Tsallis 統計による発達乱流の解析

An Analysis of Fully Developed Turbulence by means of Tsallis Statistics

有光敏彦（筑波大物理），有光直子（横浜国大工）

Toshihico ARIMITSU* and Naoko ARIMITSU**
*Institute of Physics, University of Tsukuba, Ibaraki 305-8571, Japan
**Department of Computer Engineering, Yokohama National University, Kanagawa 240-8501, Japan

発達乱流の統計力学的背景を明らかにするために，2つの条件（「確率の規格化」と「間欠性指数の値を一定にする」）の下に一般化されたエントロピー（Tsallis エントロピー）の極大値を与える分布関数として，局所散逸に対する確率密度関数を導出した。その Tsallis エントロピーは，特別な場合（Tsallis 指数 q が 1）として，Boltzmann-Gibbs エントロピーを含んでいる。確率密度関数が与えられると，それに対応するマルチフラクタル・スペクトル $f(\alpha)$ が分かる。ここに現れるすべてのパラメータを，間欠性指数 μ の実測値によりセルフ・コンシステントに決定することができる。得られた $f(\alpha)$ を用いて導出した速度構造関数のスケーリング指数 ζ_m は，実験結果をよく説明することを示した。また，解析的な表式を評価すると，$m \gg 1$ のとき，ζ_m に対数項が存在することも明らかにされた。Tsallis エントロピーに基づいた本論文の解析によって q の値が 0.370 と判明し，発達乱流系の背景となる統計は非示量性統計であることが強く示唆された。

1 はじめに

論文[1)]では，スケーリング関係[2)]

$$1/(1-q) = 1/\alpha_{\rm min}^{\rm B} - 1/\alpha_{\rm max}^{\rm B} \tag{1}$$

を用いて，間欠性指数 μ の実測値より p モデル[3)]に対応する Tsallis 指数 q[4, 5)] の値を求めた。ただし，$\alpha_{\rm max}^{\rm B}$ と $\alpha_{\rm min}^{\rm B}$ は，p モデルにおけるマルチフラクタル・スペクトル $f(\alpha)$ の α 領域の最大値ならびに最小値である。さらに，局所的散逸をあらわす確率密度関数に対して Tsallis 型分布関数を提案し，(1) を利用して μ の測定値より決定した Tsallis 指数の値 $q = 0.237$ を採用すると，その分布関数が p モデルの二項分布関数とよく一致することが分かった[1)]。このことから，発達乱流系の統計力学的背景に Tsallis 統計が関与している可能性が予想され，さらに $q < 1$ であることが明らかになった。

本論文では，発達乱流の本質を明らかにするために論文[1)]の結果を踏襲し，その方針をセルフ・コンシステントに発展させる[6)-9)]。すなわち，2つの条件（「確率の規格化」と「α の分散値を一定にする」）の下に一般化されたエントロピー（Tsallis エントロピー[4, 5)]）の極大値を与える分布関数を導出し，それをもって局所散逸に対する確率密度関数とするのである。なお，Tsallis エントロピーは，特別な場合として，Boltzmann-Gibbs エントロピーを含んでいる。確率密度関数が与えられると，それに対応するマルチフラクタル・スペクトル $f(\alpha)$ が分かる。ここに現れるすべてのパラメータを，間欠性指数 μ の実測値によりセルフ・コンシステントに決定することができる。そこには，いわゆるフィッティング・パラメータは存在しない。得られた確率密度関数から，発達乱流の基礎となる統計は，示量性 Boltzmann-Gibbs 統計ではなく非示量性 Tsallis 統計であることが分かる。

本論文では，網目の大きさが ℓ_0 である格子の後方に発生した等方乱流における速度成分 u（たとえば，流れの速度場 $\vec{u}$ の x 成分）の時系列を解析する。Taylor の凍結仮説の下に，

$$\langle(\delta u(r))^m\rangle \propto r^{\zeta_m} \tag{2}$$

で定義される m 次の速度相関関数に関するスケーリング指数 ζ_m を，マルチフラクタル・スペクトル $f(\alpha)$ を利用して求める。ただし，$\delta u(r) = |u(x+r) - u(x)|$ は，距離 r 離れた2点間の同時刻における速度成分 u の差を表している。期待値 $\langle\cdots\rangle$ は，適切な確率分布関数による平均である。その確率分布関数を特定することが，本論文のひとつの目的である。得られた確率分布関数を採用して導出されたスケーリング指数 ζ_m は，すべての実験データを大変よく説明している（Fig. 1 参照)。図には，他の理論で得られた ζ_m の結果（K41，対数正規，β モデル，p モデル，対数 Poisson）との比較も示してある。なお，解析的な表式を評価すると，$m \gg 1$ のとき，ζ_m に対数項が存在することも分かる。

