

# メソスコピック系における量子干渉効果と Berry の幾何学的位相

通産省 電子技術総合研究所  
川畑史郎\*

## 1 はじめに

ある量子系に対してゆるやかに外部パラメータを閉じた経路に沿って変化させたときに、通常の動力学的位相とは別に経路の幾何学的な情報に依存する位相が現れる。これは 1983 年に Berry により発見された幾何学的位相である [1]。Berry の発見以降、この幾何学的位相を実験的に捕らえようという試みが様々な物理系でなされ、実際に検証されてきた。さらに、最近の半導体微細加工技術の進展に伴い、メソスコピック系を利用して幾何学的位相を実験的に観測することも可能となってきた。そのため、純粋な基礎物理学だけでなく物性及びデバイス物理の分野からの注目を集めるようになってきた。本稿では、永久電流と呼ばれる量子干渉効果に起因する現象を通して Berry の幾何学的位相を実験的に観測する方法について提案を行う。

## 2 Berry の幾何学的位相

Berry 位相については、数多くの解説 [2] や教科書 [3] があるので詳細はそれらに譲って、その概略を紹介しよう。時間変化する外部パラメータ  $\mathbf{R}(t) = (X(t), Y(t), Z(t), \dots)$  を含む量子系を考える<sup>1</sup>。それでは、外部パラメータ空間中の経路  $\mathbf{R}(t)$  にそってハミルトニアンをゆっくりと時間変化させてみよう。このとき、系の状態  $|\psi(t)\rangle$  は時間依存シュレディンガー方程式

$$\mathcal{H}(\mathbf{R}(t)) |\psi(t)\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle \quad (1)$$

に従って時間発展を行う。ある時刻  $t$  に対し、この系のハミルトニアンは以下の固有値方程式を満足する。

$$\mathcal{H}(\mathbf{R}(t)) |n(\mathbf{R}(t))\rangle = \varepsilon_n(\mathbf{R}(t)) |n(\mathbf{R}(t))\rangle \quad (2)$$

ここで、 $|n(\mathbf{R}(t))\rangle$  は瞬間固有状態 (断熱状態) と呼ばれる。時刻  $t=0$  に  $|\psi(0)\rangle = |n(\mathbf{R}(0))\rangle$  であった状態は時間発展を行い、時刻  $t$  で  $|\psi(t)\rangle$  になったとする。そうすると、状態  $|\psi(t)\rangle$  は、

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \varepsilon_n(\mathbf{R}(t'))\right] \exp[i\gamma_n(t)] |n(\mathbf{R}(t))\rangle \quad (3)$$

のように書くことができるであろう。右辺の第一因子は、定常状態における位相変化を積算したよく知られた動力的位相因子である。それに対して、第二因子は状態  $|\psi(t)\rangle$  がシュレディンガー方程式 (1) を満足するという要求により次式のように与えられる。

$$\gamma_n(t) = i \int_{\mathbf{R}(0)}^{\mathbf{R}(t)} \langle n(\mathbf{R}(t')) | \nabla_{\mathbf{R}} |n(\mathbf{R}(t'))\rangle \cdot d\mathbf{R}(t') \quad (4)$$

\*E-mail: shiro@etl.go.jp

<sup>1</sup> 例えば、回転磁場中のスピンなどを思い浮かべればよい。

積分は外部パラメータが  $\mathbf{R}(0)$  から  $\mathbf{R}(t)$  までゆっくりと変化したときの断熱経路に沿って行われる。

もし、この断熱経路  $C$  がパラメータ空間で閉じていれば、すなわち経路が時間  $T$  後に出発点へ戻ったとすると、時刻  $T$  における波動関数は

$$|\psi(T)\rangle = \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \int_0^T dt \varepsilon_n(\mathbf{R}(t))\right] \exp[i\gamma_n(C)] |\psi(0)\rangle \quad (5)$$

となる。位相  $\gamma_n(C)$  は

$$\gamma_n(C) = i \oint_C \langle n(\mathbf{R}) | \nabla_{\mathbf{R}} | n(\mathbf{R}) \rangle \cdot d\mathbf{R} \quad (6)$$

のように、パラメータ空間の周回積分として与えられる。これがいわゆる Berry 位相と呼ばれるものであり、外部パラメータの断熱的变化に由来する。この位相は、パラメータ空間の幾何学的性質で決まるという意味で、幾何学的位相とも呼ばれる。

### 3 メソスコピック系における Berry 位相

Berry 位相の発見以降、その存在を実験的に検証する研究が様々な分野で行われてきた。例えば、らせん磁場中の偏極中性子 [4] や化学反応系 [5] などの実験が有名である。

一方、最近になってメソスコピック系を利用して、Berry 位相を実験的に観測しようという研究が行われるようになってきた。メソスコピック系を用いる利点としては、デバイス形状や外部パラメータを人工的に変化させることが容易であることがあげられる。そのため、系統的に研究を行う上では恰好の舞台といえよう。メソスコピック系においては、系のサイズが位相緩和長よりも短いために量子干渉効果がコンダクタンスや帯磁率などの物理量に影響を与える。そのため、Aharonov-Bohm(AB) 効果やコンダクタンス揺らぎなどの量子干渉効果を通して Berry 位相を検出することが可能となる。

