

多重定常状態の履歴依存性

石原秀至*

東京大学大学院 総合文化研究科

目次

1	序論	154
1.1	履歴問題・力学系としての設定 (広い意味での問題意識)	154
1.2	物理系の例	155
1.2.1	粉体系	155
1.2.2	摩擦の現象論からの例/考察	157
1.2.3	その他	159
2	モデルの構成と流れのシステム	159
2.1	流れ描像	159
2.2	設定とモデル	160
2.2.1	モデルの導入	160
2.2.2	マップの性質	161
2.3	OPEN FLOW 的な描像	162
2.3.1	open flow system	162
3	現象	163
3.1	「砂山」の例、積むことの順番を変えることによる履歴依存性	164
3.2	操作時間を変えることに対する履歴依存性	165
4	力学系としての性質	167
4.1	初期値依存性:多重固定点を持つこと	168
4.2	振るまいの概説/3つの相	171
4.3	Dynamics との関係	174
4.4	分布関数/実験との比較	176
4.5	$N=2$ での振るまい	176
4.6	定常状態の安定性解析	179
4.7	安定性解析	180
4.7.1	用意	180
4.7.2	時間発展に対する安定性・線形解析	181

*E-mail:shuji@complex.c.u-tokyo.ac.jp

4.7.3	空間マップとその安定性	182
4.7.4	数値的に解いた結果	183
5	議論・問題・まとめ・展望	185
5.1	履歴性を示すメカニズム/必要条件について考察	185
5.2	力学系としての性質	187
5.3	粉体系として	188
5.4	展望/更に抽象的な「履歴依存」のシステム	190

1 序論

1.1 履歴問題・力学系としての設定 (広い意味での問題意識)

あるシステムの現在の状態がシステムの辿った履歴 (History) によって決まっている、ということはよく観察されてることである。社会や経済、「世の中の流れ」、人間、学習、生物/生態系の進化、地球レベルでのダイナミクス、そのような系では、実際今実現されている状態を考えると、あるべくしてそうなった必然の部分と単なる偶然と見なせる部分が混在しているように見える。そしてそれらは、(必然的に起こった方が偶然に起こった方に比べより重要であるということではなくて、) どちらもそれらの系が「今現在そういう状態である」である理由の本質的な部分を成しているように見える。歴史性がどうしてもなく効いてくる、歴史を見ることでしか決定できない、ことすらあるように思える。

しかし一方、履歴・歴史性を引きずると言っても、起こったこと全てが有効に実現されることに響いてくる、つまり過去におこったイベントの一つ一つの詳細を考慮に入れる必要はなさそうでもある。重要なことと重要でないこと、全体の「雰囲気」、時代性、統計的に語りえること。つまり、系の自由度より遥かに少ない変数での巨視的な記述が可能であることが期待できる。

しかしながらこのような歴史性を持った系の記述は従来熱力学・統計力学ではあまり扱われなかったものである。タイムスケールの切り離しとともにこれらの履歴性は消去され、逆に、当然のことながら、消去されうる系が熱力学的な記述を可能にした。

履歴問題に対しては次のように幾つかの段階が考えうる。

- どのような系が履歴依存性を示すのだろうか。
- 系が履歴依存の時、その履歴はどのようにコードされるだろうか。
- コードのされ方は何かしら構造を持つだろうか。言い替えれば、巨視的な少数の量で意味のある(履歴と対応する)記述ができるだろうか? 逆に、系に対する統計的な操作の違いで、系は有意な違いをもった出力を出すだろうか。
- それらは外から情報として取り出せるだろうか。即ち観測手段があるだろうか。

これらの問題について、より具体的な系について次の節で review を兼ねながら論じることにする。そのあとで、粉体に基づいたモデルを構築し、そのモデルで見られる幾つかの現象を紹介する。力学系的な解析を通してどうして履歴性が見えるか、力学系の性質から議論する。そこで見られる性質に基づいて、系の記述に有効な巨視的変数の有効性について調べる。

1.2 物理系の例

ここで現実の物理系でそのような履歴が重要な役割を果たすような系をいくつか挙げて見る。このような系をとおして、どのようなメカニズムで履歴が表れるか、を考察していくことが大事であると思われる。

1.2.1 粉体系

一つの例は粉体である [1] [2] [3] [31]。

静止した粉体内部での応力分布に関しては近年様々な興味を持たれている。これは本論文のモデルを与える上でアナロジーとした系でもある。静粉体について review した後、その履歴依存性を示す実験結果を示す。

砂山やサイロの中の静粉体の内部応力は、その分布が inhomogenous であることが知られている。静粉体内部においては粒子がそれぞれお互を支えるわけであるが、その「支え方」は均一ではなく、一般にその応力分布が(平均より大きいところでは)指数的に分布している。このことはカーボン用紙を用いた実験(力が加わる程カーボン用紙につく跡が大きいことを利用して計測)でも確かめられており [6] [7]、2次元の数値実験でもそのような結果が得られている [8]。[7](a)によればその応力 f の分布の関数形は $P(f) = c_1(1 - c_2e^{-f^2})e^{-\beta f}$, $c_1 = 3$, $c_2 = 0.75$, $\beta = 1.5$ でよく fitting 出来る。この $f > 1$ での指数的減衰自体は粉体内のパッキングには無関係なようであり、例えば [7](b) では最密充填という秩序だった配置での圧力分布を計測しているが、こちらも指数的減衰を示す。

これは静止粉体内部において、アーチが形成されストレスチェーン(stress chain)と言われる比較的少数の力を支える(応力が高い)部分ができ、主にこの部分が自重を含め砂山にかかる力を支えることによる。そのため、例えばサイロの中の粉体の圧力は、液体が満たされている場合と異なり、深さに比例するということがない。実際その圧力はある大きさ以上にならず、収束する。その際周囲の壁が粉体の重さを支える。周りに壁がない砂山の場合は、直観的にはその中心部(高さが最もあるところ)で最も高い圧力を示すかのように考えられるが、そうではない。中心部ではディップ(dip)と呼ばれる圧力のくぼみができ、中心部から少し離れたところに円環状に最も圧力が高いところが分布する。

応力分布の指数的減衰は q-model という簡単なモデルで再現できる [9]。このモデルは、格子状に配置したサイト(粉体の粒)に対して、静止状態では平衡(釣合い)の位置は D 層がその上の $D-1$ 層を支えることから、 $D-1$ 層の粒子 i にかかる負荷 $\omega(D, i)$ にその粒子自身の重さを加えたものを D 層の隣接する粒子に確率的に割り振るということを行う。

$$\omega(D, i) = 1 + \sum_j q_{ij}(D-1)\omega(D-1, j) \quad (1)$$

ただし q_{ij} は確率変数で、 $\sum_i q_{ij} = 1$ を常に満たす。(釣合の条件)このような簡単なモデルで $P(f)$ の指数的減衰が説明できるのである。

次に連続体として取り扱ったものを見てみる。連続体として取扱うには、応力テンソルを歪テンソルの関数として与えなければならない(構成方程式) [44]。通常、弾性体近似(応力テンソルを歪テンソルの1次で展開)を用いて取扱うことが多いが、粉体の場合はそのような関係式は成り立たない。そこで構成方程式を与えてやる必要がある。このようなもので提案されているもの

を幾つか分類する。

- 粉体が至る所で限界応力状態であるという仮定。つまり、僅かな力を加えるだけで粉体が崩壊してしまうという状態(限界応力状態)である。この仮定をもとにサイロや砂山についてその内部状態を決定しようと試みられた。この仮定の正当性については、例えば [17] では数値計算によって、粒径バラツキのある摩擦無し2次元粒子(ディスク)が詰まった長方形に対して一方向に圧力をかけていった時、歪がどうなるかを計算している。このような歪変化は弾性体と異なり、圧縮を受ける時に粉体粒子が再配置することによって起こり、圧力変化に対して不連続となる。そしてこのような歪変化は熱力学的極限を取っても deterministic とはならず、僅かな圧力変化に対しても非連続な歪変化が起こり (fragile)、その大きさは Lévy 分布を持った確率過程になることが得られている。

Janssen はこの仮定を用いサイロ内での粉体圧力分布を説明した。しかしながらこのような仮定では砂山中のディップを説明することが出来なかった。 [10]

これに対して、Edwards は砂の重みが床と角度 τ をなす円錐アーチによって与えられるというモデルを出した。この時、 τ はパラメータとして与えられ、決定することはできない。またこの時中央部での圧力の値が0になってしまうが実際はそのようなことはない、など不満足なものであった。 [11]

Whittmer らは応力テンソルの主軸が砂山の中心軸に対して常に一定角度傾いていると仮定した (Fixed Principal Axis, FPA)。このモデルでは、その角度 τ は砂山の臨界角で決定しているが、内部でそのような状態になっている理由づけとして砂山の形過程を根拠に挙げた。即ち、形成の仕方が最終状況に効いてくるのである。このモデルによって砂山のディップが説明できた。さらにこの拡張として、Oriented Stress Lineality(OSL) モデルを提案した。この仮定は hyperbolic な偏微分方程式を導く。 [12] [13]

- 主に工学の方では elasto-plastic theory が用いられて来た。これはある閾値 (最大摩擦係数で決まる) 以下では弾性理論 (elasticity を仮定) を用い、閾値を越えると値は一定になる (plasticity) Coulomb-Mohr の条件。これらの仮定は elasticity 領域では elliptic な、plasticity 領域では hyperbolic な偏微分方程式を導く。この条件は砂山の中心部のディップを説明する。
- 構成方程式と言うわけではないのだが、q-model の連続極限では拡散方程式 (parabolic な偏微分方程式) が得られる。これは要するに下層へのランダムウォークである。 [13]

このようにそれぞれの過程からは偏微分方程式の型として elliptic・parabolic・hyperbolic (+ noise 項、往々にして 'noise' 項が伴う) が導かれ、三者三様と言える。これに対して最近幾つかの実験が行われた。

[14] ではほぼ cube 型のブロックを積み重ね、最上層の一点に荷重を加える。その荷重の伝わり方を見るため、各層間の接触点を何サンプルにもわたってとりそれを重ねている。その結果は parabolic な範囲に収まるものであり、これは q-model 型の拡散方程式的 (parabolic) な内部応力状態を示唆する。

一方 [15] では、3次元的にランダムパッキングした粉体にたいして、同じように一点に荷重を与え、その荷重の下層への影響を見ている。その結果、下層での変化のピークは荷重を与えた点の下に来ており、さらにそのピークの幅は層の深さとともに比例した。これは、系が elastic に (つまり elliptic に) 振る舞うことを示唆する結果である。

[16]でも上と同様に頂点に荷重を与えその変化を調べている。この実験では粉体粒子として同じ大きさの球、楕円、五角形で調べており、これは詰めた時の並び方の秩序の度合に影響する。この実験では最も秩序だった状態である球粒子の実験で、OSLモデルタイプ(OSLにノイズを加えたもの)の振る舞いが見られる。ところが、五角形の粒を用いた実験では系がelasticに振る舞うことを示唆しており、系の振る舞いにパッキングのランダムさが関係することを示唆している。

このように、実験結果からみてもこれが決め手というものは無いようである。そもそも構成方程式を仮定した連続描象がどれほど有効な記述が出来るか、ミクロに見た内部圧力の非一様性とどのように関わるのか、はっきりしていない。

結局の所、静粉体内部の応力分布については理解出来ているとは言いがたい。また、これらの実験については、基本的に静止状態だけを見て、その作り方を考慮に入れていないものであった。

[4]の実験では、砂山を積むのに、2種類の積み方を行い、底部の圧力(床が受ける圧力)を比較している。一つは、砂の供給源を一点として積んでいくやり方であり(localized-source procedure)、もう一つは、砂の供給源を広くとっていきやり方(raining procedure)である。このような作り方をした出来た砂山の底の圧力分布を測ると localized-source procedure で作った砂山では(従来言われていたとおり)中心部に dip があつたが、raining procedure では dip は見られないのである。使われている粉体は同じであるから、この違いは積み方によって出来たのである。ここで、マクロな操作(ここでは砂の供給の幅の広さでパラメトライズ)でマクロな変化が得られた、ということが大事である。また、クサビ型砂山でも同様な結果が得られており、2次元のモデル化で十分であろう。

この例はどう解釈したら良いだろうか?砂山に対してどのような量を測れば辿って来た path(積み方が)わかるのであろうか。あるいは何に履歴がコードされるのであろうか。そのコードのされ方は、巨視的な構造を持ちうるのであろうか。巨視的であれば、実験的に取り出せる量なのであろうか。(この問いは単に粉体系を越えた普遍的な問いであろう。)

本論文ではこの砂山の例を元にモデルを作り、本当に砂山が履歴依存性を示すのか、そのためにはどういう条件があればよいのか、何を測れば見えてくるだろうかを模索する。

1.2.2 摩擦の現象論からの例/考察

摩擦という現象は、非常に身近なものであるが、どうして起こるのか、摩擦とは何なのかという理解は十分ではない。[23][24][25][26][27][28]この節では、摩擦現象論を紹介することで、ここで「縮約された現象論(の記述)」の例とする。一般によく知られている現象的法則としてはCoulomb-Amonton法則がある。これは次のようなものである。

- 摩擦力は垂直効力にのみ比例して、その接触面積には依存しない $F_{fric} = \mu N$
- 動摩擦力は速度に依存しない $\mu_d = const$
- 最大静止摩擦力は動摩擦より大きい $\mu_s > \mu_d$

しかしながらこのCoulomb-Amonton則について、特に「動摩擦力は速度に依存しない」については疑わしことが様々な実験によって確かめられている。

摩擦と一口に言っても、その考えられるスケールや状況は様々で、日常レベルでの固体の接触だけでなく、小さな機械内部で使われるような、潤滑剤を伴ったものから、地震発生の原因と考

えられるプレート間の接触面での、摩擦により出来る岩石の固まり (gauge) を境界面に伴ったものまで、非常に多種多様な状況が考えられる。そして、それらのスケールを越えて、共通性のある普遍的な現象、stick-slip や aging と呼ばれた現象が見られるのである。

stick-slip とは、固い引き戸などを無理に開けようとする時におこる、振動のことである。このとき引き戸は動いては止まり、動いては止まるを繰り返す。(この現象がプレート間で起こったものが地震である。) この現象は様々な状況下での摩擦で、相対速度が小さいところで起こることが知られており、また、高速領域での、一様に滑る steady-sliding から、stick-slip への変化(転移)は Hopf 分岐で起こることなど、そのメカニズムにも共通点が多い。系の詳細を見ずにある程度普遍的な摩擦法則が書けることが期待できる。

また aging とは、接触時間とともに摩擦力が変化すると現象であり、これもまた様々な状況で確認されている。例えば固体固体間の摩擦では、岩石間の摩擦 [29] や紙と紙の摩擦の実験 [30]などで最大静止摩擦の変化が接触時間に対して対数的、 $\log(t)$ という時間スケールで大きくなっていることが知られ、このことは砂体を間に挟んだ実験でも得られているようである [31]。さらにこの時間変化は動摩擦とも関係づけられ、steady-sliding の滑べりに対して

$$\mu_d(V) = \mu_s(D_0/V) = a + b \log(1 + t)$$

という関係がある。(Coulomb-Amontion 則と異なり、動摩擦と静止摩擦の間に関係があることに注意。) ここで D_0 は一般的なスケールでは非常に小さく、 μm 程度で摩擦の相関距離である。stick-slip 領域では、一般に (steady-sliding との転移域からも離れているとして) その運動は周期的である (例えば [31])。この運動では Coulomb-Amontion 則と違って摩擦係数 μ は速度に依存するが、一価の関数ではない。周期的運動に対して $v - \mu$ 空間を周回軌道を描いて一方向に回る、つまり速度の 2 価関数なのである。ただし v が十分に小さい領域 (stick 領域では完全に止まっているわけではなく、ごく小さい速度を持って運動している) ではもっと noisy であると考えられる。そしてこの時の最大静止摩擦力であるが、上に述べたように stick 時間 τ_{stick} の対数のスケールで変化するのである。即ち最大静止摩擦力は履歴による。(そのほかの軌道はさほど変化はない)

主にこの二つの現象、stick-slip と aging は別々の現象であろうか? 摩擦を示すそれぞれの系に対して現象論的な式が提案されている。例えば [32] [30] [33] では aging を表す変数 ϕ を使い(その物理的意味は問わない) 両者を結びつけている。一方 [36], [35] では粉体層の摩擦に対してその“流動度” θ を変数として摩擦則を提案している。また、このような流れとして [34] のものもある。どの系に対しても「履歴」をあらわすパラメタ(導入された新しい変数)はひとつしかない。

$$\dot{v} = F^{ext} - \mu N \quad (2)$$

$$\mu = f(v, \theta) \quad (3)$$

$$\dot{\theta} = g(v, \theta) \quad (4)$$

ここで注目すべきは、変数が一つだけで摩擦則をかなりよく近似できることである。それぞれの系に対してこの θ というものがどういう意味を持つては正確に明らかでないが少なくとも履歴の効果として一変数に取り込めたことになる。

砂山と摩擦の例は、粉体の理解が摩擦なしでは考えられないし、また逆に [31] では粉体としての性質が摩擦則を再現させるので密接な関係があると期待できる。

1.2.3 その他

その他にも履歴依存する物理系は沢山ある。例えばガラス転移では冷却速度によって異なった状態へとなる。ガラス化したその状態が冷却速度で決定されるのである。

タンパク質のおりたたみについても、「折り畳みの順番」が重要な役割を果たし、そのようなことが、非常に noisy だと考えられる実際の細胞内ではどう起こるか、興味深い。(これは履歴性をパラメタに埋め込んでしまった系だと言えるだろうか?)