第2章では，発達乱流の理論のうち，マルチフラクタルによる解析を中心に説明する。第3章では，n 番目のカスケードにおける乱流運動エネルギーの局所散逸を記述する分布関数が求められる。その分布関数は，先に述べた制限の下で Tsallis エントロピーを極大にするものである。さらに，得られた分布関数に対応するマルチフラクタル・スペクトルを決定するセルフ・コンシステント方程式を導出する。第4章では，間欠性指数 μ の実測値を採用してセルフ・コンシステ

ント方程式を解き，スケーリング指数 ζ_m を求める。実験結果ならびに発達乱流の他の理論による結果との比較をする。さらに，この論文で示された方法に対するいくつかの吟味を行う。第5章は，議論にあてる。

2 発達乱流の系

2.1 慣性領域におけるスケーリングの性質

発達乱流の系は Navier-Stokes 方程式

$$\partial \vec{u}/\partial t + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} = -\vec{\nabla}(p/\rho) + \nu\nabla^2\vec{u} \qquad (3)$$

で記述される。ただし，ρ，p，$\nu = \eta/\rho$ は，それぞれ，質量密度，圧力，動粘性率であり，η は静粘性率である。発達乱流の研究は Kolmogorov [10] の次元解析から始まった。そこでは，いかなる物理量も動粘性率とエネルギー注入（流出）率 ϵ によって決まると仮定された。エネルギー注入領域では ν はきかないのでエネルギー注入率は，$\epsilon = u_0^3/\ell_0$ で与えられる。ただし，u_0 は格子位置での流体の速度成分である。他方，エネルギー散逸領域では ν の振る舞いが主になるので，この領域で特徴的な渦サイズ ℓ_d は $\ell_d = (\nu^3/\epsilon)^{1/4}$ で決まる。系のレイノズル数 R は $R = u_0\ell_0/\nu = (\ell_0/\ell_d)^{4/3}$ で与えられる。

高レイノルズ数 $R \gg 1$ の場合は，広い慣性領域が存在する。その領域は $\ell_0 \gg \ell_n \gg \ell_d$ の関係を満たす渦サイズ

$$\ell_n = \ell_0\delta_n, \quad \delta_n = 1/2^n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \qquad (4)$$

で特徴付けられる。n は，カスケード数である。それぞれのカスケードにおいて，渦は半分の大きさに分割されるものとする。高レイノルズ数の極限における慣性領域の統計的本質を明らかにすることが，本論文での主な興味の対象である。この領域では Navier-Stokes 方程式 (3) の第3項が無視できるので，スケール変換 [11]: $\vec{r}' = \lambda\vec{r}$，$\vec{u}' = \lambda^{\alpha/3}\vec{u}$，$t' = \lambda^{1-\alpha/3}t$，$(p/\rho)' = \lambda^{2\alpha/3}(p/\rho)$ に対して不変である。

つぎに慣性領域における直感的な説明をしよう [12]。単位質量あたりの運動エネルギーを

$$E_n = \int_{k_n}^{k_{n+1}} dk\ E_k \propto \delta u_n^2 \qquad (5)$$

と定義する。ただし，$k_n = \ell_n^{-1}$ である。また，$\delta u_n = \delta u(\ell_n)$ は，距離が $\sim \ell_n$ 離れた2点間の速度差である。サイズ ℓ_n の渦に蓄えられていた乱流の運動エネルギーがサイズ ℓ_{n+1} の渦に移るのにかかる時間の目安は，渦の1回転する時間

$$t_n = \ell_n/\delta u_n \qquad (6)$$

で与えられるものとする。n 番目の渦から $(n+1)$ 番目の渦への単位質量あたりのエネルギー輸送率[1] ϵ_n は

$$\epsilon_n \sim E_n/t_n \sim (\delta u_n)^3/\ell_n \qquad (7)$$

となる [12]。

以上のように考えると，$r \sim \ell_n$ の領域にわたって平均された単位質量あたりのエネルギーの輸送率 ϵ_r は，乱流の局所的散逸エネルギーと呼ばれ，その α 依存性は，$\epsilon_r \sim \delta u_r^3/r \propto r^{\alpha-1}$ となることが分かる。サイズ r の箱を考えると全散逸エネルギー E_r は

$$E_r \sim \epsilon_r r^d \propto r^{\alpha-1+d} \qquad (8)$$

となる。d は空間次元で，今の場合1である。

2.2 マルチフラクタル的解析

スケール不変性から，サイズ $r \sim \ell_n$ の渦は，それぞれスケーリング指数 α で特徴付けられる異なったエネルギー輸送率を持つ渦どうしに分類でき，マルチフラクタル的な構造を呈すると考えられる。そこで，乱流の運動エネルギー輸送率 ϵ_r がマルチフラクタル的に分布しているために，発達乱流の系に間欠性の現象が表れると仮定 [11] しよう。