1992年に Stern [6] は、非一様磁場を印加したメソスコピックリングの AB コンダクタンス振動を理論的に解析した。彼は、伝導電子のスピンのリングを断熱的に運動することによって(ゼーマン相互作用を通して)Berry 位相が誘起され、コンダクタンス振動がスピン分離することを示した。また、Aronov [7] らは、スピン-軌道相互作用の存在する AB リングのコンダクタンスの計算を行った。その結果、Berry 位相が AB コンダクタンス振動にスピン分離と見られることを指摘した。また Loss ら [8] は、乱れた量子細線に非一様磁場を印加すると Berry 位相によって負の磁気抵抗やコンダクタンス揺らぎなどの量子干渉効果に起因する現象が影響を受けることを示した。これ以外にもいくつかの理論的提案がなされたが、実験的な研究はごく最近になって行われるようになってきた。

最も代表的な実験は、オランダの Groningen 大学の Morpurgo ら [9] の研究であろう。彼らは、AlSb/InAs ヘテロ構造中に半導体リング(直径  $0.9\mu\text{m}$ 、幅  $130\text{nm}$ )を作製し、 $h/e$  周期の AB コンダクタンス振動の測定を行った。その結果、スピン-軌道相互作用に起因する Berry 位相  $\gamma$  の出現により、コンダクタンス振動の  $h/e$  周期成分が  $h/e \pm \gamma$  のように二重にスピン分離することを観測した。また、NTT の新田ら [10] は、InGaAs/InAs 系中のリングにおいて同様のスピン-軌道相互作用由来のスピン分離を観測し、Berry 位相の効果を示唆する実験結果を報告した。さらに、NTT の Ye ら [11] はリングの中心部分に微小な強磁性体を配置してコンダクタンスの測定を行い、同様な振動周期の分離を観測した。これは、微小磁性体を作る非一様磁場によって(ゼーマン相互作用を媒介して)Berry 位相が誘起されたと解釈されている。このように Berry 位相に起因する現象が実験的に観測され、メソスコピック物理の新たな潮流として注目を集めるようになってきている。

これまでの、研究の中心はコンダクタンスなどの輸送係数に対するものが中心であった。本稿においては、メソスコピック系の熱力学的物理量である永久電流 [12] を通して Berry 位相を実験的に捕らえる

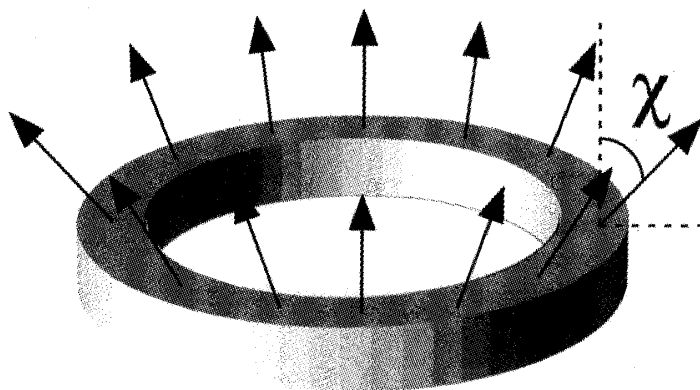


図 1: 孤立メソスコピックリングと非一様磁場 (矢印)

ことが可能であることを示す [13]。永久電流とは、孤立したメソスコピックリングに磁束を印加することにより誘起される散逸を伴わない電流のことであり、メソスコピック系の代表的現象である。このようなリングに非一様磁場を印加すると、Berry 位相の出現に伴い、電流周期のスピンの分離が生じることを示す。また、実験的に観測する方法についても提案を行う。

## 4 永久電流と Berry 位相

### 4.1 平均永久電流

本節においては、孤立メソスコピックリング (図 1) に AB 磁束と非一様磁場を印加したときに流れる永久電流を摂動理論 [14] を用いて計算を行う。特に、実験との比較を意識して、単純な一次元リングではなく有限幅のリングに対する考察を行う。また実際に金属などを用いて試料を作製した場合、不純物や格子欠陥などが試料中に存在する。そのため、Berry 位相効果に対する不純物散乱の影響を取り扱う必要がある。以下、これらの効果を念頭に置いて永久電流の理論の構築を行い、どのような形で Berry 位相の効果が永久電流の中に現れるのかを見ていこう。

まず、ハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \left[ \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}^{em}(\mathbf{r}) \right]^2 + V(\mathbf{r}) - \frac{1}{2} g \mu_B \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (7)$$

で与えられる。ここで、 $\mathbf{p}$ 、 $\mathbf{A}^{em}$ 、 $V$ 、 $g$ 、 $\mu_B$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\boldsymbol{\sigma}$  はそれぞれ、運動量、電磁気学的ゲージポテンシャル、不純物ポテンシャル、 $g$  因子、ボーア磁子、非一様磁場、パウリ行列である。以下、簡単のために

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B (\sin \chi(\mathbf{r}) \cos \eta(\mathbf{r}), \sin \chi(\mathbf{r}) \sin \eta(\mathbf{r}), \cos \chi(\mathbf{r})) \quad (8)$$

の形の非一様磁場を考えよう (図 1)。このような磁場構造は texture と呼ばれる<sup>2</sup>。texture 構造磁場の場合、パラメータ空間における伝導電子スピンの運動は図 2 のように表される。

グリーン関数を用いると、熱平均永久電流は次式で与えられる。

$$I = \int \frac{d\varepsilon}{2\pi i} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\alpha=\pm 1} I_x f(\varepsilon) \left[ G_{\alpha,\alpha}^A(\mathbf{k}, \mathbf{k}, \varepsilon) - G_{\alpha,\alpha}^R(\mathbf{k}, \mathbf{k}, \varepsilon) \right] \quad (9)$$

