Monte Carlo 法による重力場の量子化[1]

総研大　教育研究交流センター　　湯川哲之 [2]

話の PLAN

1. イントロダクション
   量子重力、その問題点
2. 2 次元重力：ミニ究極理論
   Liouville 理論－解ける重力場の理論、格子理論、行列模型－連続理論と格子理論の架け橋
3. MC 計算とその解析
   2 次元シミュレーション、4 次元量子重力
4. 今後の課題

1　量子重力、その問題点

重力は、他の 3 種の基本相互作用に比べると圧倒的に弱い. 例えば電荷 e を持つ 2 粒子の間に働く Coulomb 力と同程度の重力を得るには粒子の質量がほぼ 10^{19}GeV(Planck 質量) もなければならない. それでは重力は摂動論で十分かといえばそうではない. 重力の運動方程式は Einstein-Hilbert 作用

$$S_g = \Lambda \int d^4x\sqrt{g} - \kappa \int d^4x\sqrt{g}R \tag{1}$$

を測度テンソル g_{ik} で変分することにより求まる. ここで問題なのが作用の各項に現れる 2 つの結合定数 Λ（宇宙定数）と $G = 1/\kappa$（重力定数）が次元を持つことである. 一般に次元を持つ結合定数を含む場の量子論は摂動論的に繰り込みが不可能な発散を引き起こす. さらに作用積分の第 2 項、すなわち Einstein 項は正定値ではなく、そのため単純な摂動論的真空は局所的な曲率の揺らぎに対して不安定となっている. この困難に対処する理論して最も注目されているのは超弦理論であることはよく知られている. しかし、Einstein 重力の非摂動的な量子化の可能性が否定されたわけではない. ここでは重力の非摂動論的量子化について、QCD や 2 次元重力などで研究された過去の知見を手本にして進行している研究の現状を我々の仕事を中心に紹介する.

2　2 次元重力：ミニ究極の理論

2 次元重力は単に 4 次元の簡易版というだけではなく弦理論の基礎でもあり、さまざまな角度から研究されてきた. ここでは連続理論・格子理論・マトリックス理論とそれら相互の関係を簡単

[1] この原稿は、京都大学基礎物理学研究所研究会' モンテカルロ法の新展開 2' での講演 (2000.10.31) 概略である

[2] E-mail: yukawa@koryuw02.soken.ac.jp

に説明する.

2.1 連続理論－Liouville 理論 [1]

2 次元重力は次の分配関数で定義される:

$$Z_{\Lambda} = \int \frac{[g^{-1}dg]_g [df]_g}{vol(diff)} e^{-S_g - S_f}. \tag{2}$$

ここで S_g は Einstein-Hilbert の重力作用（ただし 2 次元では Einstein 項はトポロジカルな定数)、また S_f は Polyakov 作用とも呼ばれる c 個のスカラー場 $\{f^a\}$ の作用

$$S_f = \frac{1}{4\pi} \sum_{a=1}^{c} \int d^2x \sqrt{g} g^{ik} \partial_i f^a \partial_k f^a. \tag{3}$$

$vol(diff)$ はゲージ体積、すなわちゲージ不変性による積分の重複を帳消しにするために導入. 汎関数積分の測度はノルム

$$< \delta g, \delta g >_g = \int d^2x \sqrt{g} (g^{ik} g^{lm} + u g^{il} g^{km}) \delta g_{il} \delta g_{km} \tag{4}$$

$$< \delta f, \delta f >_g = \int d^2x \sqrt{g} \delta f^a \delta f^a \tag{5}$$

で定義されているが、重力理論の特徴は測度が場の変数 g_{ik} に直接依存することである. このままでは積分実行の見通しがよくないので、通常、固定した測度テンソル上での汎関数積分に書き換える. 重力理論は一般座標変換について不変でなければならないから、これはゲージを固定することにあたる.2 次元では等角写像変換についても不変であることより、次のようなコンフォーマル・ゲージが選ばれる、

$$g(x) = \hat{g}(x, \tau) e^{\phi(x)}. \tag{6}$$

通常、2 次元重力ではトポロジーとして表裏のある閉じた空間を考える. また、τ はトポロジーのモジュライである.