1次元空間を長さ r に分割し，(8) で記述される E_r を α に関して足し合わせると，それはサイズ r に

$$\sum_\alpha E_r^{\bar{q}} \sim r^{(\bar{q}-1)D_q} \qquad (9)$$

と依存することが期待される [11]。ただし，$D_{\bar{q}}$ は一般化された次元（Renyi 次元）と呼ばれる量である。和を積分 $\sum_\alpha = \int d\alpha\ \rho(\alpha)\ r^{-f(\alpha)}$ で置き換える。ただし，$\rho(\alpha) r^{-f_d(\alpha)}$ は α の値が $\alpha \sim \alpha + d\alpha$ にある領域の個数である。また，$f_d(\alpha)$ は，α の値が $\alpha \sim \alpha + d\alpha$ にあるスケーリング指数の集合のマルチフラクタル・スペクトルである。密度 $\rho(\alpha)$ の α 依存性が弱いと仮定し，さらに r の小さい極限で最速降下法を用いると，関係式

$$f(\alpha) = \alpha\bar{q} + \tau(\bar{q}) \qquad (10)$$

が導出できる [11]。ただし，質量指数

$$\tau(\bar{q}) = (1-\bar{q})D_{\bar{q}} \qquad (11)$$

を導入した。α は

$$\alpha = -d\tau(\bar{q})/d\bar{q} \qquad (12)$$

[1] 定常過程におけるエネルギーの保存により $\epsilon_n = \epsilon$ でなくてはならない。これを (7) に代入すると，$\delta u_n \sim (\epsilon\ell_n)^{1/3}$ と $E_n \sim (\epsilon\ell_n)^{2/3}$ を得る。そこで，(5) により Kolmogorov スペクトル: $E_k \sim E_n k_n^{-1} \sim \epsilon^{2/3}k^{-5/3}$ が得られる。

で定義される。一方，$\bar{q}$ は

$$\bar{q} = df(\alpha)/d\alpha \tag{13}$$

で定義される。(10) は (12) あるいは (13) と併せると，Legendre 変換になっている[2]。

乱流エネルギーの局所的散逸を記述する確率密度関数 $P_\epsilon(\epsilon_r)$ は

$$\begin{aligned} P_\epsilon(\epsilon_r)\, d(\epsilon_r/\epsilon) &\propto \left(\frac{r}{\ell_0}\right)^{D_0 - f_d(\alpha)} \frac{\epsilon}{\epsilon_r \ln(r/\ell_0)}\, d(\epsilon_r/\epsilon) \\ &= \delta_n^{D_0 - f_d(\alpha)}\, d\alpha \\ &= \exp\{[D_0 - f_d(\alpha)] \ln \delta_n\}\, d\alpha \end{aligned} \tag{14}$$

で与えられる[11]。ただし，

$$\epsilon_r/\epsilon = (r/\ell_0)^{\alpha-1} \tag{15}$$

である。また，間欠性指数 μ は

$$\mu = 1 - D_2 = 1 + \tau(2) \tag{16}$$

で与えられる[11]。

3 発達乱流の本質となる統計の探索

3.1 Tsallis エントロピーを最大にする分布関数

n 番目のカスケードにおける局所散逸を記述する確率密度関数

$$P_{\mathrm{T}}^{(n)}(\alpha) = [P_{\mathrm{T}}^{(1)}(\alpha)]^n \tag{17}$$

を決定しよう。カスケードの各ステップが互いに独立であると仮定する。$P_{\mathrm{T}}^{(1)}(\alpha)$ を決定するために Tsallis エントロピー:

$$S_q[P(\alpha)] = (1-q)^{-1}\left(\int d\alpha P(\alpha)^q - 1\right) \tag{18}$$

の極値を取る。その際

$$\int d\alpha P(\alpha) = 1 \tag{19}$$

と

$$\begin{aligned} \sigma_q^2 &= \langle(\alpha-\alpha_0)^2\rangle_q \\ &= \left(\int d\alpha P(\alpha)^q (\alpha-\alpha_0)^2\right) \Big/ \int d\alpha P(\alpha)^q \end{aligned} \tag{20}$$

の制限を加える。$q \to 1$ の極限で，Tsallis 統計は Boltzmann-Gibbs 統計となる。以上の手続きにより，

$$\begin{aligned} &P_{\mathrm{T}}^{(1)}(\alpha) d\alpha \\ &= \bar{Z}_q^{-1}\left[1-(1-q)\,\bar{\beta}\frac{(\alpha-\alpha_0)^2-\sigma_q^2}{\bar{Z}_q^{1-q}}\right]^{1/(1-q)} d\alpha \\ &= Z_q^{-1}\left[1-(1-q)\,\beta\frac{(\alpha-\alpha_0)^2}{Z_q^{1-q}}\right]^{1/(1-q)} d\alpha \end{aligned} \tag{21}$$