このように、履歴性を示す系は沢山あり、現在多くの興味を持たれている系でもある。

2 モデルの構成と流れのシステム

2.1 流れ描像

一般に連続体の力学では、「運動量の流れに対する保存」という考え方が有効である [22]。普通の意味での (Newton) Lagrange 描像的な力学を Euler 的に見た時、場の変数として運動量 $\rho \vec{v}(\vec{r}, t)$ を考え、その保存則、

$$\partial_t \rho v_i + \partial_k j_{i,k} = s_i \quad (5)$$

となる。 $j_{i,k}$ は「運動量に対しての流れ」と言うべきものであり、 s_i は運動量を与えるような「湧き出し」である。(湧き出しがあるので正確に「保存則」と言うものではないが、同じ次元を持った(素性の知れてる)量に対して方程式が上の形で閉じている、という意味で使っている。)

場所 \vec{x} での流入してくる運動量は、応力場の勾配によるもの、実際粒子が動くことによるものの2種類であり、「湧き出し」は外力によって得る運動量である。

$$\partial_t \rho v_i = \rho K_i + \partial_k p_{ik} - \partial_k (\rho v_i v_k) \quad (6)$$

となる。 ρ は密度、 \vec{v} は速度、 K_i は外力、 p_{ik} は応力である。ここで運動量 ρv_i に対してその運動量の流れ $j_{i,k}$ の負符号をとったものが応力となっている。第一項が「湧き出し」に対応する外力である。第三項は質量が実際動くことにより失われる運動量である。(場の変数としての運動量の増減はこれで閉じている。)

(6) 式と質量保存則 $\partial_t \rho + \text{div} \rho \vec{v} = 0$ から流れにそつての Newton 方程式

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \rho K_i + \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k} \quad (7)$$

が導かれる。これはこの描象と Newton 力学の等価性を言っている(勿論「流れ描象」は広義の意味で Newton 力学そのものである)。

流体と違って質量の流れのないものでは(6)式の左辺第三項は0となる。(したがってこの「運動量の流れ」描像において定常状態が静止状態にあたる。)

$$\rho K_i = -\partial_k p_{ik} \quad (8)$$

これは単に外力と応力がつりあう、つまり静止粉体の場合について言えば、「下のものが上のものを支えている」ことを言っている。

流れ描象を持つことの利点はダイナミクス (時間発展) 部分にあり、以下に述べるように open flow 系の話と結びつけることができる。

2.2 設定とモデル

2.2.1 モデルの導入

前節で述べたように、「流れ」と言うものを意識し、本論文で扱うモデルを組み立てることにする。

履歴依存を示す現象の特徴を抽出するものとして、以下のような (局所的な) 仮定をおいた力学系を取扱う。¹

仮定：一度出来てしまった流れの通り道が、より多くの流れを通す

この仮定は、素材には、例えばガラスの上を伝わる水などについてあてはまるだろう。粉体について説明とイメージを与える。

静粉体中での「流れ」として、前述のように運動量の保存方程式を参考に、ここでは、各々の砂から“湧き出た”重力 mg が通る道筋をイメージする。この場合、上のような仮定は直観的にはイメージしにくいだが、一般にアーチ構造は壊れにくいと考えられている。(石材が多いヨーロッパで、アーチが建築の基本構造になった理由である [42]²)、アーチの上に来た荷重はこのアーチを伝わって分散されると考えられる。そのようなアーチ形成のメカニズムは興味深いものであるが、ここではその機構は問わない。ミクロ、粉体の一粒一粒自体にこのような性質はなくとも、ある時間・空間スケールで意味のある統計量のダイナミクスとしてこのような (定性的) 性質があればよいと期待できる。そういう意味でこれから扱うモデルは、必ずしも粉体内の一つ一つの粒を焦点にあてたものでない。したがって、本論文の目的は、例えば、静粉体での指数関数で落ちる圧力分布を出すものでもない。(圧力分布自体が履歴に依存することはあり得るだろうか？実験結果を見る限りではこの分布はロバストであるという印象を受けるが。)

勿論、静粉体の中のアーチ構造は、過大な流量/荷重に対して、既存の道筋が壊れ新たな道筋を選ぶこともありうるし、また、局所的なランダム (noisy) な働きのため、流れの道筋が平均化される性質もあるだろう。形成されるアーチのスケールなども無視している [18] [19]。しかしながら、手始めとして、そのような過程を省略したモデルを調べることにする。即ち、履歴依存を示す「骨組み」として、「一度できた道筋を通り易い」というルールが効いていることを期待するのである。

力学の流れ的描像では場の変数として流れるものは運動量ベクトル $\vec{p}(\vec{x}, t)$ である。このように一般には多数の場の成分を手掛けるべきではあるが、(例えば、実際の静粉体中のアーチ構造は、特にサイロのような周りの壁が (水平方向に力を与えることによって) 大事な働きをしているもの

¹ 粉体に関しては標準的に使われている MD シミュレーション法として離散要素法 (Distinct Elements Method, 以下 DEM) と言うものがある。粉体間に「期待される」(厳密には?マークがつく仮定もある) 幾つかの相互作用を考慮に入れたものであり、実際の現象もよく再現する。しかしながら、このようなシミュレーションで再現された現象については、一体何が本質的かは自明でないことが多い。実際何が起きているかを見れるというコンピューターを用いた利点があり、それは強力ではあるが。ここでの立場は「履歴依存」ということに本質的だと期待できるような仮定をおいて、その上で何が起きているかを見るというものである。

² 石材は圧縮に対して強く、逆に木材は引っ張りに対して強い。この材料の性質の違いが (ヨーロッパと日本の) 建築法の違いに表れた。

は、垂直方向と水平方向の力の組合せによってその空間的広がりなどが決められているのだと考えられる。)以下のモデルでは場の変数として、1つの量のみ(q-modelのようにスカラーだけ)をとることにする。

以上のことを踏まえて、次の様なモデルを構成する。

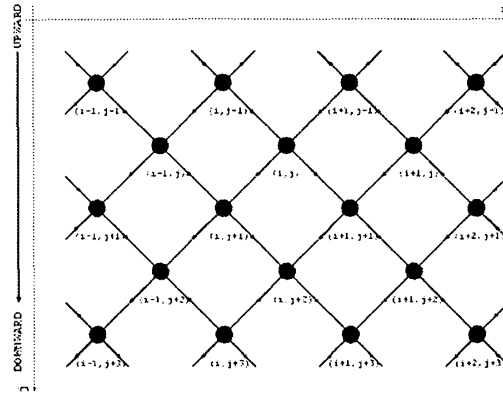


図 1: 格子

図(1)の様な三角格子を用意する。力学的抽象化としては、格子の下流への連結数は一般に2でなくとも良いと思われるが、(さらにもっと複雑なネットワークを考え得るが)とりあえず2とする。この格子の上方に向かって上流、下方に向かって下流とすることにする。仮定を満たすよう、次のようなステップを繰り返す。図(2)を参照のこと。

1st 上流の格子点の値 $x_{i,j}$ を、仮定を満たす様に下方の格子に振り分ける。具体的には、下方の点を $x_{l,j+1}, x_{r,j+1}$ とすると、その量のベキ乗によって比を振ることにする。

2nd 各格子点に「湧き出し」 β を与える。

すなわち、

$$x_{i,j}^{t+1} = \beta + x_{l,j-1}^t \frac{(x_{i,j}^t)^\alpha}{(x_{i,j}^t)^\alpha + (x_{i-1,j}^t)^\alpha} + x_{r,j-1}^t \frac{(x_{i,j}^t)^\alpha}{(x_{i,j}^t)^\alpha + (x_{i+1,j}^t)^\alpha} \quad (9)$$

このような Coupled Map Lattice(CML)によるダイナミクスを考える。 $x_{i,j}$ については任意のスケールがとれるので、以後 $\beta = 1.0$ とする。「砂山」を念頭においてはいるが、あくまでも力学的抽象モデルとして扱えないか、を議論する。

2.2.2 マップの性質

幾つか(9)式で与えられる系の性質を挙げておく。

- upper boundary で(初期条件を与えた時以外) $x_{i,0} = \beta$ である。
- 流体的描像で述べた保存量に対応して、

$$\sum_{i=0}^{N-1} x_{i,j}^{t+1} = N\beta + \sum_{i=0}^{N-1} x_{i,j-1}^t \quad (10)$$

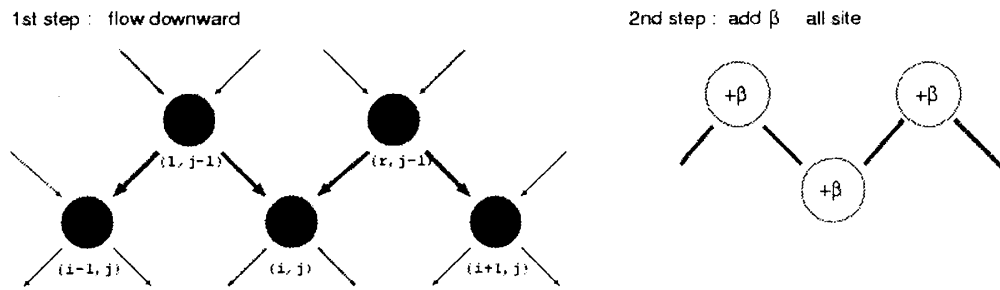


図 2: マップの手続き

特に固定点へと落ちた時は

$$\sum_i x_{i,j} = N(j+1) \quad \text{即ち} \quad \langle x_{i,j} \rangle_i = j+1 \quad (11)$$

となる。

・一様な解 $x_{i,j} = j+1$ は (9) 式で $x_{i,j}^{t+1} = x_{i,j}^t$ とおいたものを満たす。即ち $x_{i,j} = j+1$ は固定点である。

2.3 OPEN FLOW 的な描像

2.3.1 open flow system

ここで立てたモデルは、流れの下流から上流への寄与は無視している。一般にこのような系は open flow system として様々な研究がなされている [37] [38] [40]。その概念は図 (3) のようなものであり、上流のダイナミクスが下流のダイナミクスに影響を及ぼす。これは例えば流れのある閉水路中のダイナミクスや、もっと抽象的に次々と起こる何らかのイベントをモデル化したものである。簡単のため Coupled Map Lattice を例にとる。 [37] [38]

$$\vec{x}_i^{t+1} = \epsilon \vec{f}(\vec{x}_i^t) + (1 - \epsilon) \vec{f}(\vec{x}_{i-1}^t) \quad (12)$$

ここで t は時間、 i は空間の index。

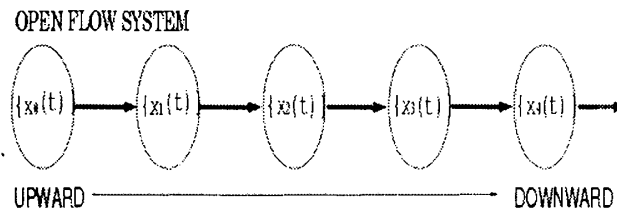


図 3: open flow system の概念図

open flow system において重要な概念として移流不安定性 (convective instability, CU) がある。これは普通の意味での時間ダイナミクスの線形安定性とは異なる概念であり、以下に説明をする。

このような系において、ある要素に摂動を加えた時、時間的にはその摂動の効果は減衰していても、空間的に、つまり下流へと向けてその摂動の効果が大きくなりうる。その空間方向の摂動の成長が各要素の緩和のタイムスケールより十分大きければ、加えた摂動は下流において大きな不安定性を引き起こす。このような状態を「移流不安定 (convectively unstable)」と言うのである。この際各要素のダイナミクスはあくまでも線形安定である。このような不安定性は co-moving Lyapunov 指数 λ_v で測ることができる [37]。co-moving Lyapunov 指数は速度 v の慣性系で測った Lyapunov 指数である。即ち速度 v 慣性系でみた Jacobian Matrix

$$J = \frac{\partial \vec{x}^{t+1}(i_1 + [v(t+1)])}{\partial \vec{x}^t(i_1 + [vt])} \quad (13)$$

を用いて Lyapunov 指数を測定し、この最大値がある速度領域で正ならば、系は移流不安定となる。

実際には本論文では co-moving Lyapunov exponent は計測しない。本論文で行ったことは次のようなことである。[38]によれば、系の移流不安定性は、空間マップ³の安定性と関係がある。ここで空間マップとは、系が時間的に周期 k であると仮定すると、時間の index t は落とせ、空間の index i に対して得られるマップである。即ち、

$$\vec{x}_i^{t+k} = F^k(\vec{x}_{i-k}^t, \vec{x}_{i-k+1}^t, \dots, \vec{x}_i^t) \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \vec{x}_i &= F^k(\vec{x}_{i-k}, \vec{x}_{i-k+1}, \dots, \vec{x}_i) \\ &(\text{index } t \text{ を落とす。 } \vec{x}^{t+k} = \vec{x}^t) \end{aligned} \quad (15)$$

F は one step の時間発展を表す。この様にして得られるマップは \vec{x}_i の陰的なマップであり、 \vec{x}_i について解が 1 つ以上あるりうる。

このような空間マップの性質は、時間ダイナミクスの性質にも関係していると考えられる。[38]では空間マップがカオス (positive Lyapunov exponent) であれば、convectively unstable であるという conjecture が出された。

空間マップの Lyapunov 指数 λ_{sp} は、次のようなことを意味する。ふつうの線形解析では微小な摂動を与えた時「時間的に」安定かどうかを見るものであり、その摂動はある時刻一回のパルスで良い。一方 λ_{sp} の意味は、摂動は空間の boundary $\vec{x}^t(0)$ (空間マップの初期条件) を変化させる (時間的には変化させない) そのときの空間的な (時間ダイナミクスの) 固定点の安定性を表すものである。