<sup>2</sup> もちろん任意の磁場構造への拡張は容易に行える。

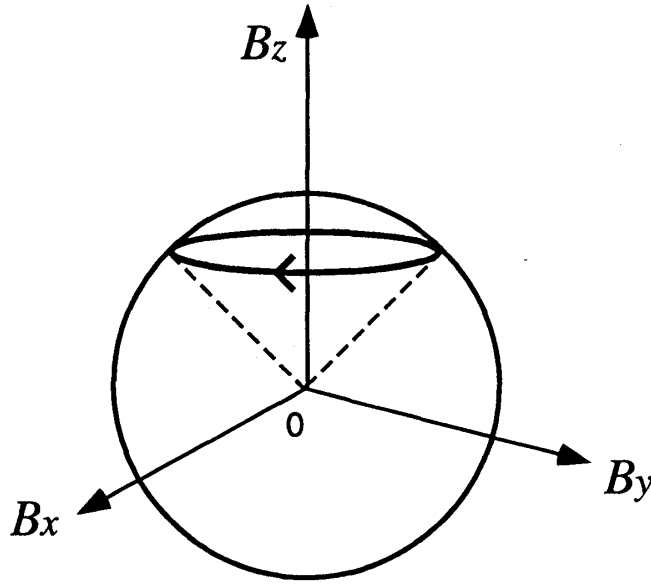


図 2: パラメータ空間中の電子スピンの運動

ここで、 $\alpha = \pm 1$  はスピンインデックス、 $f$  はフェルミ分布関数、 $I$  は電流バーテックス、 $G^A(G^R)$  は、先進 (遅延) グリーン関数である。

目標は  $I$  の不純物配置平均  $\langle I \rangle$  を計算することである。永久電流の試料平均を行う際に、大正準集合 (化学ポテンシャル  $\mu$  一定) で計算を行うと、非常に小さい永久電流しか得られない。そのため、電子数一定の正準集合で計算を行う必要がある [15]。そこで、化学ポテンシャル  $\mu$  を  $\mu = \mu_0 + \delta\mu$  のように平均値とそのまわりでの揺らぎの部分に分解して表現し、式 (9) を  $\delta\mu$  の 1 次まで展開する。すると、試料平均永久電流は

$$\langle I(\Phi^{em}) \rangle \approx -\frac{\Delta}{2} \frac{\partial}{\partial \Phi^{em}} \left\langle \left\{ \sum_{\alpha=\pm 1} \delta N_{\alpha}(\mu_0, \Phi^{em}) \right\}^2 \right\rangle \quad (10)$$

のようになる。ここで、 $\delta N_{\alpha}$  は磁束変化に対する粒子数の揺らぎで、二点状態密度相関関数 [15]

$$\begin{aligned} K_{\alpha, \alpha'}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) &= \langle \rho_{\alpha}(\varepsilon_1) \rho_{\alpha'}(\varepsilon_2) \rangle - \langle \rho_{\alpha}(\varepsilon_1) \rangle \langle \rho_{\alpha'}(\varepsilon_2) \rangle \\ &\approx \frac{1}{2\pi^2 V^2} \int d\mathbf{r}_1 \int d\mathbf{r}_2 \operatorname{Re} \left[ \langle G_{\alpha, \alpha}^R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1; \varepsilon_1) G_{\alpha', \alpha'}^A(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2; \varepsilon_2) \rangle \right. \\ &\quad \left. - \langle G_{\alpha, \alpha}^R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1; \varepsilon_1) \rangle \langle G_{\alpha', \alpha'}^A(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2; \varepsilon_2) \rangle \right] \end{aligned} \quad (11)$$

を用いて次式のように表される。

$$\left\langle \left\{ \sum_{\alpha=\pm 1} \delta N_{\alpha}(\mu_0, \Phi^{em}) \right\}^2 \right\rangle = V^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon_2 f(\varepsilon_1) f(\varepsilon_2) \sum_{\alpha, \alpha'} K_{\alpha, \alpha'}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \quad (12)$$

#### 4.2 二点状態密度相関関数のダイアグラム表現

結局、試料平均永久電流を計算するためには、二点準位相関関数さえ計算できればよいことが分かった。式 (11) に対して、試料平均の結果大きな寄与を与えるのは図 3 のようなダイアグラムである [16]。