という確率関数が得られる。ただし，$\bar{\beta}$ は Lagrange 定数であり，

$$\beta = \bar{\beta}\left[1+(1-q)\bar{\beta}\sigma_q^2/\bar{Z}_q^{1-q}\right]^{-2} \tag{22}$$

$$\bar{Z}_q = \int d\alpha \left\{1-(1-q)\,\bar{\beta}\frac{(\alpha-\alpha_0)^2-\sigma_q^2}{\bar{Z}_q^{1-q}}\right\}^{1/(1-q)} \tag{23}$$

$$Z_q = \int d\alpha \left\{1-(1-q)\,\beta\frac{(\alpha-\alpha_0)^2}{Z_q^{1-q}}\right\}^{1/(1-q)} \tag{24}$$

である。ここで

$$\int d\alpha [P_{\mathrm{T}}^{(1)}(\alpha)]^q = \bar{Z}_q^{1-q} \tag{25}$$

と

$$Z_q^{1-q} = \bar{Z}_q^{1-q}\left[1+(1-q)\bar{\beta}\sigma_q^2/\bar{Z}_q^{1-q}\right]^{-1} \tag{26}$$

を用いると，

$$\beta/Z_q^{2(1-q)} = \bar{\beta}/\bar{Z}_q^{2(1-q)} \tag{27}$$

の関係が得られる。

エントロピーは，

$$S_q = \left(\bar{Z}_q^{1-q}-1\right)/(1-q) \tag{28}$$

で与えられ，Lagrange 定数 $\bar{\beta}$ は

$$\partial S_q/\partial\sigma_q^2 = \bar{\beta} \tag{29}$$

により与えられる。関係

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_q^{1-q} &= \bar{Z}_q^{1-q} - (1-q)\bar{\beta}\sigma_q^2 \\ &= Z_q^{1-q}\frac{[1-2(1-q)\beta\sigma_q^2/Z_q^{1-q}]}{[1-(1-q)\beta\sigma_q^2/Z_q^{1-q}]^2} \end{aligned} \tag{30}$$

を用いて

$$F_q = -\left(\tilde{Z}_q^{1-q}-1\right)\Big/\bar{\beta}(1-q) \tag{31}$$

とすると

$$F_q = \sigma_q^2 - \bar{\beta}^{-1}S_q \tag{32}$$

の関係が得られる。ただし，

$$\sigma_q^2 = \partial\left(\bar{\beta}F_q\right)/\partial\bar{\beta}, \tag{33}$$

$$S_q = -\partial F_q/\partial\bar{\beta}^{-1} \tag{34}$$

である。これらの関係により通常の（示量性）熱力学と同様の Legendre 変換が得られる。$q \to 1$ の極限で，これらの関係は Boltzmann-Gibbs 統計や熱力学のものと一致する。

---
[2] 本論文では，Tsallis 指数 q と混同しないよう文字 $\bar{q}$ を用いている。

3.2 Tsallis 統計に基づくセルフ・コンシステントな解析

乱流の局所散逸を記述する確率密度関数が

$$P_{\mathrm{T}}^{(n)}(\alpha)d\alpha = \left(Z_{\mathrm{T}}^{(n)}\right)^{-1}\left[1-(1-q)\frac{(\alpha-\alpha_0)^2}{2X/\ln 2}\right]^{n/(1-q)} d\alpha \quad (35)$$

で与えられるものと仮定する。ただし, $Z_{\mathrm{T}}^{(n)} = Z_q^n$,

$$2X/\ln 2 = Z_q^{1-q}/\beta \quad (36)$$

と置いた。この分布関数に対応するマルチフラクタル・スペクトルは, (14) 式より

$$f_{\mathrm{T}}(\alpha) = D_0 + (1-q)^{-1}\log_2\left[1-(1-q)\frac{(\alpha-\alpha_0)^2}{2X/\ln 2}\right] \quad (37)$$

となる。カスケードの各ステップが独立であると仮定したので, マルチフラクタル・スペクトルはカスケードの数 n によらない。3 つのパラメータ α_0, X, Tsallis 指数 q は間欠性指数 μ が与えられると決まる。

$\bar{q}$ と α の関係は (13) で与えられる。これを解き, $q \to 1$ で有限となる解を選ぶと,

$$\alpha_{\bar{q}} - \alpha_0 = \left(1-\sqrt{\mathcal{D}}\right) \Big/ \bar{q}(1-q)\ln 2 \quad (38)$$

が得られる。ただし,

$$\mathcal{D} = 1 + 2\bar{q}^2(1-q)X\ln 2 \quad (39)$$

である。これより, $\alpha_{\max} = \alpha(\bar{q} = -\infty)$ と $\alpha_{\min} = \alpha(\bar{q} = +\infty)$ は

$$\alpha_{\max} - \alpha_0 = \alpha_0 - \alpha_{\min} = \sqrt{2X/(1-q)\ln 2} \quad (40)$$

と求まる。また, 積分領域も記した σ_q^2 の正確な表式は

$$\sigma_q^2 = \bar{Z}_q^{\,-(1-q)} \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} d\alpha\,(\alpha-\alpha_0)^2 \left[P_{\mathrm{T}}^{(1)}(\alpha)\right]^q \quad (41)$$