3 現象

この章では前に導入したモデルがどのような現象を示すか幾つかのモデルでみる。「履歴依存性」というものを見るため、1. 「砂山の積み方」2. 操作時間の変化を変えることによって系が異なる状態になるということを示す。

³open flow system ではないが、[41]では Frenkel-Kontrova モデルの ground-state について空間マップを考察している。このマップは良く知られた standard-map となり、空間マップがカオスを示す軌道は ground-state 或は meta-stable ではない。測度が小さい (準) 周期解が選ばれるのである。これらの性質も時間ダイナミクスと空間マップの関係を考える上では面白い例である。ちなみに Frenkel-Kontrova 系は摩擦のミクロレベルのモデルとしても使われる。

3.1 「砂山」の例、、、積むことの順番を変えることによる履歴依存性

粉体系とのアナロジーとして、「砂山を積む」ことを試みる。ここで積むと言うのはこういうことである。積まれてない状態格子に対しては β (湧き出し)をゼロとし、積んだ状態は β がある正の値を取ることである。この β_{ij} が格子 (i, j) に積まれた粉体粒子の「重さ」になるわけだが、本論文を通してこの値は一定($\beta_{ij} = 1.0$)である。

砂山は以下のようにして作る。

- 1st 初期状態では $x_{i,j}$ はゼロである。 β もゼロである。(実際には最下層だけ β に値を与えている状態から。)
- 2nd 各格子点について、下から順番に β に値(1.0)を与える。この時、「下から積む」とは次のことを意味する。ある格子点に対して β を与えようとする時、その格子点が隣接する下の層の格子点については既に β が割り振られていなければならない、という条件を付与するのである。もしこの条件が満たされていなければこの条件が満たされるまで「転がり落ちて」下方の格子点へと移動する。
- 3rd β を与える際衝突による運動量を考慮してこの瞬間だけ $x_{i,j}$ に対して値をさらに加える。ただし、この条件は以下に示す結果にはあまり影響がないようだった。(加える値の大きさを変えても結果については定性的には変わらなかった。)以下ではこのことについては考慮しない。

以上を one step 毎に繰り返した。 $\alpha = 1.3$ で行った。ここで行ったことは [4] を模して'積み方'を変えた。各 step 毎に横方向 i 番目の格子点に β が与えられる確率が標準偏差 $W \times N/2$ のガウス分布に従うように積んでいく。(Nは横方向のシステムサイズ)この際最終形の山の形は同じになるように決めておく。(決められた格子点以外については β に値が入れられるのを禁止する。これは純粋に「履歴の効果」を比較するために科した条件である。)Wが小さいところ($W \sim 0.1$)では山は相似形を保ったまま成長し、大きい所($W \sim 10.0$)では上の部分を平らにしたまま大きくさせることに対応する。

結果を図(4)に示す。(a)が $W=0.1$ (b)が $W=10.0$ の結果である。見て分かるように(a)では $x_{i,j}$ の通る道筋が斜めに形成され、結果として底面では中心部では圧力が小さいdipが形成される。また、その道筋は上部ではほぼ垂直であり、下部になるほど傾きが大きくなる。一方(b)では底面部分でdipを作らず、ランダムな分布をなす。図には示さないが、その分散はdip部分で大きい。

図5(a)では底面の圧力分布をplotしたものを示す。この図は $N=128$ のシステムに対し、 $W=0.1$ と $W=10.0$ で100sampleとってそれを平均したものである。たしかに $W=0.1$ ではdipが見られる。

また、システムサイズに関する依存性を調べた。 $N=128$ の山と $N=256$ の山を調べ、それぞれ100sampleとりその平均で比較する。 $N=256$ のシステムについてシステムサイズと $x_{i,j}$ を半分にしたものを表示した。その結果図5(b)のようにほぼ一致した。したがってシステムサイズに関しては適当にスケーリング出来ることを示してる。これは実験結果 [4] と一致するものである。

α のもう少し小さいところ($\alpha \leq 1.0$)で行ったものは、上のような履歴依存の性質を示さなかった。また、積み方を変えても有意な差は見られなかった。(このような領域は次の章のII相にあたる。)

参考のために、latticeの形を変えたもので行った結果を図6に示す。これは四角格子、下層への結合が3つの場合である。下層への異方性は考えず、 $\alpha = 1.4$ で行った。

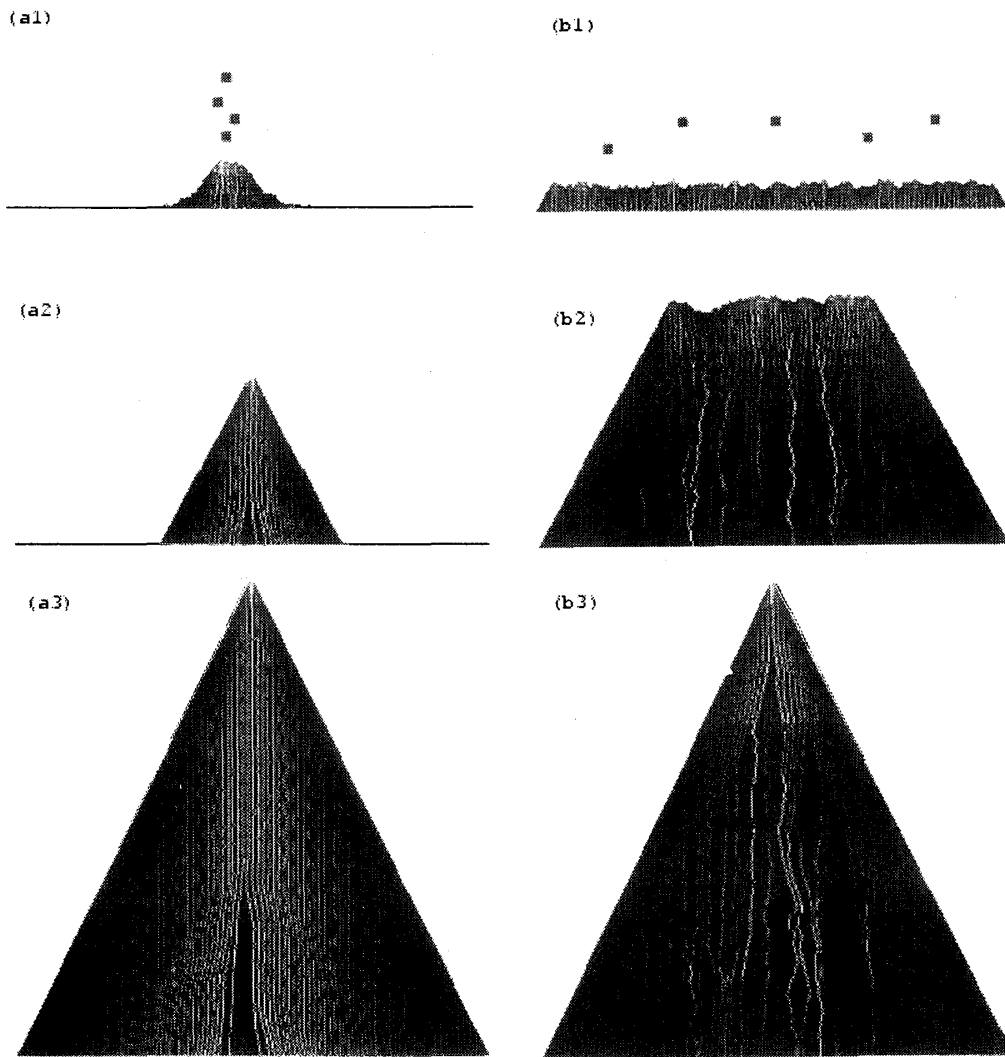


図 4: $\alpha=1.3$ $N=256$ 白い所が $x_{i,j}$ が大きい所。各層について、もっとも大きい値でスケールした。(a) $W=0.1$ 相似形を保ったまま積んでいく (b) $W=10.0$ 高さを一定にして積んでいく

3.2 操作時間を変えることに対する履歴依存性

再び「積む」ということを行うが、今度は山の形にこだわらない。砂山の場合は積み方の時間スケールは考慮しなかった。(one step ごとに置いていった。)ここでは横の条件を周期条件にした $N = 32$ のシステムを用意し、それを下の層から順に積んでいく。この積み方であるが、 τ step 毎に周期的に最下段から 1 層ずつ β を与える。この際、積んだ層に対して fluctuation を加える。(fluctuation は 0 から 0.5 の一様乱数から選んだ。)最上層まで積んで、固定点に落ちるまでマップを繰り返す。(図 7) 固定点まで落ちたあと、 $j=100$ 層に関して、 $RMS_j = \sqrt{VAR_j}$ を計測した。値は 500sample とりその平均をとった。

この結果を図 8 に示す。ここで、 $\log(\tau)$ に対して $RMS_{j=100}$ を plot した。すると $\tau \sim 500$ までは落ちている。ここで、分散が大きい、もともと終状態は RMS_j が様々な値を取りうる、平均値が落ちている(傾向がある)ことが重要であると考えられる。ここで落ちているのは、「はやく積む程乱れた状態になる」ことを表す。 $(\tau$ が 500 より大きいと、このような傾向はなくなっ

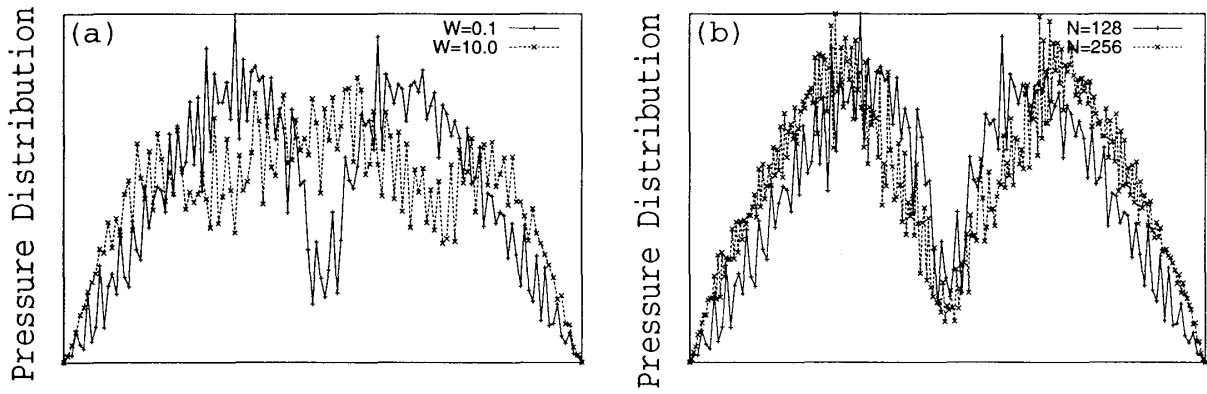


図 5: $\alpha=1.3$ での底圧の distribution. 100sample についての平均 (a) $N=128$ の系で積む際に $W=0.1$ と $W=10.0$ にしたもの. $W=0.1$ では dip が見られる. (b) システムサイズが $N=128$ $N=256$ とのものについてスケールの無次元化をして plot した.

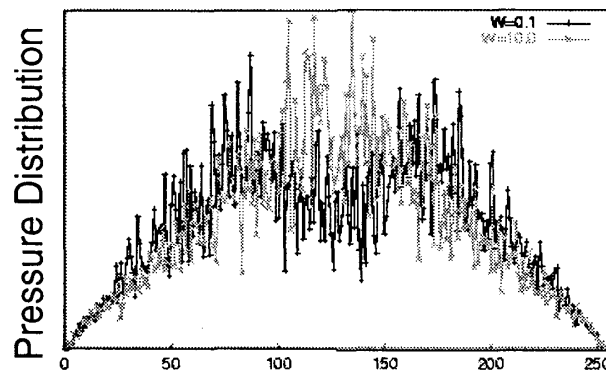


図 6: $\alpha=1.4$ の系で積む際に $W=0.1$ と $W=10.0$ としたもの. この場合、高さは $M=128$ で、幅は $N=255$ とした. $W=0.1$ で dip が見られる.

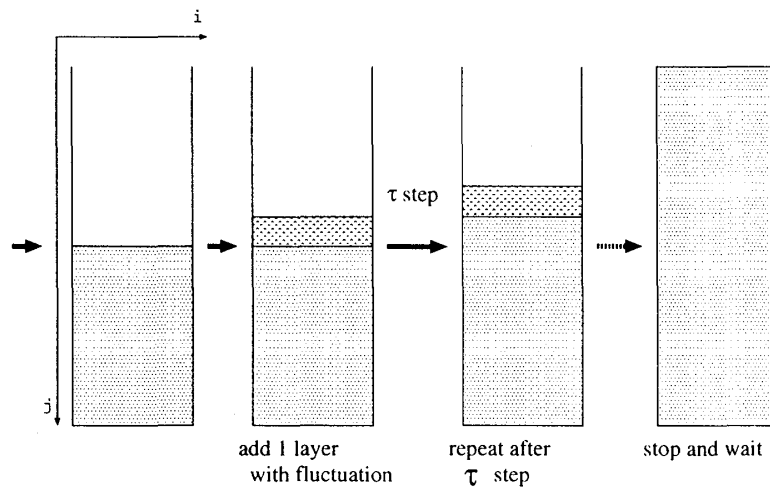


図 7: 積み方の手順. 操作の時間間隔 (τ) を変える.