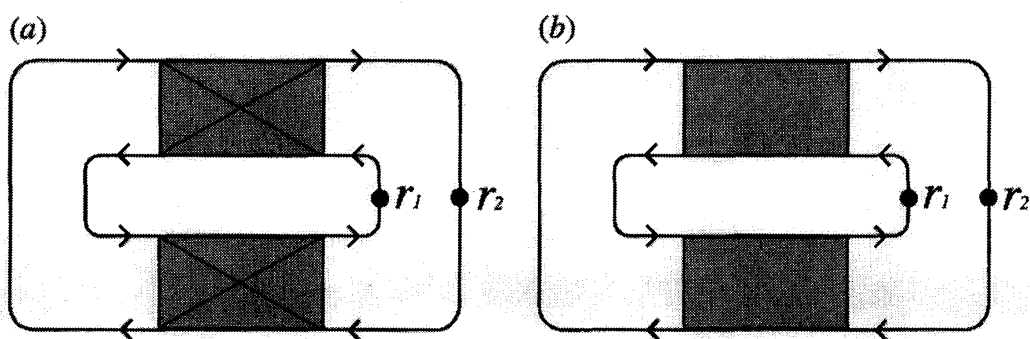


図 3: 二点状態密度相関関数に寄与するダイアグラム。(a)2クーペロン過程と (b)2 デフューゾン過程。

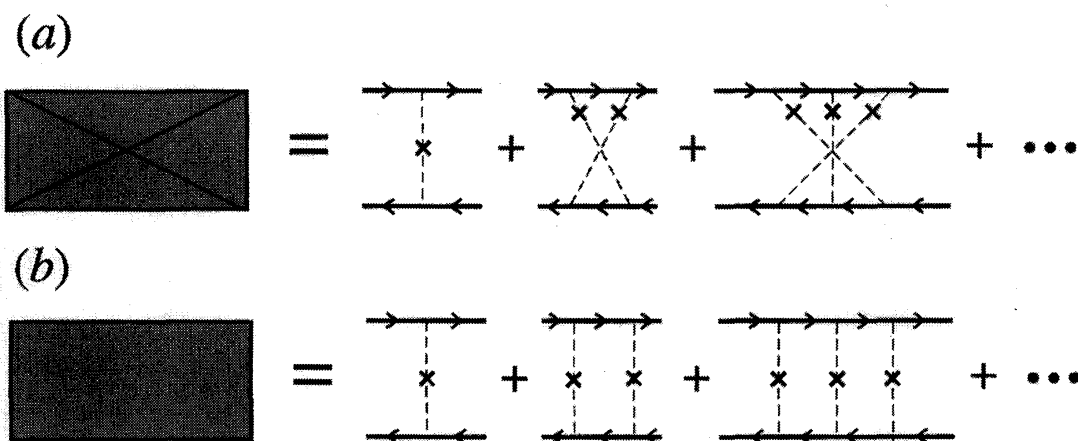


図 4: クーペロン (a) とデフューゾン (b) に対するダイアグラム

図 3(a) は 2 電子-電子対伝搬子 (クーペロン) 過程、図 3(b) は 2 電子-正孔対伝搬子 (ディフューゾン) 過程と呼ばれる。図 3(a) からの寄与は、

$$K_{\alpha,\alpha'}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{1}{2\pi^2 V^2 \hbar^2} \text{Re} \int dx_1 \int dx_2 C_{\alpha,\alpha'}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; \varepsilon_1 - \varepsilon_2) C_{\alpha,\alpha'}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1; \varepsilon_1 - \varepsilon_2) \quad (13)$$

で与えられる。ここで量子干渉効果に寄与しない一体グリーン関数の磁場依存性は無視した。 $C_{\alpha,\alpha'}$  はクーペロンで、次式で定義される (図 4(a))。

$$C_{\alpha,\alpha'}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; \varepsilon_1 - \varepsilon_2) = \frac{2\pi\rho(0)}{\hbar} \langle G_{\alpha,\alpha'}^R(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1; \varepsilon_1) G_{\alpha',\alpha}^A(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1; \varepsilon_2) \rangle \quad (14)$$

一方、図 4(b) ディフューゾンは磁束依存性もたないので、永久電流には寄与しない。従って、クーペロンの寄与のみを考慮すればよいことが分かる。

### 4.3 経路積分を用いたクーペロンの計算

次に、Berry 位相の効果を取り入れるためにクーペロンを経路積分法 [17] を用いて計算する。そのために、2体グリーン関数を

$$G^R(\varepsilon + \hbar\omega) G^A(\varepsilon) = \frac{1}{\hbar^2} \int_0^\infty dt e^{i\omega t} \int_{-\infty}^t dt' e^{i\varepsilon t'/\hbar} e^{-i\gamma t t'/\hbar} e^{i\gamma(t-t')/\hbar} \quad (15)$$

のように書き、さらに遷移振幅  $\exp(i\gamma t/\hbar)$  の軌道部分を経路積分表示する。

$$\langle \alpha \mathbf{x} | e^{i\gamma t/\hbar} | \alpha' \mathbf{x}' \rangle = \int_{\mathbf{x}(0)=\mathbf{x}'}^{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}} \mathcal{D}\mathbf{x} e^{iS_0[\mathbf{x}]/\hbar} \langle \alpha | \mathcal{T} e^{iS_1[\mathbf{x}]/\hbar} | \alpha' \rangle, \quad (16)$$

$$S_0[\mathbf{x}] = \int_0^t dt' \left\{ \frac{1}{2} m |\dot{\mathbf{x}}|^2 - V(\mathbf{x}) \right\}, \quad (17)$$

$$S_1[\mathbf{x}] = \int_0^t dt' \left\{ e\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A}^{em}(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} g\mu_B \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\sigma} \right\} \quad (18)$$

ここで  $\mathcal{T}$  はスピン演算子に対するダイソンの時間順序演算子である。厳密に遷移振幅の行列要素を計算するのは不可能なので準古典近似 [18] :

$$\int_{\mathbf{x}(0)=\mathbf{x}'}^{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}} \mathcal{D}\mathbf{x} e^{iS_0[\mathbf{x}]/\hbar} \approx \sum_{\mathbf{x}_{cl}} A[\mathbf{x}_{cl}] e^{iS_{cl}[\mathbf{x}]/\hbar} \quad (19)$$