さて、分配関数の積分であるが, それを詳しく述べる時間がないのでその結果だけを書くと,

$$Z_{\Lambda} = \int d\tau \int [d\phi]_{\hat{g}} e^{-S_L(\phi, \hat{g})} \tag{7}$$

となる.2 次元重力は古典的にはコンフォーマル変換不変であるが、それにもにもかかわらず eq.(7) にはコンフォーマル・モードに依存する Liouville 作用

$$S_L(\phi, \hat{g}) = \frac{c-25}{48\pi} \int d^2x \sqrt{\hat{g}} (\frac{1}{2} \hat{g}^{ik} \partial_i \phi \partial_k \phi + \hat{R} \phi) \tag{8}$$

がゲージ固定の結果現れる (コンフォーマル・アノーマリー).Liouville 理論の重要さはこの積分が解析的に実行可能なことであり, その結果は Z_A を Z_{Λ} の Laplace 逆変換したものとすると

$$Z_A \stackrel{A \to \infty}{\longrightarrow} A^{\gamma - 3} e^{\Lambda_c A} \tag{9}$$

となる. このとき γ(string susceptibility) は、h を genus(ハンドル) 数とすると

$$\gamma = \frac{1-h}{12}[c - 25 - \sqrt{(25-c)(1-c)}] + 2 \tag{10}$$

で与えられるが、c が 1 と 25 の間で虚数となるのは系の不安定性と関係していると考えられている. 一般に γ が正 $(c > 1)$ のときはくびれのある面のほうが 1 つの膨らんだ面より大きいエントロピーを持つことが知られている ($c = 1$ の壁と言われている).Z_A を Laplace 変換すれば $\sim (\Lambda - \Lambda_c)^{2-\gamma}$ だからこの系の平均体積は $< A > \sim \frac{2-\gamma}{\Lambda - \Lambda_c}$、すなわち $\Lambda \to \Lambda_c$ で体積無限大の極限を得る.

2.2 格子理論 [2]

分配関数 eq.(2) を数値的に計算するために QCD にならって空間を格子化する. 具体的には 2 次元面を正 3 角形で分割する.3 角形の数とトポロジーを固定したカノニカル・シミュレーションでは Einstein-Hilbert 作用は定数となり Polyakov 作用からの寄与だけが残る:

$$S_f^{格子} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{c}\sum_{[ik]}(f_i^\alpha - f_k^\alpha)^2. \tag{11}$$

ここで和は 3 角形の辺 $[ik]$ についてとる. スカラー場 f_i^α は頂点 i 上で定義されている. 一方、格子理論における測度テンソルの積分は三角分割の仕方をすべて足し挙げることにより実行される.MC 法を用いたシミュレーションでは、測度テンソルの積分は Metropolis 法で、また物質場の積分は heat-bath 法を採用する. 可能な 3 角分割の配位を作るには、2 つの隣り合う 3 角形に共通する辺を取り除き、対角の位置にある 2 つの頂点を結ぶ辺に繋ぎかえる flip-flop 操作をランダムに選んだ辺について行う.

この他に 3 角形の数を変化させるグランドカノニカル法がとくに γ の計算に有効である. この場合はランダムに選んだ辺を取り除くことで 3 角形を 2 個減らしたり、逆に 1 つの頂点とそこから出ている 2 つの辺を選び 2 つの 3 角形を新しく作る操作を繰り返す. 特にグランドカノニカル法では、詳細つりあい条件は

$$\frac{W_\alpha}{N_\alpha}P_{\alpha\to\beta} = \frac{W_\beta}{N_\beta}P_{\beta\to\alpha} \tag{12}$$

となるため、ある配位 α から作られうる異なる配位の数 N_α を考慮して、この条件をを満たすようにする事が必要である. もし W_α や N_α が簡単に求められる場合は $P_{\alpha\to\beta}$ として

$$min\{1, \frac{N_\alpha}{N_\beta}\frac{\dot{W}_\beta}{W_\alpha}\} \tag{13}$$

ととれば良いが、今回のように N_a を求めるのが手間取るような場合は工夫する必要がある [4].

2.3 マトリックス理論 [3]

連続理論と格子理論を関係付ける理論としてマトリックス理論がある. この理論は次の分配関数で定義されている.

$$Z = \int [dM] e^{-Ntr(\frac{1}{2}M^2 - \frac{g}{3}M^3)}. \tag{14}$$

ここで M は $N \times N$ Hermite 行列であり、行列の積分は

$$[dM] = \prod_{i \geq k} \Re M_{ik} \prod_{i>k} \Im M_{ik} \tag{15}$$

で定義されている. 連続理論と格子理論との対応は Z を結合定数 g で展開してみると一目瞭然である.

$$Z = \sum_n g^n Z_n, \tag{16}$$

$$Z_n \propto < (trM^3)^n > . \tag{17}$$

ただし

$$< A(M) > \equiv \int [dM] A(M) e^{-\frac{N}{2} trM^2}. \tag{18}$$

この積分はよく知られた Gauss 積分であり

$$< M_{ik} > = 0, \tag{19}$$

$$< M_{ik} M_{jl} > = \frac{1}{N} \delta_{ij} \delta_{kl} \tag{20}$$

を使うと任意の $< A(M) >$ が計算できる. この際、各摂動項をグラフにあらわすと 2 点関数がプロパゲータ、trM^3 が 3 点バーテックスに対応した網の目グラフになっている. 実はこの網の目グラフと格子理論の 3 角分割グラフが双対関係、すなわち、3 角形 $\leftrightarrow$ バーテックス、辺 $\leftrightarrow$ プロパゲータ、頂点 $\leftrightarrow$ 網の目の対応になっていることよりマトリックス理論と格子理論の同等性が示される.