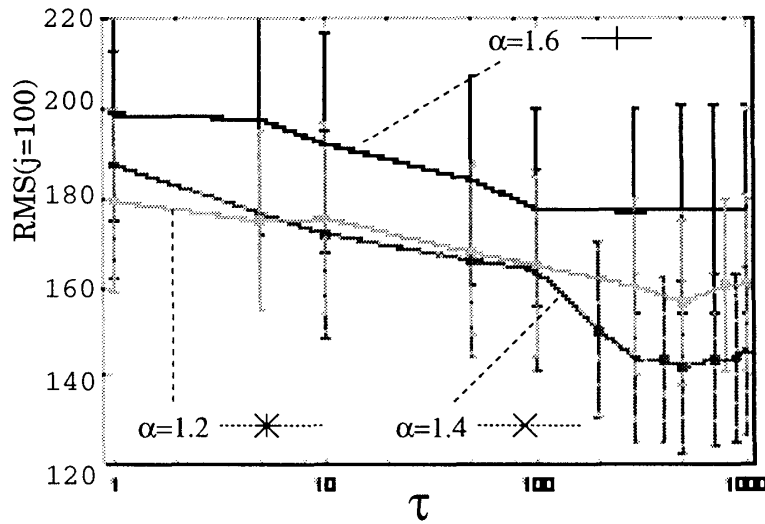


図 8: $\alpha=1.4$ $N=32$ の系で下から積み上げていった時、周期 τ に対しての固定点 VAR_{100} のサンプル平均。サンプルは 500 試行にわたってとった。

てくるが、これは系の緩和時間が有限であることからくるのではなかろうか？後に出てくる図 27 の結果を考慮すると、そのように思える。そこで議論するように、固定点に落ちた系の最上層に摂動を加えると、固定点に落ちるまでの時間は、典型的には、 $N=32$ で、数百 step である。ただし、短い場合もあったり、長い場合もあったりと、一律ではない。) $\tau \sim 500$ より小さい所での下がり方は、直線で近似できると思われる。このような結果は系の緩和の時間スケールと関係すると考えられ、おそらく緩和時間は対数的なのであろう。

対数スケールの緩和は実際の粉体で良く見られるものである。[20][21]

4 力学系としての性質

この章ではモデルの振るまい、力学系としての性質等を調べる。用意したフレームは $N \times M$ の格子点で、主に横方向に対して周期境界条件で調べ、固定境界条件については最後の方に述べた。力学系としての性質を調べるために砂等とのアナロジーを無視し、いちいち断わらない限り、試行に対して初期条件を一様ランダムな状態から始めた。この章では初期条件依存性、「履歴」というものには基本的にこだわらない。

力学系の性質を見るために、固定点での安定性を調べた。この安定性の指標として、9 の線形安定性ととも、空間マップの安定性を調べた。

この章で用いる記号を少し説明しておく。主に系の状態を特徴づける量としては $x_{i,j}$ の各層の分散 (variance) を測った。

$$VAR_j = \langle (x_{i,j} - \langle x_{i,j} \rangle_i)^2 \rangle_i$$

($\langle \rangle_{i,j}$ は i についての平均をとることを意味する。) これは各 j 列での中での分散で (つまり $\bar{x}_j \equiv (x_{0,j}, x_{1,j}, \dots, x_{N-1,j})$ の分散である。

この系を時間発展させて行くと、各 $x_{i,j}$ が時間発展に対して変化しなくなる、つまり固定点 (アトラクター) に落ちる。(流れ描像から言うと、流れの定常状態は固定点にあたる。) 時間的な周期

解やカオス解は少なくともシミュレーションの範囲では見つからなかった。このことを認めた上で話をすすめる。

ただし、実際にはほとんどのシミュレーションで 500step 毎に $x_{i,j}$ の分散を計算し、その変化 $|(\langle \delta x_{i,j}(t) \rangle - \langle \delta x_{i,j}(t-500) \rangle) / (\langle \delta x_{i,j}(t) \rangle)|$ が 10^{-10} より小さくなった時点でシミュレーションを終わらせた。

4.1 初期値依存性:多重固定点を持つこと

まず、いろいろな初期条件を与え、時間発展によって定常状態になった時、系がどのような固定点に落ち着くかを示す。もし系が履歴依存性を示すなら、初期条件によって様々な固定点に落ちることが必要である。(履歴のコードとして多重固定点を持つことが必要である。)逆に、履歴依存性を調べるモデルとして用意した系が妥当であるかどうかの目安にもなる。9 で与えられる系がこのような性質を持つかどうかを調べるため、パラメタ α を変え、その固定点の様子を plot したものを図 9 に示す。図は、 32×200 の系で固定点で $N=199$ (最下層)の VAR_{199} を全ての sample(30 回試行した)について plot したものである。

小さい α では分散がない、つまり一様であるが、 α が大きくなると ($\alpha \sim 0.7$) 次第に分散が大きくなる。しかしこの立上りの時点 ($0.7 \leq \alpha \leq 1.0$) ではどの初期条件から始めたものも同じ状態に落ち着いている。さらに α が大きくなると、固定点は初期条件によって大きく異なる。(それぞれの相の具体的様子については図 16)

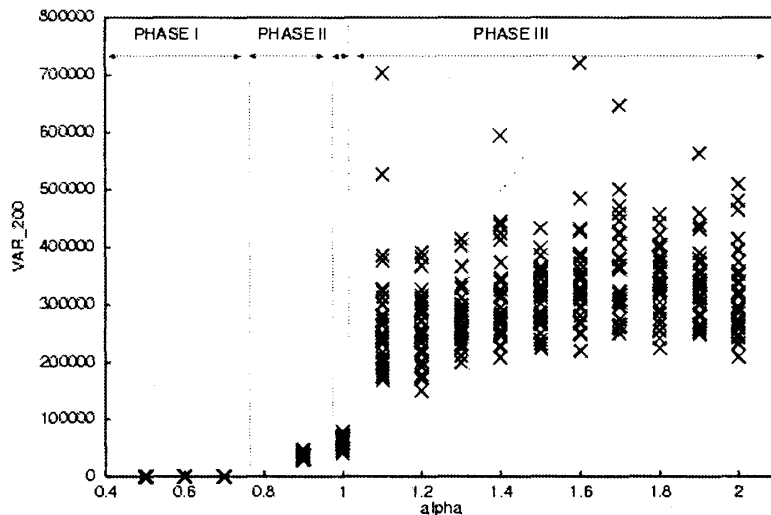


図 9: $N=32$ $M=200$ のシステムで、固定点での、最下層の分散 VAR_{199} 。

また、図 (10) に系が初期条件から固定点に落ちるまでの時間 (transient time) をプロットした。 $\alpha = 1.0$ で transient time が発散していることが分かる。これは $\alpha = 1.0$ で相転移があることを示唆するものである。ただしここで注意しておくことは、実際の物理系では α は系によって決まっているパラメタであり、外部から操作できるとは考えにくい。

なぜ $\alpha = 1$ で転移がおこるのであろうか。これについては、後に安定性解析を行い、 $\alpha = 1.0$ で一様解 $x_{i,j} = j + 1$ が不安定になることを示す。しかしながら、相転移での振舞い ($\alpha = 1.0$) についてはあまり拘らない。

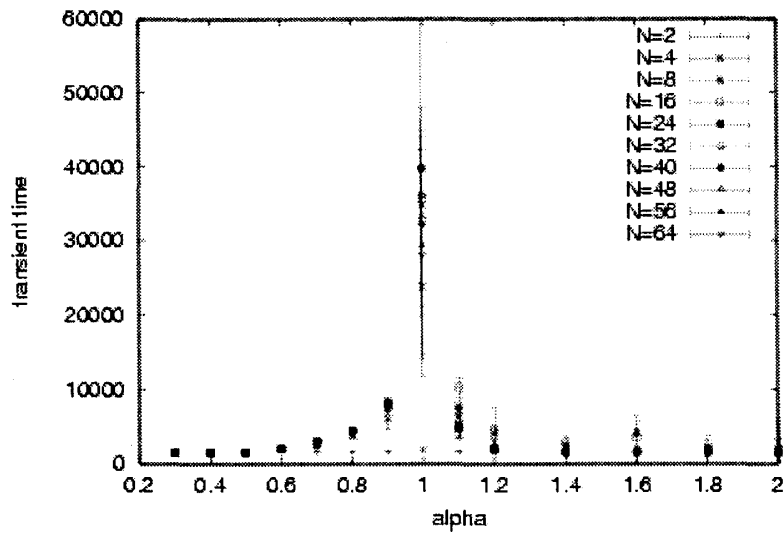


図 10: 各 α に対する transient time $\alpha = 1.0$ で発散している $M=1000$

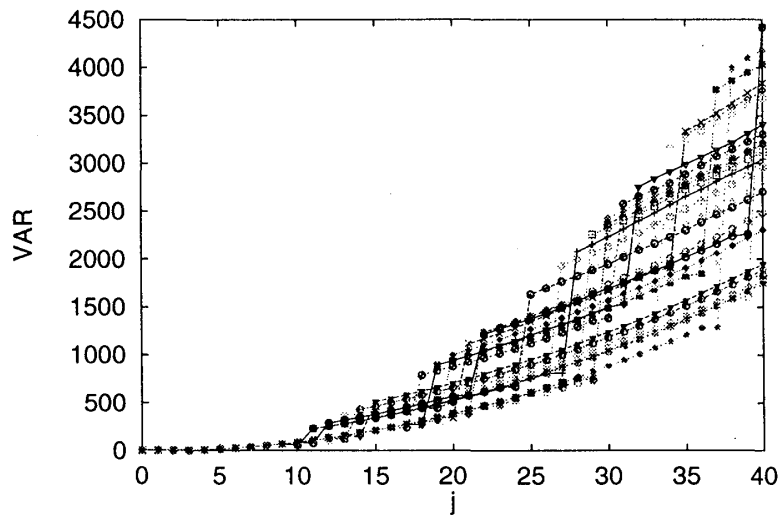


図 11: tree 構造 $N=4$ $\alpha = 1.4$ 100sample についての固定点の VAR_j を重ね書きしたもの。plot 間の線は各 sample に対してのもの。

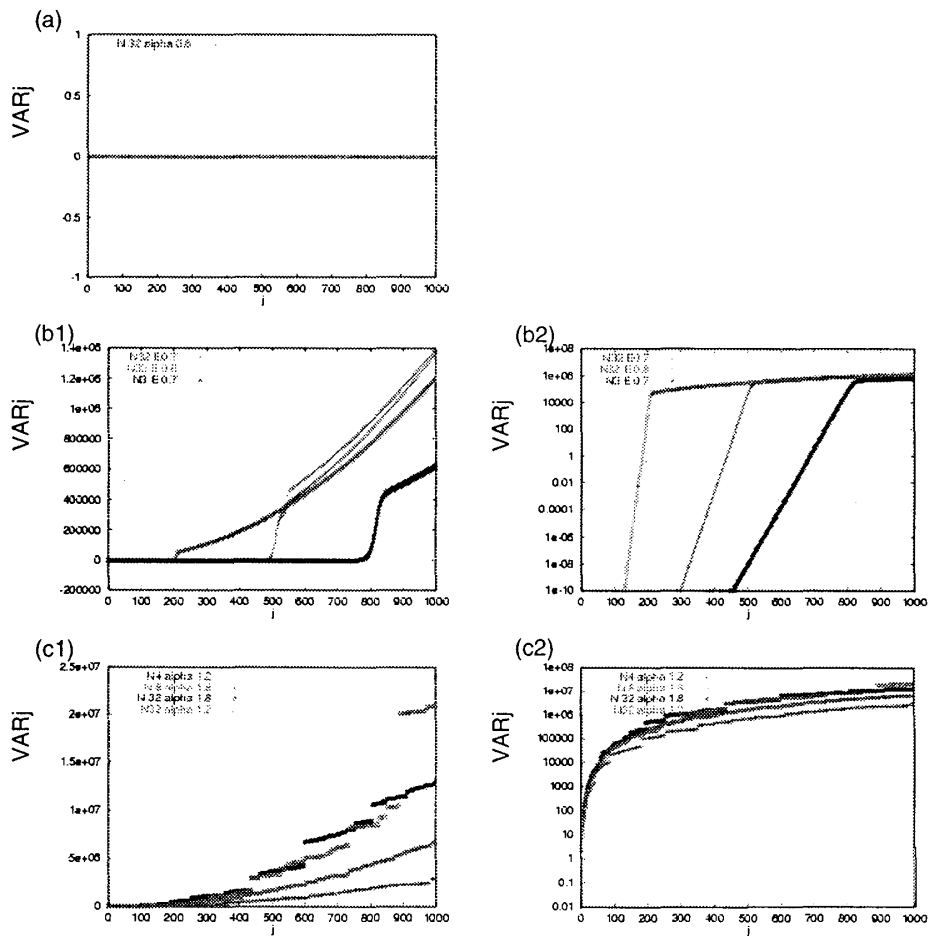


図 12: 幾つかのパラメータでの VAR_j の振舞い (a) $\alpha = 0.6$ 全ての層で VAR_j が 0 (一様) (b) $\alpha = 0.7 \sim 0.9$ 中間での指数的増加、そのあとの連続な上昇 (c) $\alpha = 1.1 \sim 1.2$ VAR_j の非連続的変化

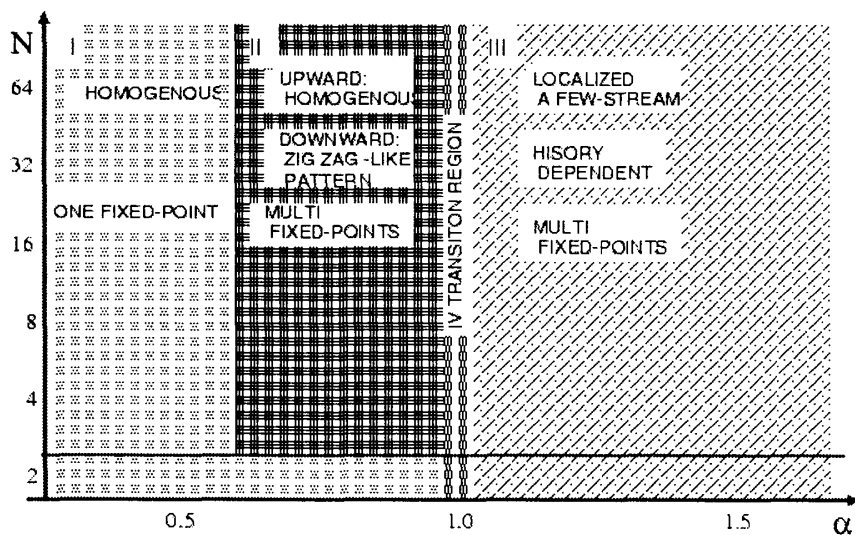


図 13: $\alpha - N$ 空間での相図 : 主に 3 つの相がある。

4.2 振るまいの概説 / 3つの相

固定点に落ちた時、系はどのような性質を持つだろうか？固定点では次の関係が成り立つ。

$$x_{i,j}^* = \beta + x_{i,j-1}^* \frac{(x_{i,j}^*)^\alpha}{(x_{i,j}^*)^\alpha + (x_{i-1,j}^*)^\alpha} + x_{i+1,j-1}^* \frac{(x_{i,j}^*)^\alpha}{(x_{i,j}^*)^\alpha + (x_{i+1,j}^*)^\alpha} \quad (16)$$

これから分かるように、固定点において、各 j 段目は一つ前の $j-1$ 段目を境界条件として決定される。実際に、ダイナミクスにおいても、上の層から決まっていく。この時、固定点の一つとは限らない。(さらにその固定点安定である必要がある。)この結果、上層から下層にかけて「ツリー構造」ができる。この様子を図 11 に示す。図では $N=4$ である。この図でははじめの数層 ($j=0 \sim 3$) では VAR_j (周期境界条件によっておこる横方向への移動対称性を考慮にいれて) 一つの固定点しかない。しかし、 j が増えるとともにとり得る固定点の数が増えていく。この時、 $j-1$ 層の値が決定すると j 層でのとり得る固定点の配置が決定する、ということを繰り返すし、この結果、各相のとり得る固定点の位置は「ツリー構造」となるのである。図 11 でみるとわかるように、層間をつなぐ線は全ての固定点同士を結ぶわけではない。このツリーの手の数は N と共に増え、また、 j 層でとり得る固定点の値は莫大に増える。

図 12 に、様々なパラメタにおいて、固定点に落ちた時、上流から下流へと向かって各層の VAR_j をプロットしたものを示す。 α の増大とともに、大まかにいって 3 つの相が見られた。これは前節で述べた 3 つの状態に対応すると思われるが、もう少し詳しく見てみることにする。図 13 にその相図を示す。