を用いて計算を行う<sup>3</sup>。ここで、和は  $\mathbf{x}'$  から始まり  $\mathbf{x}'$  で終わる古典散乱軌道に関して実行する。また、 $A$  は、古典軌道の周りの量子揺らぎの効果であらわす。この近似された二体グリーン関数を式 (14) に代入すると、最終的なクーペロンの表式として次式が得られる。

$$\begin{aligned} C_{\alpha, \alpha'}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; \varepsilon_1 - \varepsilon_2) &\approx \theta(t_1 - t_2) \int_{\mathbf{R}(t_2)=z_2}^{\mathbf{R}(t_1)=z_1} \mathcal{D}\mathbf{R} \\ &\exp \left[ -\frac{1}{4D} \int_{t_2}^{t_1} dt |\dot{\mathbf{R}}|^2 + i\frac{2e}{\hbar} \int_{t_2}^{t_1} dt \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{A}^{em}(\mathbf{R}(t)) \right] \\ &\times \langle \alpha' | \mathcal{T} \exp \left[ i\frac{g\mu_B}{2\hbar} \int_{t_2}^{t_1} dt \mathbf{B}(\mathbf{R}(t)) \cdot \boldsymbol{\sigma} \right] | \alpha' \rangle \langle \alpha | \mathcal{T} \exp \left[ i\frac{g\mu_B}{2\hbar} \int_{t_2}^{t_1} dt \mathbf{B}(\mathbf{R}^\pm(t)) \cdot \boldsymbol{\sigma} \right] | \alpha \rangle \quad (20) \end{aligned}$$

### 4.4 断熱近似

以上、ゼーマン項を含むクーペロンの表式を得た。しかし、一般にこれを厳密に解くことは不可能であるので、系は断熱領域にあるとして断熱近似を施す。今の場合、伝導電子のスピンは非一様磁場の影響を受けながらリング中を運動する。従って、断熱近似が成立するためには、スピンは非一様磁場の局所的な方向のまわりでゆっくりと歳差しながら運動をする必要がある。この条件は、歳差運動の周波数  $\omega_B = g\mu_B B/2\hbar$  が電子がリングを一周する時間  $\tau_D = L_x^2/D$  ( $D$  は拡散係数) の逆数に比べて充分大きくなるという形で表現できる。すなわち、以下の条件を満足する必要がある。

$$\omega_B \tau_D \gg 1 \quad (21)$$

この条件式は、 $B \gg B_c = 2E_{Th}/g\mu_B$  に等価である ( $E_{Th} = \hbar D/L_x^2$  はサウレスエネルギー)。逆に断熱近似が成立しない非断熱領域とは、電子があまりにも速く移動するため、局所的な磁場の周りで歳差運動をすることができないような領域のことである。

<sup>3</sup> 正確には位相部分にマスロフ指数が現れるのだが、最終結果には寄与しないので、以下省略する。

式 (21) の断熱条件が成立するとき、スピン伝搬子の時間発展は断熱近似を用いて取り扱うことができる。

$$\begin{aligned} & \langle \alpha | \mathcal{T} \exp \left[ i \frac{g\mu_B}{2\hbar} \int_{t_2}^{t_1} dt \mathbf{B}(\mathbf{R}(t)) \cdot \boldsymbol{\sigma} \right] | \alpha' \rangle \\ & \approx \sum_{\alpha''=\pm 1} \langle \alpha | \mathbf{B}(\mathbf{R}(t_1)), \alpha'' \rangle \exp(i\gamma_{\alpha''}[\mathbf{R}]) \exp \left[ \pm i\alpha'' \frac{g\mu_B}{2\hbar} (t_1 - t_2) B \right] \langle \mathbf{B}(\mathbf{R}(t_2)), \alpha'' | \alpha' \rangle \end{aligned} \quad (22)$$

ここで、瞬間固有値は

$$| \mathbf{B}(\mathbf{R}), \alpha \rangle = | \alpha \rangle \cos \left( \frac{\chi}{2} \right) + \alpha | -\alpha \rangle e^{i\alpha\eta} \sin \left( \frac{\chi}{2} \right) \quad (23)$$

で与えられる。また、経路  $\mathbf{R}$  に対する Berry 位相は

$$\gamma_{\alpha}[\mathbf{R}] = -\text{Im} \int_{t_2}^{t_1} \langle \mathbf{B}(\mathbf{R}(t)), \alpha | \partial_t | \mathbf{B}(\mathbf{R}(t)), \alpha \rangle = \frac{\alpha}{2} \int d\mathbf{R} \cdot \nabla \eta(\mathbf{R}) [\cos(\chi(\mathbf{R})) - 1] \quad (24)$$

で与えられる。ここでスピン及び座標に依存するゲージポテンシャル

$$\mathbf{A}_{\alpha}^g = \text{Im} \langle \mathbf{B}(\mathbf{R}(t)), \alpha | \nabla_{\mathbf{R}} | \mathbf{B}(\mathbf{R}(t)), \alpha \rangle = \frac{\alpha}{2} \nabla \eta(\mathbf{R}) [\cos(\chi(\mathbf{R})) - 1] \quad (25)$$

を導入すると、Berry 位相は

$$\gamma_{\alpha}[\mathbf{R}] = \int_{t_2}^{t_1} dt \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{A}_{\alpha}^g(\mathbf{R}(t)) \quad (26)$$

と表すことができる。

式 (22) のスピン伝搬子に対する断熱近似の表式を、クーペロンに代入すると

$$C_{\alpha, \alpha'}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t_1, t_2) = \theta(t_1 - t_2) \int_{\mathbf{R}(t_2)=\mathbf{x}_2}^{\mathbf{R}(t_1)=\mathbf{x}_1} \mathcal{D}\mathbf{R} \exp(-iS_{\alpha, \alpha'}^{eff}[\mathbf{R}]) \quad (27)$$

が得られる。 $S^{eff}$  は有効作用で、次式で与えられる。

$$S_{\alpha, \alpha'}^{eff}[\mathbf{R}] = -\frac{i}{4D} \int_{t_2}^{t_1} dt |\dot{\mathbf{R}}|^2 - \int_{t_2}^{t_1} dt \dot{\mathbf{R}} \cdot \{ \mathbf{A}_{\alpha}(\mathbf{R}(t)) + \mathbf{A}_{\alpha'}(\mathbf{R}(t)) \} - \frac{g\mu_B B}{2\hbar} (t_2 - t_1)(\alpha - \alpha') \quad (28)$$