である。

(37) と (38) を用いると (10) により $d = 1$ に対して,

$$\tau(\bar{q}) = (1-\bar{q})D_{\bar{q}} = -\alpha_{\bar{q}}\bar{q} + f_{\mathrm{T}}(\alpha_{\bar{q}}) \quad (42)$$

が得られる。ただし,

$$f_{\mathrm{T}}(\alpha_{\bar{q}}) = 1 + (1-q)^{-1}\log_2\left[1-\frac{(1-\sqrt{\mathcal{D}})^2}{2\bar{q}^2(1-q)X\ln 2}\right] \quad (43)$$

である。マルチフラクタル集合のフラクタル次元に対して $f_{\mathrm{T}}(\alpha_0) = D_0 = 1$ とした。$q \neq 1$ の場合, $|\bar{q}| \to \infty$ に対して,

$$f_{\mathrm{T}}(\alpha_{\bar{q}}) \;\to\; 1 + (1-q)^{-1}\Big[\log_2|\bar{q}| + \log_2\sqrt{X(1-q)\ln 2} + \mathcal{O}(1/\bar{q})\Big] \quad (44)$$

が得られる。このことは $|\bar{q}|$ が大きい場合 $\tau(\bar{q})$ に対数項が表れることを示している。

3 つのパラメータ α_0, X, q を決定するためには 3 つの独立な方程式が必要である。

1. (42) に $\bar{q} = 1$ を代入して第 1 の関係式

$$\tau(1) = 0 \quad (45)$$

が得られる。

2. (42) に $\bar{q} = 2$ を代入し (16) を用いると, 3 つのパラメータを用いて μ を与える第 2 の関係式

$$\mu = 1 + \tau(2) \quad (46)$$

が得られる。

3. $f_{\mathrm{T}}(\alpha) = 0$ の解

$$\alpha_{\pm} = \alpha_0 \pm \sqrt{2bX} \quad (47)$$

を

$$1/(1-q) = 1/\alpha_- - 1/\alpha_+ \quad (48)$$

に代入して第 3 の関係式が得られる。ただし, $b = (1-2^{-(1-q)})/[(1-q)\ln 2]$ を導入した。

(48) は, マルチフラクタル・スペクトル $f(\alpha)$ が負の値を持つ場合も含めて (1) を一般化したものである。間欠性指数 μ の値が分かれば, 上記の 3 つの方程式により 3 つのパラメータ α_0, X, q が決まる。

第 3 の関係式 (48) を解くと

$$\sqrt{2X} = \left[\sqrt{\alpha_0^2 + (1-q)^2} - (1-q)\right] \Big/ \sqrt{b} \quad (49)$$

あるいは

$$\alpha_0 = \sqrt{2bX + 2(1-q)\sqrt{2bX}} \quad (50)$$

が得られる。

4 結果

実験値 $\mu = 0.235$ [11] を採用すると $q = 0.370$, $\alpha_0 = 1.14$, $X = 0.280$ [6,7] が得られる。このとき $\alpha_+ - \alpha_0 = \alpha_0 - \alpha_- = 0.673$, $\alpha_{\max} - \alpha_0 = \alpha_0 - \alpha_{\min} = 1.133$, $\bar{q}(\alpha_-) = -\bar{q}(\alpha_+) = 3.72$, $\sigma_q^2 = 0.307$, $\bar{\beta} = 1.71$, $\beta = 1.47$, $\bar{Z}_q = 1.48$ ($\bar{Z}_q^{1-q} = 1.28$), $Z_q = 1.31$ ($Z_q^{1-q} = 1.19$) である。

4.1 スケーリング指数

速度構造関数のスケーリング指数 ζ_m は,

$$\zeta_m = 1 - \tau(m/3) = (m/3 - 1)\, D_{m/3} + 1 \tag{51}$$

で表される[11)]。$\mu = 0.235$ の場合の結果を，実験結果[13, 14)]や他の理論計算結果とともに Fig. 1 に載せてある。対象となる他の理論は以下のとおりである。

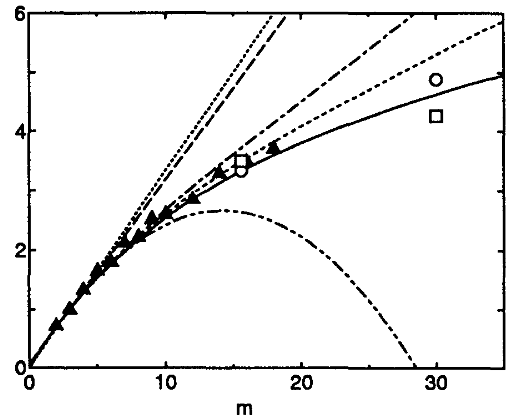

Figure 1: 速度構造関数のスケーリング指数 ζ_m。実線は $\mu = 0.235$ を採用した場合の本論文の結果。黒塗り三角形は Anselmet *et al.* (1984) による実験結果。四角と丸は Meneveau and Sreenivasan (1991) による実験結果。点線は K41，破線は β モデル ($D_\beta = 2.8$)，一点鎖線は p モデル ($\mu = 0.235$)，短い破線は対数 Poisson モデル，2 点鎖線は対数正規 ($\mu = 0.235$) モデルの結果である。