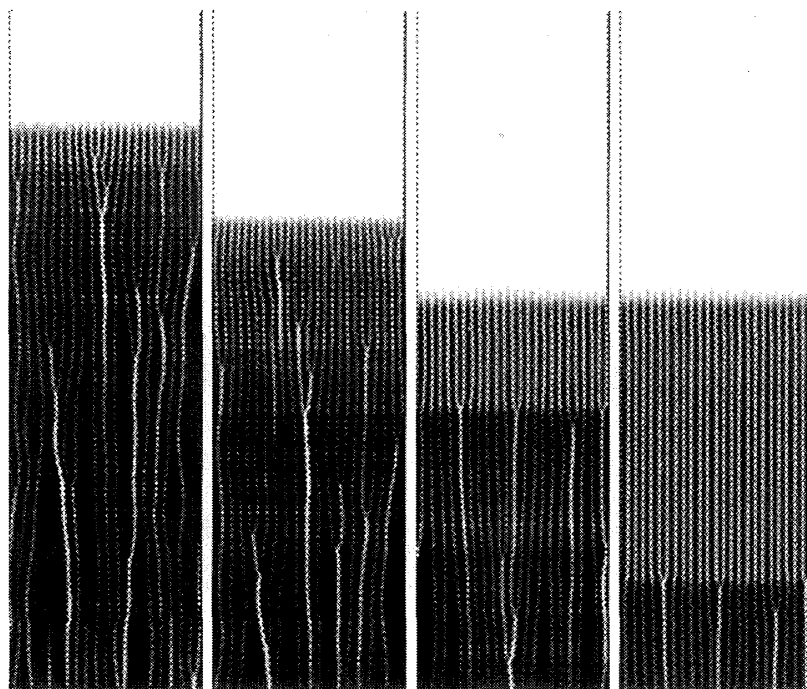


図 14: II 相の時間発展の様子 $\alpha = 0.9$

α が小さい所 (I 相) では $\sum VAR_j$ は発展しない、ゼロのままである。これは一様解 $x_{i,j}$ である。この領域ではどのような初期条件から始めても一様解に落ち、これがただ一つの固定点であると考えられる。

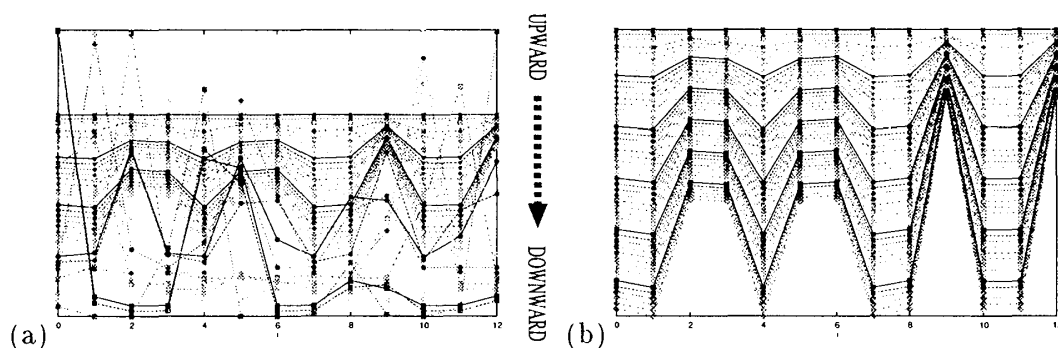


図 15: $N=13$ $\alpha = 0.8$ での (a) トランジェント中 (b) 固定点での $x_{i,j}$ 。各 j 層に対して 0 点をずらしてある。

α が 0.7 くらいになると、 $N=2$ 以外では II 相が見られる。この相では上流では一様解であるが、下流へいくとあるところから VAR_j が指数的に増大しはじめ、十分下流では増え方は (指数に比べ) ゆっくりとなる。上流での増大の緩やかさは次のように説明できる。各 j 層で $\sum_i = N(j+1)$ ($\langle x_{i,j} \rangle_i = (j+1)$) である。ダイナミクスは大きな $x_{i,j}$ がより大きくなる傾向を持つので、極端な場合を考えると、 $x_{i,j}$ のうち、ある $x_{imax,j}$ だけが値を持ち、他の値は最小の ($\beta =$) 1.0 のみである、という状況である。つまり、 $\bar{x}_j = (1.0, 1.0, \dots, N(j+1) - (N-1) = Nj+1, \dots)$ という状況である。この時 $\text{VAR}_j = (N-1)j^2$ となり、実際おおまかには VAR_j は j^2 に比例していると思わせる。 N が小さい場合ほどその傾向が強く、特に $N=2$ では α が 1 より大きいとほとんど一致して見えるように見える。しかしながら、 α が 1 より少し大きいくらいなら、わずかながら上流においてこれから外れたところがある。この指数的増大の傾きは、 α が大きい程、また、 N が大きい程増える。ただし、 N に対しての増え方は saturation をおこし、 $N=16$ くらいで有意な変化はない。

α が 1 を越えると (III 相)、II 相とは違って VAR_j の立ち上がりが上流ですでに起こってしまう。この相では、 VAR_j にとびがみられる。このとびは $x_{i,j}$ 大きな値をもつ「流れ」がぶつかることによっておこる。(図 16(c) と (d) を比較のこと)

図 16 にそれぞれの相の様子を示す。(a),(b),(c) がそれぞれ I,II,III 相に対応する。見て分かるように、II 相では上流で一様解が続いたあと、横方向にジグザグな構造を持つように非一様になる。(d)(e) はそれぞれの VAR_j を plot したものである。((e) は semi-log)

II 相は $M \rightarrow \infty$ でどのような振るまいをすだろうか? この非一様性が増大して、十分大きな j で III 相とかわらない振るまいをするのではなからうか? II 相と III 相の違いは単に立上りの早さの違いだけではなからうか、すなわち、 α の大きさは上流-下流方向の適当なスケールで、同じ現象になるのではなからうか? すなわち、前節にあるような中間領域は系の「サイズ」の問題であって、十分大きな系をとればそのような相はなくなってしまうのであろうか? 実際 III 相も upper boundary の付近ではジグザグが見られる。

しかしながらトランジェント時間の測定から $\alpha = 1.0$ で何かしらの相転移が起こっており、ダイナミクスも異なる。(図 19) これを確かめるため、 $N \times M = 13 \times 5000$ という十分長いと思われる系で調べた。 $N=13$ は、偶奇性が問題ではないことをたしかめるために選んだ。図 15 の (a) は固定点へと落ちる前の状態、(b) は落ちたあとの状態である。

実際には II 相においても異なる固定点はとり得る。II 相は multi-fixed points なのである。その様子を図 17 に示す。この図からわかるように、II 相の異なる固定点は、 VAR_j の非ゼロである

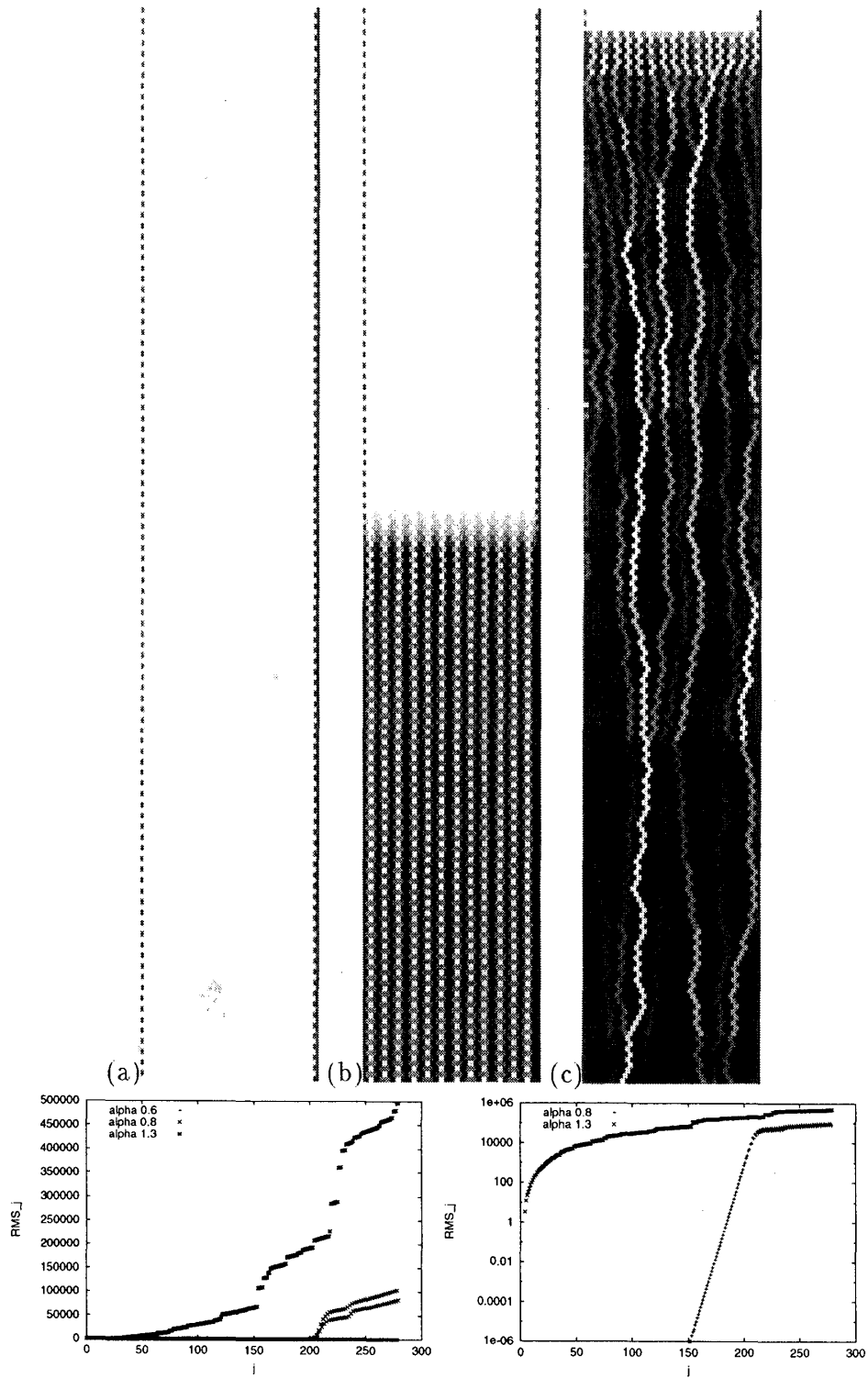


図 16: 各相での $x_{i,j}$ の様子。

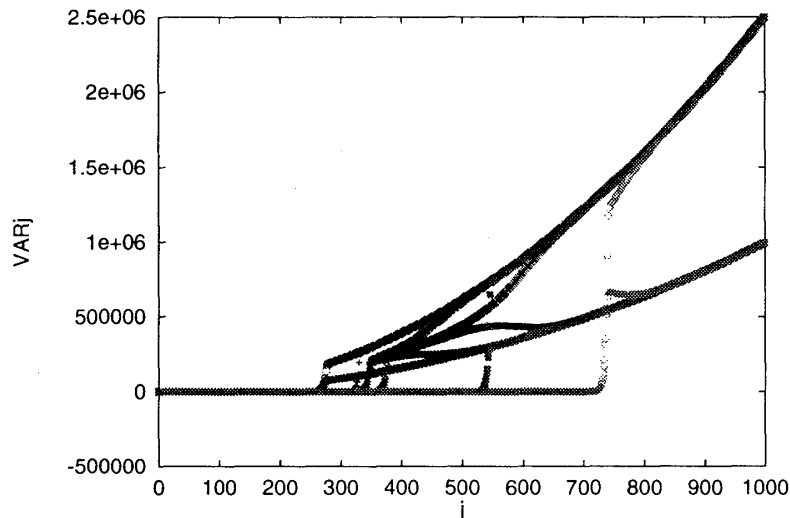


図 17: $N=4$ $\alpha = 0.8$ の固定点の幾つかのサンプル。

層が異なることに対応する。事実一様解 $x_{i,j} = j + 1$ は安定な解として存在し得る。この違いは図 (18) で II 相にあたる領域でバラツキがあることに対応する。それだけではなく、zig-zag の大きさにも違いがあったり、「欠陥」(2つの筋が合流している状態)が存在したり、安定な固定点が多数存在するようである。このような差は十分下流にいくと、あまり見られない場合が多い。また、後に示すように、上流に少しの振動を与えるとその構造は壊れてしまう。したがって、(固有値が複数あっても)履歴依存性があるとは見なせない。これは重要なことである。つまり multi-attractor が即ち(少なくとも粉体の意味で)履歴を表す、ということではないのである。

なお図 21 中で IV とした領域、転移点であるが、実際には、トランジェントが非常に長いということを除けば、得られた VAR_j の図は $N=2$ 以外では II と同じものであった。 $N=2$ では、どちらのものでもない図が得られた。

図 18 は幾つかの N の系で、どの層で VAR_j が値を持つかを調べたものである。 $\alpha < 1.0$ では前に述べたとおりバラツキがあるが、 $\alpha > 1.0$ では一定となる。 α が小さいほど $VAR_j = 0$ は大きい。システムサイズに関しては、 N が大きいほど立上るのも早いですが、 $N=16$ くらいで収束してしまう。このような VAR_j の性質は、最上段で一様な状態 ($x_{i,0} = 0$) から下流にむかってどのように乱れが出来るかを知る目安とするために plot した。

4.3 Dynamics との関係

図 19(a)~(c) は、各層の固定点に落ちるまでの様子を示したものである。($N=32$ $M=200$) 値は各層で、各格子の 5step 毎の時間変化絶対値の和 $\sum_i |x_{i,j}^t - x_{i,j}^{t-5}|$ を $N(j+1)$ で割ったもので測った。それを log の grey scale で表示した。

I 相 ($\alpha = 0.6$) と II 相 ($\alpha = 0.9$) では上流で一度起こった変化は下流に伝達する。相 I では速やかに固定点(一様解)に落ちる。相 II ではその最も外側での傾きは 1 より小さく、これは図 14 の進む速度が 1 より小さいことに対応する。両者とも基本的には変化の度合は時間と共に小さくなっていく。

一方 III 相 ($\alpha = 1.3$) では初期の乱れは (II 相に比べ) 比較的早く小さくなっているようである

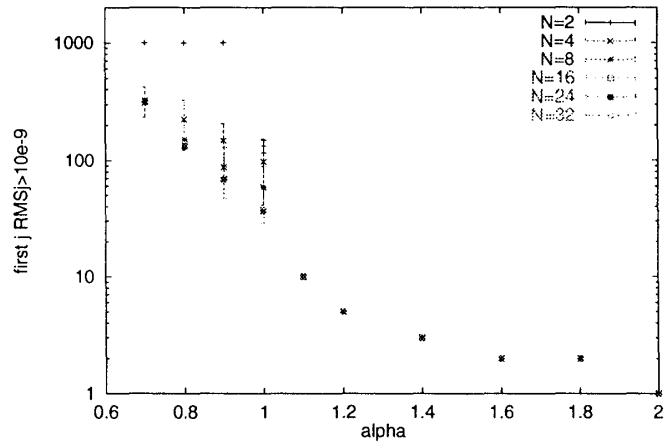


図 18: VAR_j が初めて 10^{-9} 以上の値をとる層 j 。 10^{-9} は計算機の出力の誤差を考慮して選んだ。
 $N=2$ で $j=1000$ が見られるがこれは計測した系のサイズであるので無視してもらいたい。