ここで、 $\mathbf{A}_{\alpha}$  はスピン依存ゲージポテンシャルで、次式で定義される。

$$\mathbf{A}_{\alpha} = \frac{e}{\hbar} \mathbf{A}^{em} + \mathbf{A}_{\alpha}^g \quad (29)$$

このように非常にシンプルな形で Berry 位相がクーペロンの位相部分に取り込まれることがわかった。しかし、この表式はあくまでも断熱近似が成り立つ領域(式 (21)) でしか成立しないことに注意されたい。

#### 4.5 永久電流の計算

以上、経路積分表示のクーペロンの表式が得られた。これは、簡単な計算で、式 (27) は以下の偏微分方程式の解に帰着できることが証明できる。

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t'} + D \left\{ -i \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'} - \mathbf{A}_{\alpha}(\mathbf{x}') - \mathbf{A}_{\alpha'}(\mathbf{x}') \right\}^2 - i\omega_B(\alpha - \alpha') \right] C_{\alpha, \alpha'}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t_1, t_2) = \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \delta(t_1 - t_2) \quad (30)$$

ここで、 $\omega_B = g\mu_B B/2\hbar$  である。偏微分方程式 (30) は有効質量  $m = \hbar/2D$  を持つ粒子に対する (虚時間) シュレディンガー方程式になっていることがわかる<sup>4</sup>。

以下、リング長に比べて幅が狭い金属リングについて考えよう。ここで、非一様磁場の絶対値  $B$  はリングの周方向に沿って一定であり、その大きさは幅方向にも変化しないと仮定する。そうすると、ゲージポテンシャル  $A_\alpha$  は、接線方向成分  $A_\alpha(\phi)$  のみを用いて表すことができる。また、 $A_\alpha(\phi)$  は次のように書き直すことができる。

$$2\pi r A_\alpha(\phi) \equiv \Phi_\alpha = \frac{\Phi^{em}}{\Phi_0} + \alpha\Phi^g \quad (31)$$

ここで、 $\Phi^{em}$  は面積  $\pi r^2$  を貫く磁束 (AB 磁束) で、 $\Phi^g$  は次式で定義される幾何学的磁束である。

$$\Phi^g = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi [\cos\chi(\phi) - 1] \partial_\phi \eta(\phi) \quad (32)$$

この幾何学的磁束は、図1のような磁場構造 ( $\eta = \phi$ ) の場合、

$$\Phi^g = \frac{\cos\chi - 1}{2} \quad (33)$$

と傾き角  $\chi$  のみの簡単な関数となる。

以上準備ができたので、クーペロンの具体的な表式を求めていこう。さきほどコメントしたように、式 (30) はシュレディンガー方程式と同じ形をしているので、シュレディンガー方程式に対するグリーン関数を求めるのと同様な手続きでクーペロンを計算することができる。結果は、

$$C_{\alpha,\alpha'}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t_1, t_2) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} C_{\alpha,\alpha'}(\mathbf{k}, \omega) e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) - i\omega(t_1 - t_2)}, \quad (34)$$

$$C_{\alpha,\alpha'}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{-i(\omega - \varpi_{\alpha,\alpha'}) + \frac{1}{\tau_\varphi} + D\mathbf{k}_\perp^2 + \frac{D}{r^2} [n_x - (\Phi_\alpha + \Phi_{\alpha'})]^2}, \quad (35)$$

である。ここで、 $\mathbf{k} = (2\pi n_x/L_x, \mathbf{k}_\perp)$ ,  $\mathbf{k}_\perp = (2\pi n_y/L_y, 2\pi n_z/L_z)$  ( $n_x, n_y, n_z$  は整数)、 $\varpi_{\alpha,\alpha'} \equiv \omega_B(\alpha - \alpha')$  である。計算の際、磁氣的ディフュージングの効果を直接クーペロンの中に  $1/\tau_\varphi = D/L_\varphi^2$  ( $L_\varphi$  は位相コヒーレンス長) の形で取り込んだ。

後は、式 (34) を式 (13) に代入すれば平均永久電流の表式が得られる。スピンインデックスに関する二重和があるが、以下、対角項 ( $\alpha = \alpha'$ ) と非対角項 ( $\alpha \neq \alpha'$ ) に分けて計算を行う。

$$\langle I(\Phi^{em}) \rangle \equiv \langle I^D(\Phi^{em}) \rangle + \langle I^{OD}(\Phi^{em}) \rangle \quad (36)$$

まず対角項であるが、 $\alpha = \alpha'$  とおき、松原法を用いて計算する。そうすると、

$$\langle I^D(\Phi^{em}) \rangle = -\frac{\Delta}{2\pi\beta} \sum_{\alpha=\pm 1} \text{Re} \frac{\partial}{\partial \Phi^{em}} \sum_{\nu_\ell > 0} \sum_{n_x = -\infty}^{\infty} \frac{\nu_\ell}{\left\{ \nu_\ell + \frac{\hbar}{\tau_\varphi} + 4\pi^2 E_{Th} (n_x + 2\Phi_\alpha)^2 \right\}^2}, \quad (37)$$