1. K41 [10)]

$$\zeta_m = m/3. \tag{52}$$

2. 対数正規 [15)-17)]

$$\zeta_m = -\mu m[m + 3(\mu + 2)/\mu]/18. \tag{53}$$

3. β モデル [12)]

$$\zeta_m = (1 - \mu)m/3 + \mu. \tag{54}$$

4. p モデル [3, 11)]

$$\zeta_m = 1 - \log_2 \left[p^{m/3} + (1-p)^{m/3}\right]. \tag{55}$$

ただし,

$$p = \left(1 + \sqrt{2^\mu - 1}\right)/2 \tag{56}$$

である。$m \gg 1$ の場合,

$$\zeta_m \to -\frac{\log_2 p}{3} m \tag{57}$$

となることが分かる。

5. 対数 Poisson [18, 19)]

$$\zeta_m = m/9 + 2\left(1 - (2/3)^{m/3}\right). \tag{58}$$

本論文によって得られた解析的表式 (51) は，実験結果をよく説明している。

$m \to \infty$ での ζ_m の漸近形には，(44) の対数項が現れる。つまり,

$$\begin{aligned}\zeta_m = \alpha_{\min} m/3 + (1-q)^{-1}\Big[&\log_2 m \\ &+ \log_2\left(\sqrt{X(1-q)\ln 2}/3\right) + \mathcal{O}(1/m)\Big]\end{aligned} \tag{59}$$

である。スケーリング指数 (59) の漸近形に対数項が存在することは，Tsallis 統計を特徴づける注目すべき性質である[3]。

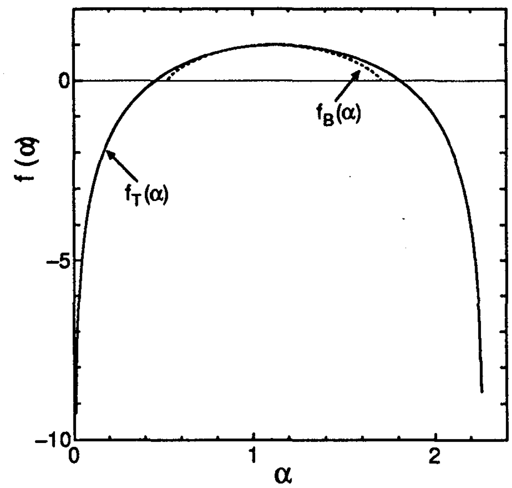

Figure 2: $\mu = 0.235$ を採用した場合の Tsallis 統計に基づくマルチフラクタル・スペクトル $f_{\rm T}(\alpha)$ と乗法的二項過程に基づくマルチフラクタル・スペクトル $f_{\rm B}(\alpha)$

4.2 マルチフラクタル・スペクトル

本論文によって得られたマルチフラクタル・スペクトル $f_{\rm T}(\alpha)$ を Fig. 2 に示しておく。この図でも $\mu = 0.235$ を採用した。$f_{\rm T}(\alpha)$ に対して α の領域は $[\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$ である。$\alpha > \alpha_+$, $\alpha < \alpha_-$ に対して $f_{\rm T}(\alpha) < 0$ [6)] であることに注意されたい。マルチフラクタル・スペクトルがアニール平均に対応する場合は負になることが知られている[21)]。$f_{\rm T}(\alpha)$ は Tsallis エントロピーの極

[3] 本論文を書き上げたあとに，Hosokawa により導入された一般化された Cantor 集合に基づいた解析においても，対数項が現れる[20)]ことを知った。Tsallis エントロピーを基礎にした統計力学的手法で，一般化された Cantor 集合の物理的意味を探るのは興味深い問題であろう。

値を与える分布関数 $P_{\rm T}(\alpha)$ から求めたので，本論文の解析で得られたマルチフラクタル・スペクトルはアニール平均に対応したものであろう。なお，分布関数 $P_{\rm T}^{(n)}(\alpha)$ は領域 $[\alpha_{\min},\ \alpha_{\max}]$ において正である。

p モデルによるマルチフラクタル・スペクトル $f_{\rm B}(\alpha)$ も Fig. 2 に示す。その解析的表式[22]は

$$\begin{aligned}f_{\rm B}(\alpha) &= \log_2 \Delta\alpha^{\rm B}\\ &\quad -\left[\left(\alpha^{\rm B}_{\max}-\alpha\right)\log_2\left(\alpha^{\rm B}_{\max}-\alpha\right)\right.\\ &\quad \left.+\left(\alpha-\alpha^{\rm B}_{\min}\right)\log_2\left(\alpha-\alpha^{\rm B}_{\min}\right)\right]/\Delta\alpha^{\rm B} \qquad (60)\end{aligned}$$