連続理論とマトリックス理論の関係は、マトリックス理論の分配関数を直接計算し Liouville 理論の結果と比較することで調べられる. この分配関数は行列 M を対角化した表示 (ただし $\lambda_i > \lambda_k (i > k)$ となるよう順序付けする) で表すと

$$Z = \int \prod_i d\lambda_i \prod_{i>k} (\lambda_i - \lambda_k) e^{-N \sum_i V(\lambda_i)}, \tag{21}$$

$$V(\lambda) = \frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{g}{3}\lambda^3. \tag{22}$$

この計算はいくつかの方法でなされているが、その結果例えば N が大きい極限では

$$Z \approx (\Lambda - \Lambda_c)^{5/2}, \tag{23}$$

$$g = e^{-\Lambda a^2} \tag{24}$$

となりちょうど Liouville 理論の $h = 0, c = 0$ の場合と一致する.

3 MC 計算とその解析

紙面の都合上ここでは結果の詳細には触れずどのような計算が行われたかを簡単に述べる.

3.1 2次元シミュレーション

String susceptibility γ [5] グランドカノニカル法で行った. トポロジーはハンドル数 $h = 0, 1, 2$ についてとり、また物質場として Ising スピンを $n(= 0, 1, 2, 3, 5)$ 個各バーテックス上に載せた. 臨界点でのクリティカル・スローダウンを回避するために Wolff クラスター法を用いた.γ を求めるには $-\Lambda N_2$ を付け加えておき適当に Λ を選ぶことにより

$$lnZ(N_2) \sim (\gamma - 3)lnN_2 + (\Lambda_c - \Lambda)N_2 \tag{25}$$

の第2項をなくす.$c = 1$ の壁の内部では理論値と計算値が高い精度で一致した.

2次元面の複素構造 [6] 長さ a 幅 b の2次元導体の電気抵抗は $R = r\frac{b}{a}$(ただし r は抵抗率) だから、これは局所スケール変換不変である. 三角分割により求めた配位の双対図 (網の目グラフ) を2次元導体面と考えて面の抵抗率を測定した. トポロジーは $h = 0, 1$ にし、物質場として Ising スピンを $n(= 0, 1, 2, 3)$ 及びスカラー場を3個までのせたシミュレーションをカノニカル法で行った. 完全な2次元面でないことより抵抗率は測る場所により分布する.$c = 1$ の壁の内側では面が大きくなるに従い分布がシャープになって行くが、壁の外では逆に広がる. これは面からブランチポリマーに移り変わっていくためと考えられている.

スケーリング則 [7] $c = 0$(純重力)、$h = 0$(球面トポロジー) では面が次のようなスケーリング側を満たすことが理論及びシミュレーションにより確かめられた. ある三角形から出発して r-ステップで飛び移れるすべての3角形を塗りつぶす. それは穴の沢山あいたぼろぎれのようなものであるが、その穴が作るループ長の分布を測定すると [8]

$$f(l, r) = \frac{1}{r^2}(x^{-5/2} + \frac{1}{2}x^{-3/2} + \frac{14}{3}x^{1/2})e^{-x}, \tag{26}$$

ただし、$x = l/r^2$、がスケーリング関数. 小さいループからの寄与 ($x^{-5/2}$ 項) は、全ループ長に対しては $r^3/l_0^{1/2}$、全ループ数に対して $r^3/l_0^{3/2}$ となっている (l_0 は積分の下限カットオフ長). したがってこの面のフラクタル次元は4であり、このループの平均長はカットオフ長に等しい. 一方、一番長いループ ($x^{1/2}$ 項) の寄与は全ループ長については r^2、全ループ数については1、すなわちこのループは最外郭の境界にあたる. また、フラクタル次元についての寄与は3となっている.2次元面では量子揺らぎが極端に大きいことが特徴である.