が得られる。ここで、 $\beta = 1/k_B T$  である。また、 $\nu_\ell = 2\pi\ell$  ( $\ell$  は整数) はボソン松原振動数である。式 (37) においては松原振動数に関する和があるが、絶対温度  $T = 0$  の場合は  $\sum_{\nu} \rightarrow 2\pi/\beta \int d\nu$  と積分に置き換えることができる。そうすると、最終的に  $T = 0$  における対角項の表式として次式が得られる。

$$\langle I^D(\Phi^{em}) \rangle = \frac{I_0}{M} \sum_{\alpha=\pm 1} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-n \frac{L_x}{L_\varphi^B}\right) \sin(4\pi n \Phi_\alpha) \quad (38)$$

<sup>4</sup> 但し、ゼーマン項が存在するために、対応する有効ハミルトニアンは非エルミートである。



ここで、 $I_0 = ev_F/L_x$  は理想一次元リングの一電子状態が運ぶ永久電流で、 $M = k_F^2 V/L_x$  は有効チャネル数である。(  $v_F = \hbar k_F/m$  はフェルミ速度。 ) 式 (38) において、磁氣的ディフューズング長  $L_\varphi^B$  は次式で定義される。

$$\frac{1}{(L_\varphi^B)^2} = \frac{1}{(L_\varphi)^2} + \frac{1}{(L^B)^2} \quad (39)$$

ここで、 $L^B = \sqrt{3}\Phi_0/(2\pi L_y |B_z|)$  は試料を貫く非一様磁場によるディフューズング効果 [19] を表す ( $B_z$  は磁場の  $z$  方向成分である。 )。

一方、非対角項であるが対角項と同様な計算を行うと次式が得られる。

$$\begin{aligned} \langle I^{OD}(\Phi^{em}) \rangle &= -\frac{\Delta}{\pi\beta} \text{Re} \frac{\partial}{\partial \Phi^{em}} \sum_{\nu_\ell > 0} \sum_{n_x = -\infty}^{\infty} \frac{\nu_\ell}{\left\{ \nu_\ell + \frac{\hbar}{\tau_\varphi} + 4\pi^2 E_{Th} \left( n_x + 2 \frac{\Phi^{em}}{\Phi_0} \right)^2 \right\}^2 + (g\mu_B B)^2} \quad (40) \\ &= \frac{I_0}{M} \sum_{n=1}^{\infty} i_n \sin \left( 4\pi n \frac{\Phi^{em}}{\Phi_0} \right) \quad (41) \end{aligned}$$

ここで、

$$i_n = 2n\xi \int_0^{\sqrt{\sqrt{\Gamma^2+1}-\Gamma}} dy \left( \frac{1-y^4}{2y^2} - \Gamma \right) \left[ \cos(n\xi y) + \frac{1}{y^2} \sin(n\xi y) \right] \exp \left( -n \frac{\xi}{y} \right) \quad (42)$$

である。式 (42) において  $\Gamma \equiv D/[2\omega_B(L_\varphi^B)^2]$ 、 $\xi \equiv \sqrt{\hbar\omega_B/E_{Th}}$  である。非対角項は、式 (40) を見て分かるように有限のゼーマン項が存在するために、断熱領域 ( $B \gg B_c$ ) においては非常に小さな値となり、対角項に比べて無視できるほど小さくなる [13]。従って、断熱領域における平均永久電流は

$$\langle I(\Phi^{em}) \rangle \approx \langle I^D(\Phi^{em}) \rangle = \frac{I_0}{2M} \sum_{\alpha=\pm 1} \frac{\sin(4\pi\Phi_\alpha)}{\cosh \left( \frac{L_x}{L_\varphi^B} \right) - \cos(4\pi\Phi_\alpha)} \quad (43)$$

となる。平均永久電流は、AB 磁束  $\Phi^{em}$  と幾何学的磁束  $\Phi^g$  に関して周期的な関数であり、周期はそれぞれ  $\Phi_0/2$ 、 $1/2$  である。また、傾き角が有限 ( $\Phi^g \neq 0$ ) の場合、永久電流の振動周期にスピン分離が現れる期待される。従って、非一様磁場の傾き角  $\chi$  を制御できれば (式 (33))、永久電流を変化させることができる。図 5 は、様々な傾き角  $\chi$  に対する平均永久電流の AB 磁束依存性である (但し、 $L_x/L_\varphi^B = 10$  とした。 )。傾き角の値に応じて、永久電流が変調を受けていることが分かるであろう。

## 5 最後に

孤立メソスコピックリングに流れる永久電流を利用して Berry 位相を観測する方法について議論してきた。特に実験との比較を意識して、不純物散乱及び有限幅の効果について詳細に考察した。

それでは、具体的にはどのようにして実験を行えばよいのであろうか。例えば、NTT の Ye ら [11] が行ったように微小磁性体をリングの中心に埋め込むことにより実現できるのではないかと考えられる。この場合、微小磁性体のサイズや物質を変えることにより、周りに生じる texture 構造 (傾き角  $\chi$ ) を変化させることができるので、図 5 のような永久電流の変調を観測できるであろう。今後の実験研究の進展に期待したい。