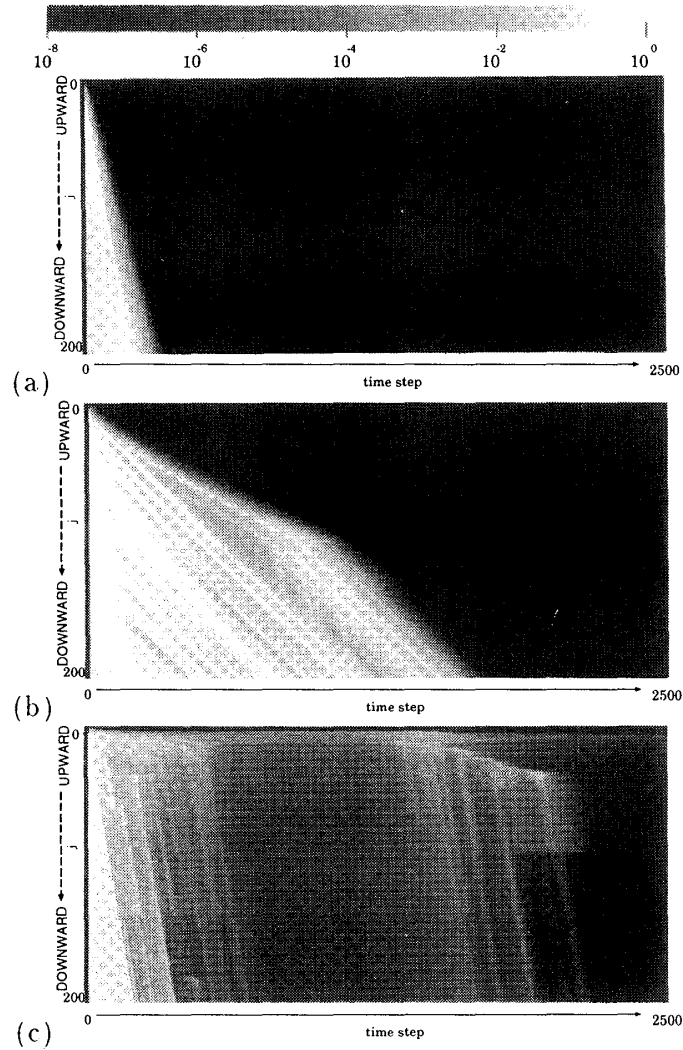


図 19: (a)~(c) 各相 ($\alpha = 0.6, 0.9, 1.3$) での層毎の時間変化 (緩和の様子) $\sum_i |x_{i,j}^t - x_{i,j}^{t-5}|$ を対数の gray scale で plot した。

が、いったん時間変化が小さくなった後でも時間間欠的に変化が起こっている。また、そのようにして起こった変化は必ずしも空間的には下層まで伝達するわけではなく、下流で変化の度合は小さくなり、相空間が I, II 相と比べ、複雑であることを示している。III 相のこのような性質 (相空間構造) は前章で表れた緩和のスケール (対数?) と関係あるのではないと思われる。

このような III 相の性質は後の線形性解析部分でふれ、この動的性質が履歴依存性と関係があるだろうことを示唆する。

4.4 分布関数/実験との比較

各 $x_{i,j}$ の分布について述べる。q-model では確率分布を (連続で) どのようにとってもそれが独立 ($\sum_i q_{i,j} = 1$ 以外で) ならば、「大きな圧力ではその分布は指数的に減衰する」という実験結果を説明した。しかしながら、本論文では「確率分布の独立性」は仮定していない。(確率描像でいうなら、 q_{ij} の確率分布が $\omega(D-1, j)$ と $\omega(D, i)$ に陽に依存する遷移 matrix で書かれることに対応する。) これを受けてその分布は最早指数形をなさない。分布は 500 回の試行を繰り返したものから得た。また、この分布の平均は常に 1 であることに注意。 ($\sum_i x_{i,j} = N(j+1)$)

まず、N 依存性を見る。図 20 に $\alpha = 1.2$ でのスケールした $x_{i,j}$ の $x_{i,j} / \langle x_{i,j} \rangle_i$ の分布関数を N に関して plot した。ただし分布は十分下流 $j=500$ についてみた。N が小さい所では 2 つの値に局在している。これはモデルの性質上、 $x_{i,j}$ の大きな部分と小さな部分がわかれてしまい、N が小さな所ではそれがはっきり出てしまうのである。N が大きくなると 2 つの領域は繋がり (中間の値が存在出来るようになる) より broad な分布となる。しかしながら $N \rightarrow \infty$ で指数的減衰を示す形にはならなさそうである。

(b)(c) にそれぞれ $N=48$ の系の II 相・III 相の上流から下流への分布関数の変化を plot した。II 相では分布関数は幾つかの山をもった分布をしていて、またその分布の幅も広くない。II 相での下流の形が zig-zag like であることに対応している。また上流での一様性はある j ですみやかに崩れている。これは前節で議論したことをふまえると、II 相での VAR_j が値を持ちうる j には下限があることを意味する。(c) では分布が非常に broad になり、また $x_{i,j} / \langle x_{i,j} \rangle_i$ が大きな所での 0 への漸近も悪い。より大きな $x_{i,j}$ がさらに大きな値をもつ傾向があるからであり、おそらく中的な減衰となると予想される。(このサンプルでは良くわからなかった。)

このモデルで指数減衰性が出ないのは、場の変数が一つであるスカラーモデルを仮定した時、応力分布と履歴性の間にジレンマがあるからだと考えられる。これについては次の章で議論する。

4.5 $N=2$ での振るまい

$N=2$ の場合について調べる。相図 (21) からわかるように、 $N=2$ では $\alpha = 1$ の前後で振るまいが変化し、両者とも単純なものである。 $\alpha < 1$ では一様解であり、 $\alpha > 1$ では $\text{VAR}_j = j^2$ が非常によく成り立っている。 α が 1 より少し大きい領域で、小さい j でなりたないところが見えるだけである。ただし、 $\text{VAR}_j = j^2$ が同じでも、同じ段の 2 つの格子の $x_{i,j}$ の振り分けはことなるので、固定点としては違い得る。結局 (これから見るように) 固定点の数は十分大きな α で 2^M となる。 $N=2$ の固定点では、

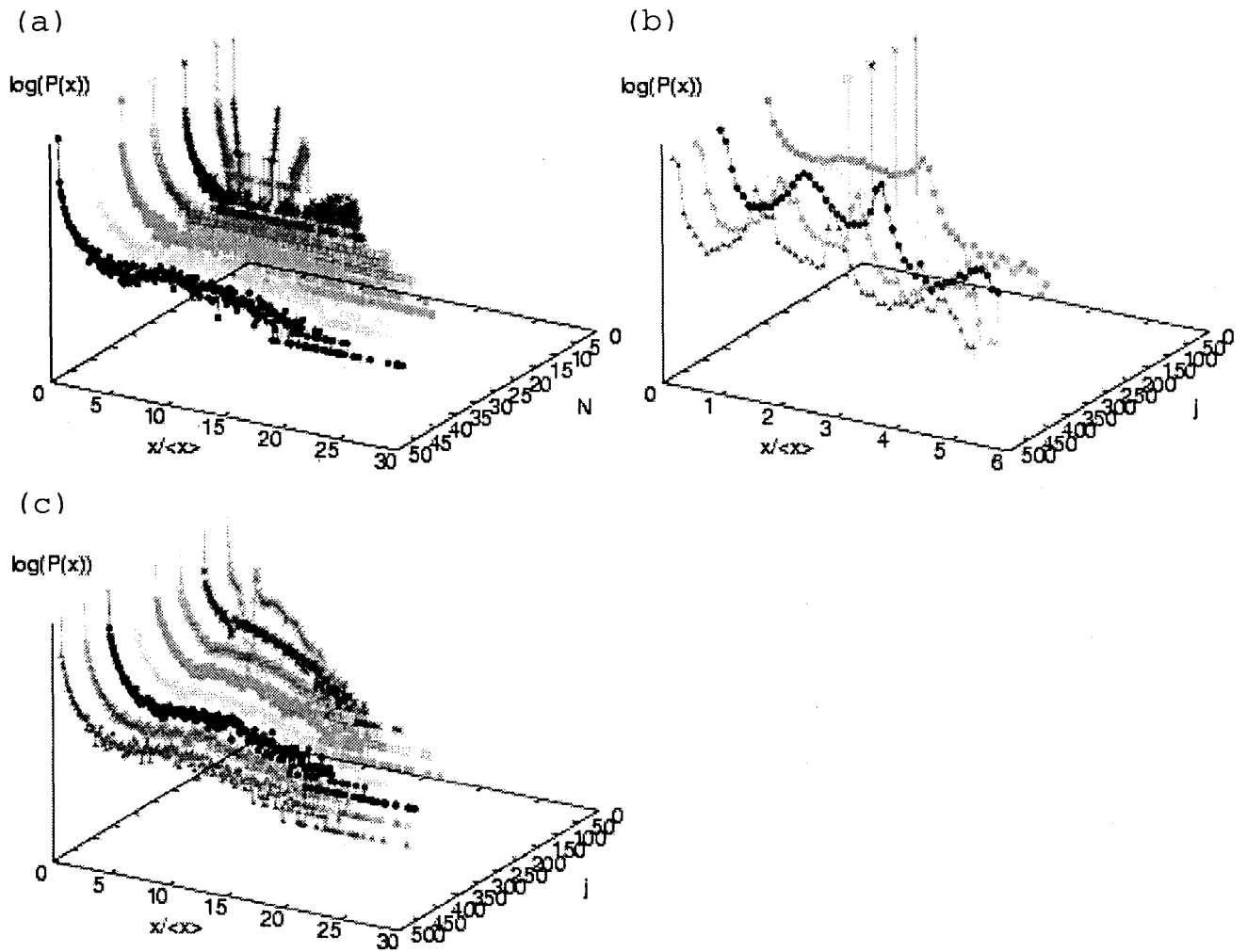


図 20: (a) $\alpha=1.2$ での N に対しての分布関数。 $N \rightarrow \infty$ で指数的にはならない。(b) $\alpha=0.8$ (c) $\alpha=1.2$ での下流へ向かっての $x/\langle x \rangle$ の分布。

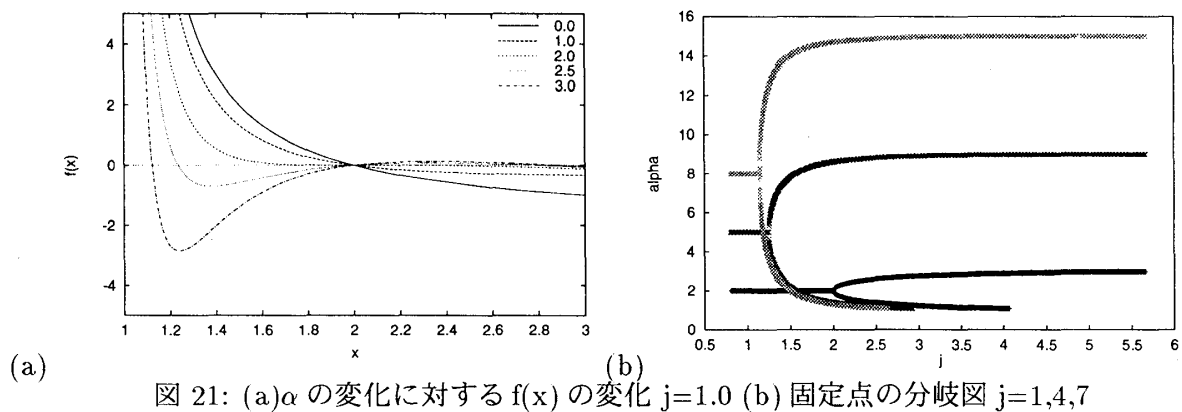


図 21: (a) α の変化に対する $f(x)$ の変化 $j=1.0$ (b) 固定点の分岐図 $j=1, 4, 7$

$$\begin{aligned} x_{0,j} &= 1 + (x_{0,j-1} + x_{1,j-1}) \frac{x_{0,j}^\alpha}{x_{0,j}^\alpha + x_{1,j}^\alpha} \\ x_{1,j} &= 1 + (x_{0,j-1} + x_{1,j-1}) \frac{x_{1,j}^\alpha}{x_{0,j}^\alpha + x_{1,j}^\alpha} \end{aligned}$$

$\sum_i x_{i,k} = N(k+1)$ を用いて $x_{0,j-1} + x_{1,j-1}$ を消すことができる。残った式から $x_{1,j}$ を消去すると、 $x_{0,j}$ についての式

$$\frac{2j}{x_{0,j} - 1} = \left(\frac{2 + 2j}{x_{0,j} - 1} - 1 \right)^\alpha \quad (17)$$

が導出される。(勿論 $x \rightarrow 2(j+1) - x$ にしても同じ条件が出る、つまり $x_{1,j}$ に対しても同じ式) そこで

$$f(x; j; \alpha) = \frac{2j}{x - 1} - \left(\frac{2 + 2j}{x - 1} - 1 \right)^\alpha \quad (18)$$

とすると、 $f(x; j; \alpha) = 0$ の解が固定点である。ただし x の動く範囲は $1 \leq x \leq 2(j+1) - 1$ であることに注意。図 21(a) に α を変えていった時の $f(x; \alpha)$ を示す。 α が大きくなると解の数は 1 つから 3 つになるが、この際固定点解 $x = j + 1$ は不安定になり、分岐を示す。図 21(b) に $j=1, 3, 7$ の時の分岐図を示す。 $N=2$ のうち、片方の $x_{i,j}$ が大きい方が安定なのは直観的にも明らかであろう。また、分岐のはじまる α が j の増大とともに早くなっている。

分岐が起こる α_c は、 $f'(j+1, j, \alpha) = 0$ かつ $f''(j+1, j, \alpha) = 0$ で求められるが、 N 次元への一般化を考えて、ここでは線形安定性解析によって求める。(9) 式で $N=2$ の場合を考える。固定点 $x_{i,j} = j + 1$ からの微小変化 $x_{i,j} \rightarrow x_{i,j} + \delta x_{i,j}$ を考える。この時、一つ上の段 $x_{i,j-1}$ の微小変化については考えない。(後で述べるように、この仮定は問題ない。) 変化の一次をとると、 $x_{i,j}^* = j + 1$ で、

$$\begin{pmatrix} \delta x_{0,j}^{t+1} \\ \delta x_{1,j}^{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{2} \frac{j}{j+1} & -\frac{\alpha}{2} \frac{j}{j+1} \\ -\frac{\alpha}{2} \frac{j}{j+1} & \frac{\alpha}{2} \frac{j}{j+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_{0,j}^t \\ \delta x_{1,j}^t \end{pmatrix} \quad (19)$$

となる。右辺の行列の最大固有値を求めると $\lambda_{max} = \alpha \frac{j}{j+1}$ であり、この値が 1 より大きくなると不安定となる。従って、 α_c は $\alpha_c \frac{j}{j+1} = 1.0$ から求められる。

$$\alpha_c = \frac{j+1}{j} \quad (20)$$

図 (22) に、 $N=2$ で VAR_j が j の増大とともに分岐開始の $\alpha = \alpha_c$ が小さくなっており、 $j \rightarrow \infty$ では収束する。これは次のことを意味すると考えられる。もし α がこの収束値より小さければ全ての j で固定点は $x_{i,j} = j + 1$ であり、逆に α がこの図の範囲 (1.1~2.0) であれば、上流では一様 ($x_{i,j} = j + 1$) であるが、下流で α_c が α を下回ると一様解は不安定になり分岐する。

以上のことから、 $N=2$ の場合には

- $N=2$ の系では相は一様解と分岐解の二つの相しかない。

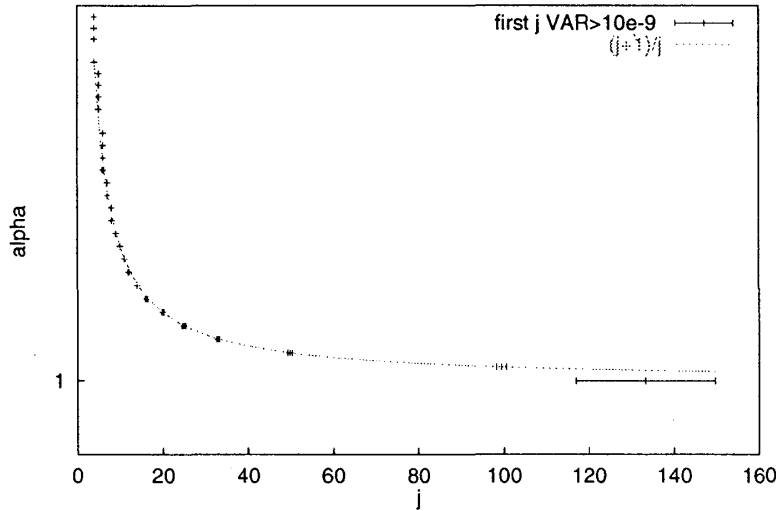


図 22: j 段目における分岐 α_c の値 : 線形解析で求めた $\alpha_c = (j + 1)/j$

- 十分大きな α では分岐解をとり、 α が 1 以下では一様解をとる。 α が 1 より少し大きい程度であると、下流の方で分岐する。
- 分岐解は 2 通りしかないので、系の個定点の数としては 2^{M-m} となる。 m は、上流で一様解の場合の、その段数である。