3.2 4次元格子重力

作用関数 4次元格子重力の Einstein-Hilbert 作用関数はトポロジーの制限から

$$S_g^{格子} = \Lambda N_4 - \kappa N_2 \tag{27}$$

と書ける. ただし N_i は i 単体の数である. 物質場としてスカラー場を考えるなら2次元のときと同じようにそれを各頂点に置けば良い. 今 N_V 個のゲージ場を考えるとするとそれは各

辺に置くことになる [9]：

$$S^{\text{格子}}_{Gauge} = \sum_{\alpha=1}^{N_V} \sum_{\{t_{ijk}\}} O(t_{ijk}) \{A^{\alpha}_{ij} + A^{\alpha}_{jk} + A^{\alpha}_{ki}\}^2. \tag{28}$$

ここで A^{α}_{ik} は辺 ik 上のゲージ場である. また $O(t_{ijk})$ は 3 角形 t_{ijk} を共有する 4 単体の数. モンテカルロ計算は 2 次元の場合と同様に測度テンソルの積分は Metropolis 法で、物質場は heat-bath 法で行う. 可能な 3 角分割を作り出すには $(p, 6-p)$ ムーブ $(p = 1, 2, ..., 5)$ と呼ばれる 5 種類の操作を行うが、これらには単体数の変化が伴うためグランドカノニカル法を採用する. 計算は作用関数に

$$S_4 = \Lambda + \frac{c}{2}(N_4 - N_4^{target})^2 \tag{29}$$

を人為的に加えることにより N_4 をある範囲に止め、κ を変化させ曲率の揺らぎなどを測定し相転移点を探す. 以下に計算結果を概略する.

String susceptibility [10] 物質場がない場合は相転移は 1 次で転移点で $\gamma > 0$ であった. しかし、ゲージ場を 1 種以上入れ有限サイズ・スケーリング測定を行うと相転移は 2 次らしく γ も負になった. このことは連続極限が存在しそこでの面が安定であることを示唆している.

Phase diagram [11] 4 次元重力のシミュレーションを複数個のゲージ場をリンクに載せて行った結果空間は 3 つの相を持つことがわかった. 弱結合領域 (κ が大) でのポリマー相と強結合領域での crumple 相は物質場を加えない時から知られていたが、ゲージ場を載せるとこの 2 つの相の間に新しい相が現れる. この相の γ は負で Hausdorff 次元は 4 ないし 5 であった. そこで我々は少し希望的観測も入れてこの相を smooth(平坦) 相と名づけた.crumple-smooth 遷移は 2 次らしく、ここに連続極限として重力場が存在する可能性が期待される.

4 今後の課題

超弦理論が最終的に量子重力を正しく記述しているとしても 4 次元重力が我々の住む時空を記述する有効理論であることは確かである. しかし、それが単純な摂動論の範囲では量子力学的に安定な空間はなく、発散を回避することが難しいとされてきた. 今回、数値的な手法を用いた研究により、ゲージ場を 1 つ以上入れると真空は安定になりユニバーサルな連続極限を持つ場の理論として存在する可能性が出てきた. これが我々の求める重力かどうかは、4 次元時空の測度を定め、質量間の力が正しく求まることを確かめる必要がある.

謝辞

この研究は平成 8 − 10 年度科研費基盤 C(2)(課題番号 08640358) の補助を中心にして推進された. この間, 津田憲次、川合光、小田五月、羽倉洋行、藤津明、江川浩、洞田慎一氏他多くの共同研究者に恵まれた. ここに感謝する.

参考文献

[1] V.G.Knizhnik,A.M.Polyakov,A.B.Zamolochikov,Mod.Phys.Lett.A3(1988)819.
F.David,Mod.Phys.Lett.A3(1988)1651.
J.Distler,H.Kawai,Nucl.Phys.B321(1989)509.

[2] V.A.Kazakov,I.K.Kostov,A.A.Migdal,Phys.Lett.B157(1985)295.
J.Ambjørn,B.Durhuus,J.Fröhlich,Nucl.Phys.B257(1985)433.
F.David,Nucl.Phys.B257(1985)543.

[3] E.Brézin,V.Kazakov,Phys.Lett.B236(1990)144.
M.Douglas,S.Shenker,Nucl.Phys.B335(1990)635.
D.J.Gross,A.A.Migdal,Phys.Rev.Lett.64(1990)717.

[4] A.Fujitsu,N.Tsuda,T.Yukawa,ComputerPhys.Comm.87(1995)372.

[5] S.Oda,N.Tsuda,T.Yukawa,Prog.Theor.Phys.99(1998)875.

[6] H.Kawai,N.Tsuda,T.Yukawa,Phys.Lett.B351(1995)162.

[7] N.Tsuda,T.Yukawa,Phys.Lett.B305(1993)223.

[8] H.Kawai,N.Kawamoto,T.Mogami,Y.Watabiki,Phys.Lett.B306(1993)19.

[9] S.Bilke,Z.Burda,A.Kryzwicki,B.Petersson,J.Tabaczek,G.Thorleifsson,
Phys.Lett.B418(1998)226.

[10] H.S.Egawa,S.Horata,N.Tsuda,T.Yukawa,Nucl.Phys.B(Proc.Suppl.)73(1999)795.

[11] H.S.Egawa,S.Horata,N.Tsuda,T.Yukawa,Nucl.Phys.B(Proc.Suppl.)83-84(2000)751.