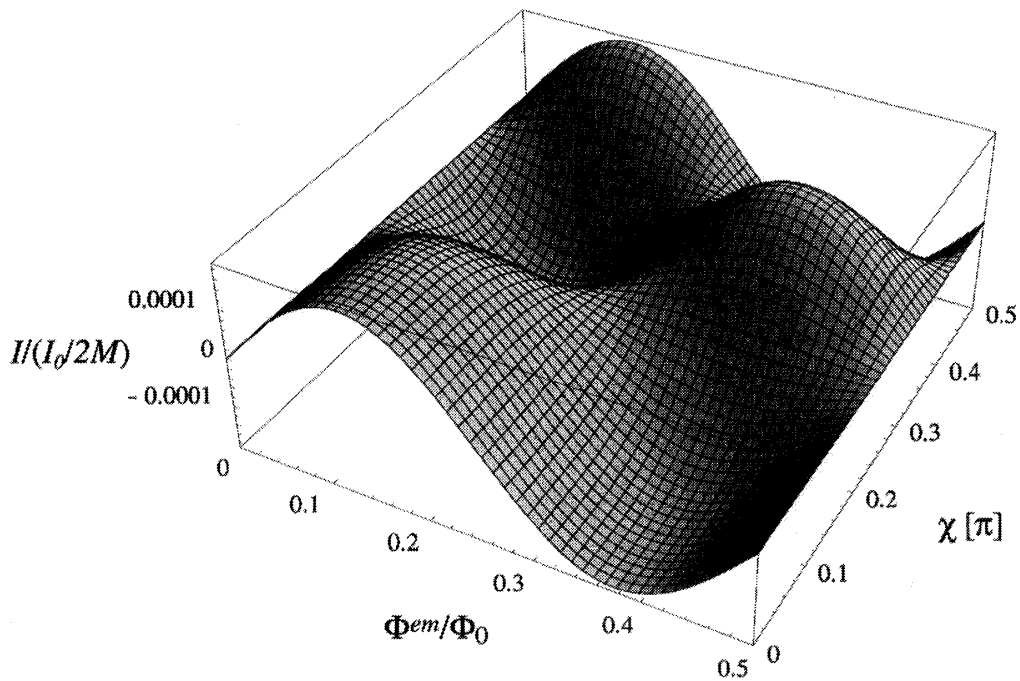


図 5: 平均永久電流の AB 磁束  $\Phi^{em}$  及び傾き角  $\chi$  依存性 (但し、 $L_x/L_\varphi^B = 10$  として計算した。)

## 謝辞

本研究を行うにあたり、阿部修治 (電総研)、B. A. Friedman (Sam Houston State University)、新田淳作 (NTT)、P. D. Ye (NTT) の各氏に有益な議論をして頂きました。

## 参考文献

- [1] M. V. Berry, Proc. Roy. Soc. London A **392**, (1984) 45.
- [2] 倉辻比呂志, パリティ **3**, No.9 (1988) 26; M. V. Berry, パリティ **6**, No.6 (1991) 20.
- [3] A. Shapere and F. Wilczek, *Geometric Phases in Physics* (World Scientific, Singapore, 1989); 倉辻比呂志, 「トポロジーと物理」 (丸善, 1995); 矢吹治一, 「量子論における位相」 (日本評論社, 1998).
- [4] A. Tomita and R. Y. Chiao, Phys. Rev. Lett **57**, (1986) 937.
- [5] D. Neuhauser, R. S. Judson, D. J. Kouri, D. E. Adelman, N. E. Shafer, D. A. V. Kliner, and R. N. Zare, Science **257**, (1992) 519.
- [6] A. Stern, Phys. Rev. Lett **68**, (1992) 1022.
- [7] A. G. Aronov and Y. B. Lyndya-Geller, Phys. Rev. Lett **70**, (1993) 343.

- [8] D. Loss, H. Schoeller, and P. Goldbart, *Phys. Rev. B* **48**, (1993) 15218; D. Loss, H. Schoeller and, P. Goldbart, *Phys. Rev. B* **59**, (1999) 13328; H. A. Engel and D. Loss, cond-mat/0002396.
- [9] A. Morpurgo, J. P. Heida, T. M. Klapwijk, B. van Wees, and G. Borghs, *Phys. Rev. Lett* **80**, (1998) 1050.
- [10] J. Nitta, T. Akazaki, H. Takayanagi, and T. Enoki, *Phys. Rev. Lett* **78**, (1997) 1335.
- [11] P. D. Ye, S. Tarucha, and D. Weiss, *Proceedings of 24th International Conference on the Physics of Semiconductor*, (World Scientific, Singapore, 1999) CD-ROM.
- [12] メゾスコピック系における永久電流についての解説としては、吉岡大二郎, 固体物理 **28** (1993) 741; 川畑史郎, 中村勝弘, 固体物理 **32** (1997) 913 など。
- [13] S. Kawabata, *Phys. Rev. B* **60**, (1999) R8457.
- [14] 長岡洋介, 安藤恒也, 高山一, 「局在・量子ホール効果・密度波」(岩波書店, 1993); D. K. Ferry and S. M. Goodnick, *Transport in Nanostructures* (Cambridge University Press, UK, 1997); J. Rammer, *Quantum Transport Theory* (Peruseus Books, Massachusetts, 1998).
- [15] A. Schmid, *Phys. Rev. Lett.* **66**, (1991) 80; F. von Oppen and E. K. Riedel, *Phys. Rev. Lett.* **66**, (1991) 84; B. L. Altshuler, Y. Gefen, and Y. Imry, *Phys. Rev. Lett.* **66**, (1991) 88.
- [16] B. L. Altshuler and B. I. Shklovskii, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **91**, (1986) 220 [*Sov. Phys. JETP* **64**, (1986) 127].
- [17] ファインマン経路積分については、崎田文二, 吉川圭二, 「経路積分による多自由度の量子力学」(岩波書店, 1986); R. P. Feynman and A. R. Hibbs, 「量子力学と経路積分」(みすず書房, 1995); L. S. Schulman, 「ファインマン経路積分」(講談社, 1995) など。
- [18] S. Chakravarty and A. Schmid, *Phys. Rep.* **140**, (1986) 193.
- [19] B. L. Altshuler and A. G. Aronov, *Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **33**, (1981) 515 [*JETP Lett.* **33**, (1981) 499].