であることがわかる。

4.6 定常状態の安定性解析

boundary を一定値としているので、一般の N に対してして、一様解の安定性を調べるのは、下流のどの時点で非一様化が起こるか等調べるのにも役に立つと思われる。 $N=2$ の時と同様に、 $x_{i,j} = j + 1$ の回りの微小変化を考えると、

$$\begin{pmatrix} \delta x_{0,j}^{t+1} \\ \delta x_{1,j}^{t+1} \\ \vdots \\ \delta x_{N-1,j}^{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{2} \frac{j}{j+1} & -\frac{\alpha}{4} \frac{j}{j+1} & & -\frac{\alpha}{4} \frac{j}{j+1} \\ -\frac{\alpha}{4} \frac{j}{j+1} & \frac{\alpha}{2} \frac{j}{j+1} & -\frac{\alpha}{4} \frac{j}{j+1} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ -\frac{\alpha}{4} \frac{j}{j+1} & & -\frac{\alpha}{4} \frac{j}{j+1} & \frac{\alpha}{2} \frac{j}{j+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_{0,j}^t \\ \delta x_{1,j}^t \\ \vdots \\ \delta x_{N-1,j}^t \end{pmatrix} \quad (21)$$

行列の対称性を用いると、この行列の固有値は

$$\lambda_i = \alpha \frac{j}{j+1} \sin^2 \left(\frac{\pi}{2N} i \right) \quad (i = (1, 2, \dots, N)) \quad (22)$$

であることがわかる。よって $i = N$ で最大の固有値 $\lambda_{MAX} = \alpha \frac{j}{j+1}$ をとる。 $N=2$ の時と同様に、 $\lambda_{MAX} = 1$ から

$$\alpha_c = \frac{j+1}{j} \quad (23)$$

を得る。これは III 相においては、図 18 を見ると正しいことがわかる。しかし II 相ではそうではない。II 相 ($\alpha < 1.0$) では一様解が安定に存在しうる。

$N=2$ では、 $\alpha < 1.0$ では安定な固定点は一つしかなかったが、 $N > 2$ ではそうではない。これは、 α をパラメタとして、 $\alpha < 1.0$ で saddle-node bifurcation が起こるからだと考えられる。(図 23) [43]

$\alpha = 1.0$ は N によらず pitch-fork bifurcation が起こっていると考えられる (図 21)。

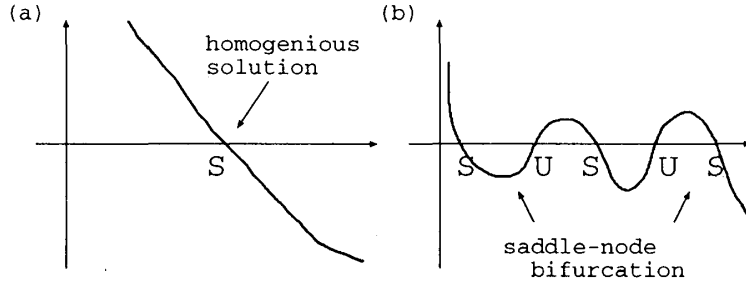


図 23: (a) が I 相 ($\alpha < 0.6$) から (b) II 相 ($0.6 < \alpha < 1.0$) への分岐の様子。S が安定、U が不安定固定点をあらわす。II 相は multi-fixed points 系。ここで系の対称性から分岐は同時に N 箇所起こると考えられる。

4.7 安定性解析

この節では安定性解析を行う。ただし、通常安定性解析の他に、空間マップを導入し、固定点での上流から下流への位置の関係を調べる。

4.7.1 用意

まずはじめに時刻 t で $N \times M$ 個の変数の微小変化 $x_{i,j} \rightarrow x_{i,j} + \delta x_{i,j}$ (for all i,j) に対しての一次近似を書き下す。

$$x_{i,j}^{t+1} = \beta + x_{l,j-1}^t \frac{(x_{i,j}^t)^\alpha}{(x_{i,j}^t)^\alpha + (x_{i-1,j}^t)^\alpha} + x_{r,j-1}^t \frac{(x_{i,j}^t)^\alpha}{(x_{i,j}^t)^\alpha + (x_{i+1,j}^t)^\alpha} \quad (24)$$

から、

$$\begin{aligned} \delta x_{i,j}^{t+1} &= \frac{(x_{i,j}^t)^\alpha}{(x_{i,j}^t)^\alpha + (x_{i-1,j}^t)^\alpha} \delta x_{l,j-1}^t + \frac{(x_{i,j}^t)^\alpha}{(x_{i,j}^t)^\alpha + (x_{i+1,j}^t)^\alpha} \delta x_{r,j-1}^t \\ &+ \left(x_{l,j-1}^t \frac{\alpha x_{i-1,j}^{\alpha-1} x_{i,j}^{\alpha-1}}{((x_{i-1,j}^t)^\alpha + (x_{i,j}^t)^\alpha)^2} + x_{r,j-1}^t \frac{\alpha x_{i+1,j}^{\alpha-1} x_{i,j}^{\alpha-1}}{((x_{i,j}^t)^\alpha + (x_{i+1,j}^t)^\alpha)^2} \right) \delta x_{i,j}^t \\ &- x_{l,j-1}^t \frac{\alpha (x_{i-1,j}^t)^{\alpha-1} (x_{i,j}^t)^\alpha}{((x_{i-1,j}^t)^\alpha + (x_{i,j}^t)^\alpha)^2} \delta x_{i-1,j} - x_{r,j-1}^t \frac{\alpha (x_{i+1,j}^t)^{\alpha-1} (x_{i,j}^t)^\alpha}{((x_{i,j}^t)^\alpha + (x_{i+1,j}^t)^\alpha)^2} \delta x_{i+1,j} \quad (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= ul_{r,j-1}^t \delta x_{l,j-1}^t + ur_{r,j-1}^t \delta x_{r,j-1}^t \\ &+ s_{i,j}^t \delta x_{i,j}^t + l_{i-1,j}^t \delta x_{i-1,j} + r_{i+1,j}^t \delta x_{i+1,j} \quad (26) \end{aligned}$$

ここで、 l, r は、 j の偶奇によって、 $(l, r) = (i, i+1)$ もしくは $(l, r) = (i-1, i)$ のどちらかをとる。
したがって、 $\vec{x}_j = (x_{0,j}, x_{1,j}, \dots, x_{N-1,j})$ とし、 $\vec{X} = (\vec{x}_0, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots)$ と置くと、

$$\delta X^{\vec{i}+1} = \hat{A} \delta X^{\vec{i}} \quad (27)$$

\hat{A} は $NM \times NM$ の Jacobian 行列で、部分行列を用いて

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \hat{D}_0 & & & & \\ \hat{U}_1 & \hat{D}_1 & & & \\ & \hat{U}_2 & \hat{D}_2 & & \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \quad (28)$$

その中身は式 (26) から

$$\hat{D}_j = \begin{pmatrix} s_{0,j} & r_{0,j} & & & l_{0,j} \\ l_{1,j} & s_{1,j} & r_{1,j} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ r_{N-1,j} & & & l_{N-1,j} & s_{N-1,j} \end{pmatrix} \quad (29)$$

$$\hat{U}_j = \begin{pmatrix} ul_{0,j} & ur_{0,j} & & & \\ & ul_{1,j} & r_{1,j} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ ur_{N-1,j} & & & & ul_{N-1,j} \end{pmatrix} \quad \text{j even} \quad (30)$$

$$\hat{U}_j = \begin{pmatrix} ur_{0,j} & & & & ul_{0,j} \\ ul_{1,j} & ur_{1,j} & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & ul_{N-1,j} & ur_{N-1,j} \end{pmatrix} \quad \text{j odd} \quad (31)$$

4.7.2 時間発展に対する安定性・線形解析

ここで行うのは普通の安定性解析である。式 (27) から Jacobian 行列の固有値を求めればよい。任意の行列に対して公式

$$\det \begin{pmatrix} \hat{A} & \hat{0} \\ \hat{C} & \hat{B} \end{pmatrix} = \det \hat{A} \det \hat{B}$$

を用いれば、 $\hat{1}_i$ を i 次元の単位行列として、

$$\det(\hat{A} - \lambda \hat{1}_{N \times M}) = \prod_{j=0}^M (\hat{D}_j - \lambda \hat{1}_N) = 0 \quad (32)$$

の解として固有値が求まるわけであるが、その固有値は \hat{A} の対角ブロック行列 \hat{D}_j のみによる。つまり各 j 段での固有値を求めることが出来、その固有値は j 段目と $j-1$ 段目の $x_{i,j}$ の値による。

$$\vec{\lambda}_j = \{\lambda_{0,j}, \lambda_{1,j}, \dots, \lambda_{N-1,j}\} = \vec{\lambda}_j(\vec{x}_j, \vec{x}_{j-1})$$

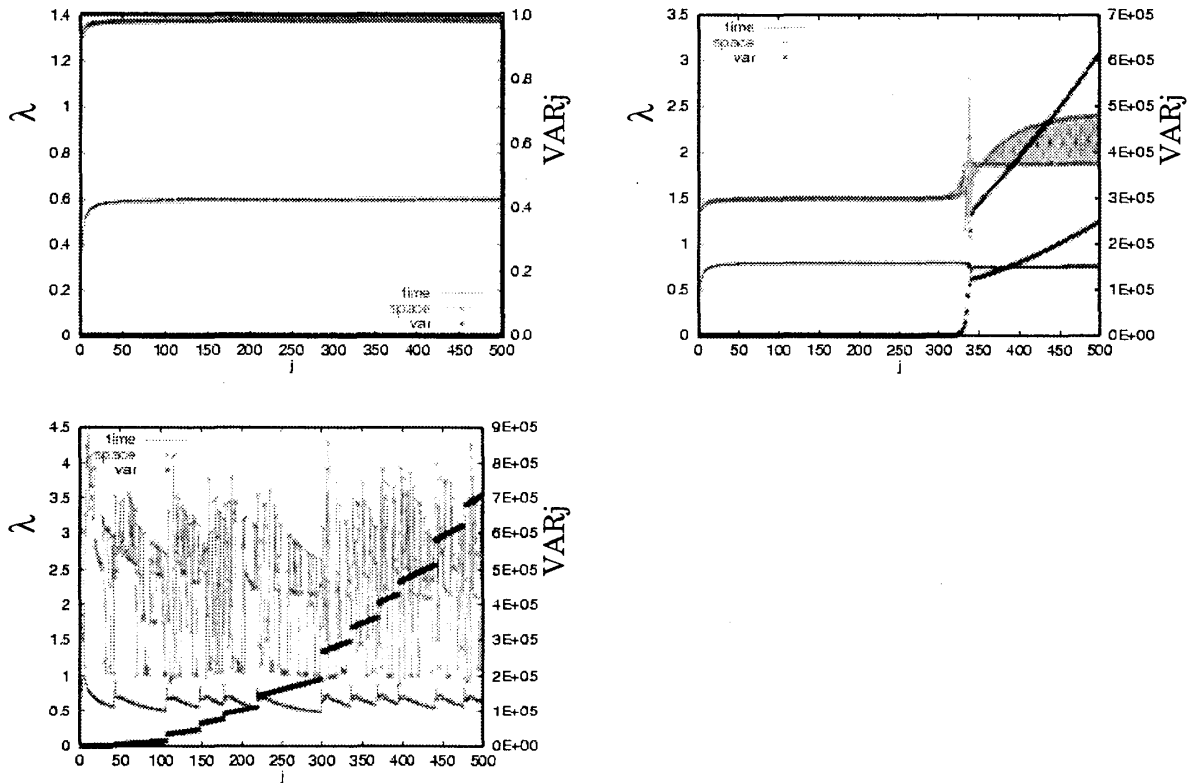


図 24: j 段目における最大固有値 λ^{max} , λ_{sp}^{max} と VAR_j $N=4(a)\alpha = 0.6(b)\alpha = 0.8(c)\alpha = 1.2$

4.7.3 空間マップとその安定性

前節であげた(普通の意味での)時間的な線形安定性の他に、もし系が周期的な運動をしていると、格子系では時間の効果を差し引いた「空間」マップが考えられる。open flow系 $\vec{x}_j^{t+1} = \vec{f}(\vec{x}_j^t, \vec{x}_{j-1}^t)$ を例にとって説明する。時間的に周期的な運動をしていれば、その周期を k として、

$$\vec{x}_j^t = \vec{x}_j^{t+k} = \vec{f}^k(\vec{x}_j^t, \vec{x}_{j-1}^t) \tag{33}$$

f^k はマップを k 回繰り返したことを意味する。これから、時間の index を取って x_j について(陰的に)解くことにより、空間に関するマップを作り出すことができる。

$$\vec{x}_j = \vec{g}(\vec{x}_{j-1}, \dots, \vec{x}_{j-k}) \tag{34}$$

(ただしこの解は一意的に決まるとは限らないことを注意しておく、固定点の多重性の起源) このマップの初期条件は、 $\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{k-1}$ である。(どのような初期条件をとろうと、(33)は満たす。) しかしながら、任意の初期条件から出発して空間マップにより生成される \vec{x}_j が物理的に意味のあるものではない。元の(時間)マップで安定なものであるかどうかは別の問題である。しかしながら、この空間マップの性質はこの系の振るまいを見るにも有益であると思われる。

一般に空間マップは陰的にしか解けない。(すなわち 34 を \vec{x}_j について解いて、explicit に $\vec{x}_j = g(\vec{x}_{j-1})$ と出来ない) しかし空間マップの線形安定性については以下のように調べることができる。式 9 では、固定点へ落ちるから、 $k = 1$ の場合を考える。(一般の拡張は容易である。)

$$\vec{x}_{j+1}^* = \vec{f}(\vec{x}_{j+1}^*, \vec{x}_j^*) \quad (35)$$

*は固定点を表す記号である。以下では省略する。 $\vec{x}_j \rightarrow \vec{x}_j + \delta\vec{x}_j$ を考えると(この変化の意味はもとの安定性解析で行った $x_{i,j} \rightarrow x_{i,j} + \delta x_{i,j}$ とは異なる)

$$\delta\vec{x}_{j+1} = \left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}_j} \right) \delta\vec{x}_j + \left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}_{j+1}} \right) \delta\vec{x}_{j+1} \quad (36)$$

$\left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} \right)$ は $N \times N$ ($N = \dim(\vec{x})$) の Jacobian 行列。これから、

$$\delta\vec{x}_j = \left(\hat{1}_N - \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}_j} \right)^{-1} \left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}_{j-1}} \right) \delta\vec{x}_{j-1} \quad (37)$$