である。ただし，$\Delta\alpha = \alpha^{\rm B}_{\max} - \alpha^{\rm B}_{\min}$，$\alpha^{\rm B}_{\min} = -\log_2 p$，$\alpha^{\rm B}_{\max} = -\log_2(1-p)$ である。$\alpha^{\rm B}_{\min}$ と $\alpha^{\rm B}_{\max}$ は，それぞれ $f_{\rm B}(\alpha)$ に対する α の最小値，最大値である。それはまた，$f_{\rm B}(\alpha) = 0$ の解でもある。(56) によれば，p は μ から導出されることが分かる。二項過程に基づくマルチフラクタル・スペクトルはクエンチ平均に対応している[21]。

4.3 $q \to 1$ の場合

有限の n に対して $q \to 1$ の極限で $P_T^{(n)}(\alpha)$ は Gauss 型分布関数となることが分かる。各パラメータの間には，

$$\alpha_0^2 = 2X, \quad X = \mu, \qquad (61)$$

$$\sigma^2_{q=1} = 1/2\beta = \mu/\ln 2 \qquad (62)$$

の関係が成立する。(62) の最初の等号は，等分配則を示している。これらの関係式は，$q \to 1-$ で $f_{\rm T}(\alpha)$ の表式を用いて得られる結果と矛盾しない。つまり，このとき，$\alpha_0 = X = 2$，$\mu = 1 + \tau(2) = 2$，$\bar{\beta} = \beta = \ln 2 = 0.693$ を得る。これより

$$f_{\rm T}(\alpha) = -\alpha(\alpha-4)/4, \quad \tau(\bar{q}) = (1-\bar{q})^2 \qquad (63)$$

となる。$q = 1$ のとき Gauss 型分布を与える訳だが，対数正規モデル[11]とは異なる。μ の値から判断して，発達乱流に対して $q = 1$ の場合は実現しないと結論づけることができよう。

4.4 $q > 1$ での解について

スケーリング関係 (48) を $q > 1$ の場合に拡張するために

$$1/|1-q| = 1/\alpha_- - 1/\alpha_+ \qquad (64)$$

と一般化する。

セルフ・コンシステント方程式 (45)，(46)，(64) が $q > 1$ で解を持ち，その値が $q = 1.52$，$\alpha_0 = 1.10$，$X = 0.202$ であることは興味深い。この場合，$\bar{q}$ の値は

$$|\bar{q}| \le \bar{q}_{\rm end} = [2(q-1)X\ln 2]^{-1/2} \qquad (65)$$

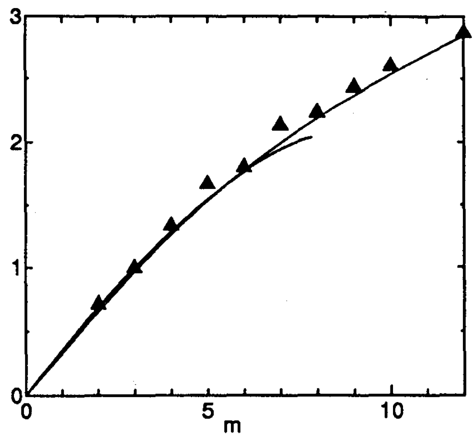

Figure 3: 実線は $\mu = 0.235$ を採用した場合の $q > 1$ に対する速度構造化関数のスケーリング指数 ζ_m。細い実線は $q < 1$ に対する Fig. 1 と同じもの。黒塗り三角形は Anselmet *et al.* (1984) による実験結果。

に制限される。この領域外では，(39) で与えられる $\mathcal{D}$ は負となる。端点 $\bar{q} = \pm\bar{q}_{\rm end}$ では

$$|\alpha_{\pm\bar{q}_{\rm end}} - \alpha_0| = \sqrt{2X/(q-1)\ln 2} \qquad (66)$$

$$f_{\rm T}(\alpha_{\pm\bar{q}_{\rm end}}) = 1 - (q-1)^{-1} \qquad (67)$$

が得られる。

$q > 1$ の場合のスケーリング指数 ζ_m を Fig. 3 に実線で示した。$\bar{q}_{\rm end}$ に対応して m に上限がある。すなわち，$q > 1$ では，ζ_m は $m \le 3\bar{q}_{\rm end} = 7.86$ のときにのみ意味を持つ。なお，$q > 1$ (実線) と $q < 1$ (細い実線) の場合，ともに実験で得られた同じ μ の値を用いているので，それぞれの ζ_m の値は $m = 6$ で一致している。

本論文の手法を用いると $q > 1$ に対してもセルフ・コンシステントな解が存在するが，その物理的意味はまだ明らかでない。しかし，$q > 1$ と $q < 1$ の場合の二重性を調べる際に，何らかの指針を与えることが期待される。

