すなわち局在はノイズが弱い場合でも働くことが分かる。ただし止まる時間  $t_{sat}$  は  $D$  が小さい程大きくなり、

- $D=0.1$  の場合には  $t_{sat} \sim 2$
- $D=10^{-4}$  では  $t_{sat} \sim 4$

これらの  $t_{sat}$  を図 1 で求めた、 $\langle p^2 \rangle$  が量子的な値から逸脱する時間  $t_{DQ}$  と比較すると、 $t_{sat} < t_{DQ}$  でかつ両者の間にはある程度の開きがあることがわかる。実際  $D=10^{-4}$  では  $t_{sat} \sim 4, t_{DQ} \sim 15$ 、 $D=0.1$  では  $t_{sat} \sim 2, t_{DQ} \sim 5$ 。局所化が働き幅が固定されてからしばらく経ってから  $\langle p^2 \rangle$  に量子的な値からの逸脱が起きている。

## 4 まとめ

Quantum Kicked Rotor系が decoherence を受ける場合の quantum trajectory を調べ、次の結果を得た。

1) 系が古典化するには不十分なほど弱い decoherence であっても局在化は働き、各 trajectory の幅の増大はある時刻  $t_{sat}$  で止まること。

弱い decoherence でも局在化が働くということは自明ではなく、興味深い。一方この結果は局在化が働くかどうかは古典化とは直接には関係しないことを意味する。decoherence があると弱くても強くても局在化は起こり、それが十分強い場合には局在の幅が Ehrenfest の定理を満たす程狭くなり、その結果「古典化」が起きると考えられる。

2) 局在化は  $\langle p^2 \rangle$  の時間発展が pure な量子力学的発展からずれる  $t_{DQ}$  よりもある程度前に起きる。

これは、局在化が DQ の原因になることを示唆するものの、局在化してから DQ にはいるまでしばらくかかることを意味するので、DQ の原因には局在化だけでなく他の要因もあると考えられる。例えば全体の (密度行列の) 広がり狭い間は QT の幅が狭くても量子的な時間発展になるが、前者がある程度広くなると、後者もある程度の幅をもたないと量子力学的な時間発展からそれる、ということがあるかもしれない。これら調べるのが今後の課題となる。

## 謝辞

本研究の計算は米国 Advanced Computer Laboratory の Origin2000 および National Energy Research Scientific Computing Center の Cray-T3E を用いて行われた。

## 参考文献

- [1] "An Open Systems Approach to Quantum Optics" H.Charmichael, Springer 1993
- [2] "Quantum state diffusion" I.Percival, Cambridge 1998
- [3] T. Bhattacharya, S.Habib and K.Jacobs, "Continuous Measurement and the Emergence of Classical Chaos", quant-ph/9906092
- [4] "Chaos in Atomic Physics" R.Blumel and W.P.Reinhardt, Cambridge 1997 およびその文献リスト