5 考察

「確率の規格化」と「スケーリング指数 α の分散の値を一定にする」という 2 つの条件の下に Tsallis エントロピーの極大値を与える分布関数を導出し，それを局所的散逸に対する確率密度関数 $P_{\rm T}(\alpha)$ とした。これは測定された間欠性指数 μ と関係付けられる。Tsallis エントロピーに基づいた本論文の解析によって q の値が 0.370 と判明し，発達乱流系の背景となる統計は示

量性統計ではなくて非示量性統計であることが分かった。統計的に独立な系 A, B に対して成立する Tsallis エントロピー S_q の示す擬加法的性質 [5]:

$$S_q(A+B) = S_q(A) + S_q(B) + (1-q)S_q(A)S_q(B) \tag{68}$$

は，過剰乱流エントロピーと何らかの関連があるかも知れない。その関連が明らかになれば，より深く乱流を理解することができるであろう。また，スケーリング指数の漸近形に対数項が存在することは Tsallis 統計を特徴づける注目すべき性質である。その実験的検証は本論文の手法の妥当性の確認ともなる。本論文の解析が，非示量性という奇妙な性質を持つ Tsallis 統計の本質的な理解へ導くことを期待する。ひいてはそれが，乱流の間欠性という古くてしかも今なお新鮮な難問の理解へと繋がることを願いたい。

ここで提案したマルチフラクタル・スペクトルを参考にすると，Tsallis 統計の背後にある動力学的性質が見出せるであろう。それは，Navier-Stokes 方程式に基づいた動力学的解析 [23)-25)] との関係を付ける足がかりになるものと期待される。

本論文の手法によってスキューネスの問題を扱うことは，興味深い今後の問題である。その際，Beck [26)] や Hosokawa [27)] が提案した方法との比較が必要となるであろう。これらについては，また改めて報告する。

謝辞

Constantino Tsallis 教授，中野徹教授，吉沢徹教授，細川巌教授，後藤俊幸教授，木田重雄教授の有益な助言に感謝したい。著者 (T.A) は筑波大学学内プロジェクトの経済的支援に感謝する。

引用文献

1) T. Arimitsu and N. Arimitsu, Phys. Rev. E **61** (2000) 3237.

2) M. L. Lyra and C. Tsallis, Phys. Rev. Lett. **80** (1998) 53.

3) C. Meneveau and K. R. Sreenivasan, Phys. Rev. Lett. **59** (1987) 1424.

4) C. Tsallis, J. Stat. Phys. **52** (1988) 479.

5) C. Tsallis, Braz. J. Phys. **29** (1999) 1 and the references therein.

6) T. Arimitsu and N. Arimitsu, *Tsallis Statistics and Fully Developed Turbulence*, (2000) preprint .

7) T. Arimitsu and N. Arimitsu, *Analysis of Fully Developed Turbulence by a Generelized Statistics*, (2000) preprint .

8) T. Arimitsu and N. Arimitsu, *Tsallis Statistics and Turbulence*, (2000) preprint.

9) 有光敏彦, 有光直子, 「Tsallis 統計に基づく発達乱流の解析」, (2000) preprint.

10) A. N. Kolmogorov, C. R. Acad. Sci. USSR **30** (1941) 301; 538.

11) C. Meneveau and K. R. Sreenivasan, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **2** (1987) 49.

12) U. Frisch, P-L. Sulem and M. Nelkin, J. Fluid Mech. **87** (1978) 719.

13) F. Anselmet, Y. Cagne, E. J. Hopfinger and R. A. Antonia, J. Fluid Mech. **140** (1984) 63.

14) C. Meneveau and K. R. Sreenivasan, J. Fulid Mech. **224** (1991) 429.

15) A. M. Oboukhov, J. Fluid Mech. **13** (1962) 77.

16) A. N. Kolmogorov, J. Fluid Mech. **13** (1962) 82.

17) A. M. Yaglom, Sov. Phys. Dokl. **11** (1966) 26.

18) Z-S. She and E. Leveque, Phys. Rev. Lett. **72** (1994) 336.

19) Z-S. She and E. Waymire, Phys. Rev. Lett. **74** (1995) 262.

20) I. Hosokawa, Phys. Rev. Lett. **66** (1991) 1054.

21) A.B. Chhabra and K.R. Sreenivasan, Phys. Rev. A **43** (1991) 1114.

22) J. Feder, *Fractals* (Plenum Press, New York, 1988).

23) W. Heisenberg, Z. Phys. **124** (1948) 628.

24) R. H. Kraichnan, J. Fluid Mech. **5** (1959) 497.

25) T. Nakano and F. Tanaka, Prog. Theor. Phys. **65** (1981) 120 and the references therein.

26) C. Beck, Physica A **277** (2000) 115.

27) I. Hosokawa, J. Phys. Soc. Jpn. **69** (2000) 695.