この関係式から固有値を求め安定性を測る。ただしこの時調べるのは \vec{x}_j とともに \vec{x}_{j+1} が与えられたベクトル列(「時」系列)の固有値になっていることを注意しておく。(空間マップは一意的に決まるとは限らないので。)

$$\hat{S}_j = \left(\hat{1}_N - \hat{D}_j \right)^{-1} \hat{U}_j \quad (38)$$

の(固定点での)固有値 λ_{sp} を求める。

この値の意味は次のようなものである。系がある固定点にある時、各層 j は一つ上の $j-1$ 層の値から(陰的な)マップの「時間」発展として与えられる。 $(\vec{x}_j$ は \vec{x}_{j-1} を boundary として決まる)今、 \vec{x}_{j-1} に対して \vec{x}_j である時、 \vec{x}_{j-1} を微小変化 $\vec{x}_{j-1} \rightarrow \vec{x}_j + \delta\vec{x}_j$ させることを考える。ここで注意することは、これは時間的な意味で摂動を加えることではないことである。(言ってみれば、boundary \vec{x}_{j-1} を変えるのである。)この、上層($j-1$ 層)の変化に対しての変化の大きさの指標がこの固有値で与えられることになる。

4.7.4 数値的に解いた結果

固定点に落ちた値を用い、上の二つの時間マップの Jacobian Matrix の固有値 λ と空間マップの固有値 λ_{sp} を計算した。結果を図 24 に示した。結果は $N=4, \alpha = 0.6, 0.8, 1.2$ についてのものである。どの相でも時間に関しての固有値(の絶対値)は 1 より小さく固定点が確かにアトラクターであることを示している。

I 相 ($\alpha = 0.6$ 、一様相)では最大固有値は計算で求めた式 $\lambda_{max} = \alpha j / (j+1)$ と一致する。一方空間マップの方で測った固有値 λ_{sp} であるが、常に正である。(この相は取り立てて興味ある相ではないが、一様状態の振舞を見るため図示した。)

II 相では最大固有値はある j で、一様である時のものより下がっている。VAR $_j$ を見てわかるようにこれは zig-zag like pattern の出現と共に起こり、一般にこちらの方が一様解より小さな固有値をとる。このことはこちらの方がより安定なことを示す。一方 λ_{sp} の方は、逆に一様解より大きくなる。また II 相では空間マップの固有値が至るところ 1 以上である。これに対して、系が convective instability を示すように思えるが、実際固定点にある系にたいして、最上層 ($j=0$) に微小な摂動を加えると、その効果は完全に下流の全ての点に伝わっていった。この様子を 25 に示した。

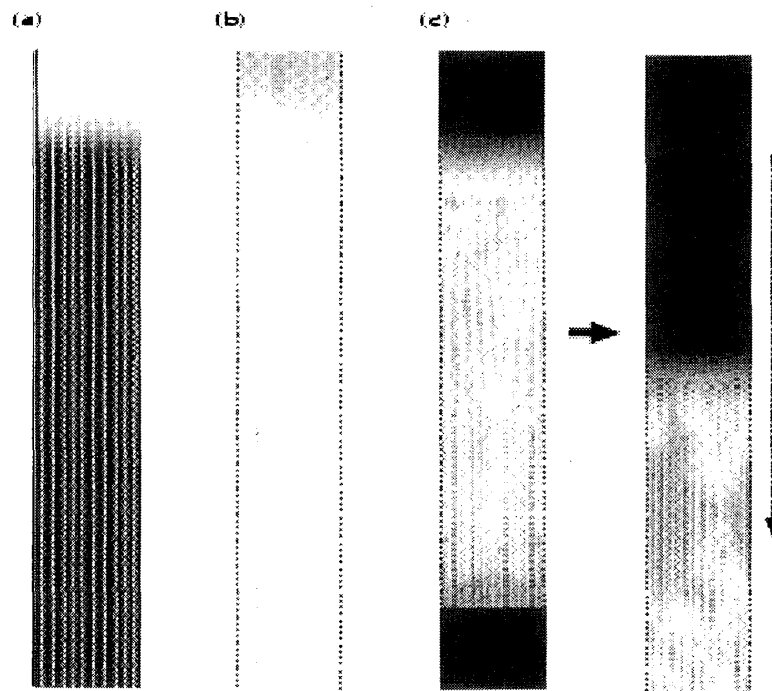


図 25: II 相 $\alpha = 0.9$ の (a) 摂動を入れる前の様子 (b) 摂動により変化を受けたサイト (白い部分)、全体が変化を受ける。(c) 摂動を入れて時間的に変化している格子 (白い部分) 時間と共に下流に流れていく。変化の度合は対数的に grey scale で表した

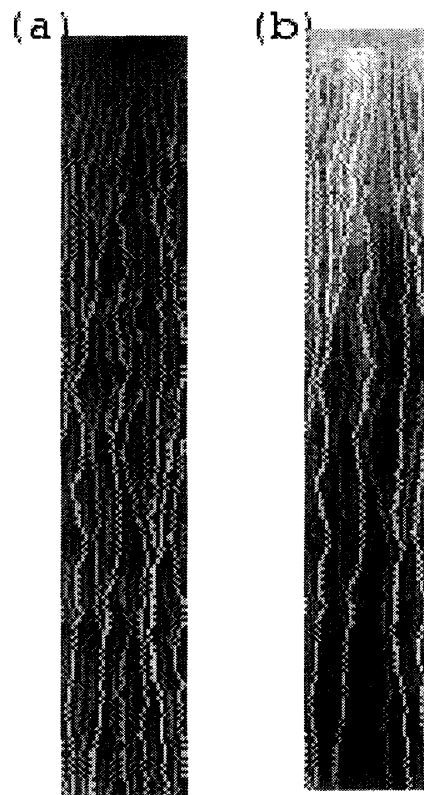


図 26: $N = 32, \alpha = 1.3$ での (a) $x_{i,j}$ (b) 摂動を与える前後の変化 白い所が変化した所。変化は摂動を入れる前と入れたあとの差の絶対値をとった。(a)(b) 共に log scale で示した。

III相では最大固有値は VAR_j と共に不連続な変化をする。連続な所では λ の固有値は減少し、不連続な所では増加する。一方 λ_{sp} の方は I, II 相と異なり振動が激しく、所どころ λ_{sp}^{max} はほぼ 1 まで落ち込んでいる。このような所では一つ上の層の変化に対して比較的安定であると考えられる。しかし、II 相と III 相の振る舞いの違いは、むしろ固有ベクトルにあると考えられる。

$\alpha = 1.2$ で固定点に落ちた状態から perturbation をかけたものを図 26 に示す。ここで、perturbation は最上段 $j=0$ での「湧き出し」 $\beta_{i,j}$ を少しだけ変化させることによってかけた。この perturbation での変化量 $|x_{before} - x_{after}|$ を図 26(b) にグレイスケールで示した。(これは最大固有値の固有ベクトルを知ることと関係している) 変化が大きい所はもともと値の大きい所であることがわかり、このことが上流の変化が下流に与える効果を弱めると考えられる。(図 24)(c) において固有値が 1 より大きい、この効果によって實際上、少しくらいの変化では下流の定性的性質は変えるのが難しいと考えられる。(流れがより $x_{i,j}$ の値の大きなところへいくのだから直観的にも明らかである。) このことより、III 相での構造の「安定性」は次のように説明できるだろう。「III 相での空間マップの絶対値の大きな固有値の固有ベクトルはもともと値の大きなベクトル成分に局在化している。」

以上のような振る舞いはトランジェントな部分(系が固定点に落ち着くまでのダイナミクス)にも表れていると考えられる。図 19 で、各層の時間変化は II 相では変化は必ず下流に向かっていのに、III 相ではある小数の層だけの変化であることに対応していると考えられる。

この空間マップの固有値は、基本的に固定点だけから決まる。つまり、多重固定点を持つ系であっても、上の様な性質を持つ固定点を持つかどうか重要なのである。空間マップの固有値自体の性質が系としての履歴依存性の有無の性質に関係付けられることが期待できよう。これは次の章で議論する。

図 27 には、最上層に摂動を与えた時の、各層の時間変化を示した。この摂動前と同じようにはパルス的な摂動ではなく、 $\beta_{i,0}$ の(恒常的な)変化によって与えた。なお、パルス的な変化の場合には III 相では図 27(b) の様な変化は起こらない。一方、(a) II 相ではパルス的な摂動でも同じことが起こる。III 相では、再び固定点に落ち着くまでは、実際は(b)の様子が典型的な振舞であるというわけではなく、収束するまでの時間は様々であった。(すぐに収束する場合もあれば長いトランジェントを示す場合もあった。)

5 議論・問題・まとめ・展望

5.1 履歴性を示すメカニズム/必要条件について考察

このモデルの場合、ミクロには、系のたどった履歴によってどの固定点へ落ちるかが変わって来る。この際この固定点に関して、もし巨視的な意味での履歴依存性を持つ(III相)ならば、それが単に固定点であるというだけでなく、さらに、空間マップの Jacobian 行列の大きな固有値の固有ベクトルが、マップ先(一つ下の層)の値 \vec{x}_{j+1} にほぼ平行になる(局在化)すなわち、もともと値が大きいところしか変化しないという条件が必要なようである。(II層とIII層の違い)

本来時間発展方程式の意味での固定点は $N \times M$ 次元のある点である。これを \vec{X} としよう。一方、空間マップはそれを M 個に分割した N 次元ベクトル $\vec{x}_0, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{N-1}$ 間の関係を与えている。もし \vec{X} の一部の成分、 \vec{x}_i が何らかの影響を受けるのであれば、履歴によって系に記録されたことが壊されないために、その変更の影響が他の点に「適当な形」でしか影響を与えない、ということ

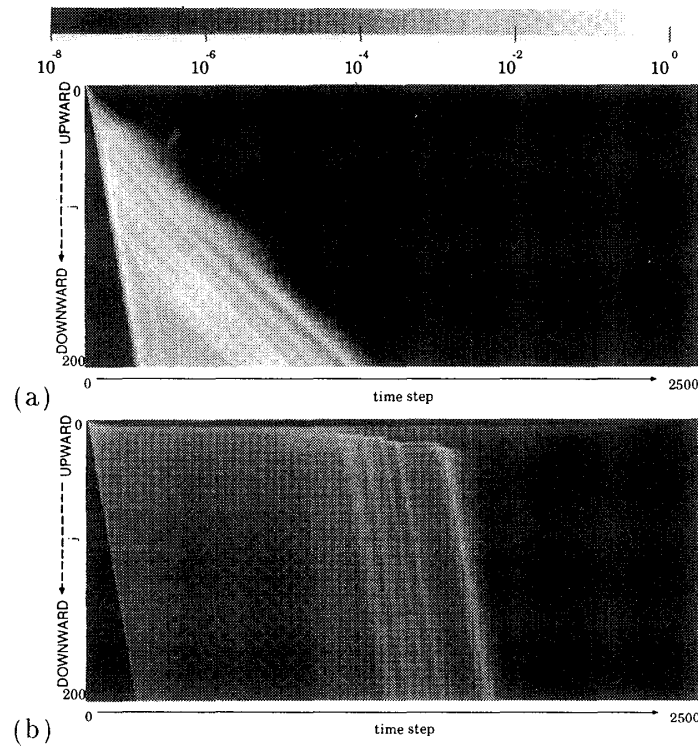


図 27: 最上層 ($j = 0$) に摂動を加えた時の各層の時間変化。変化は各層の時間変化の 5step 毎の絶対値の和 $\sum_i |x_{i,j}^t - x_{i,j}^{t-5}|$ を $N(j + 1)$ で割って、log の grey scale で表示した。(a) $\alpha = 0.9$ (b) $\alpha = 1.3$

が必要であるように思える。もし非常に影響が強ければ (global convective instability, GCI)、例えば本論文のモデルの II 相のように、上流で与えた摂動が下流で全ての $x_{i,j}$ に影響を与えれば、それは“記憶されてること”を (直観的には) 完全に壊してしまう。これは空間的なカオスが強く mixing/ergodic property が成り立っているのと同じである。そのような系は (巨視的な意味で) 過去の履歴は引きずらないだろう。(僅かな摂動で記憶されたことが壊れてしまうので。構造不安定) したがって履歴の効果が何らかの形で、存在するためにはある種の構造安定性が必要である。このモデルでは、その安定性は固有ベクトルの局在化 (local convective instability, LCI) という形で保証されてる。(図 26 の結果から)

II 相、III 相の、上流に加えられた摂動にたいする応答の相違点 (両者とも $\lambda_{sp} > 1$)	
GCI (global convective instability)	上流の変化が下流の全ての格子 (素子) に影響
LCI (local convective instability)	上流の変化が下流の限られた格子 (素子) だけに影響
	空間 map Jacobian 行列の固有ベクトルが \vec{x}_{j+1} に揃う

他にもそのような安定性を示す力学的機構としてなにかがあるだろうか? まず考えられるのは、absolutely stable (AS, 絶対安定) なものである。このような系に関しては、それぞれの \vec{x}_i に対して起こった摂動の効果は他の \vec{x}_j に対して影響を与えず、基本的には独立系として見なしうるだろう。即ち、系に対する外からの効果は、結局部分系にしか影響を与えない。このような系は PCU と逆の意味で記憶の効果をあまり考慮する必要がない。あるいは、部分系の数に対して履歴の効果を考える必要がある。系に対して外界からの影響を受ける部分 (表面) と外界に接していない部分

(バルク) を考えると、巨大な系でバルクが表面に比べて多い場合、系全体の振る舞いは一般に履歴が本質的ではないと考えられる(構造安定)。(もっともフラクタル的な表面構造を持つ系など例外は考えうる。) 例えば、もし砂山がこのような性質(AS)を持つならば(実際はそのようなことはないが)、砂山の底面分布はその最下層(～空間マップの固有値の逆数のスケール)を積んだ時に決定され、上層の変化に対しては何の変化も示さない。

だから流れのある系が履歴依存性を示すにはLCUのようなメカニズムが必要であるのではなからうか。

- LCIの他にも他にも履歴性を示すようなメカニズムはあるだろうか？
- この localization はどれくらい普遍的なのだろうか？(例えば [39] を参照のこと)

5.2 力学系としての性質

力学系の記憶問題として捉えるならば、ここで行ったことはもっとも簡単な例である。少なくとも、常に固定点に落ちるので、取り扱いも楽である。ある意味(少なくとも α の大きいところでは)ミクروسケールでの履歴依存性は明らかにある。(単に、大きな $x_{i,j}$ がより大きな値をもち、差異が増幅されるという意味で。) しかしながら、「履歴依存性」と言った時には、もう少し巨視的な量で取扱うことができるだろうことを期待して使ってきた。そこで、今まで力学系としての性質から、マクロな意味での「履歴依存性」の取り扱いの可能性を議論する(履歴性を記述する変数の少数化(縮約)への可能性)。

前節で示唆されたように、最上層の変化に対してその変化を強く受けるのは(つまり空間マップの固有値で絶対値が1より大きいものの固有ベクトルは)大きな値を持つところ(i_{max} とする)に局在しているようである、このことにより、「積む」(upper boundary が変化していく)系での値の変化は少数の大きな値を持つもの(道筋)が支配していると言える。このことにより次のようなシナリオを考えられるのではなからうか。

上部が受ける変化(noise)に対して $\vec{x}_{up} \rightarrow \vec{x}_{up} + \delta\vec{x}_{up}$ に効いてくるのはその一部の成分である。具体的には空間マップの固有ベクトルで線形分解した時、固有値の絶対値が大きいものに対する固有ベクトル成分が下流に対して意味をもつ。そしてそのような固有ベクトルは大きな $x_{i,j}$ の値に局在化している。したがって、現在の(ある層の)状況 \vec{x} と固有ベクトルの y は基本的に平行に近く(「局在化」)、そのずれの部分を「noise」として扱うことが出来そうである。noise と見なすことによって系を記述する変数を減らすことを目指す。

$$\vec{x}_{present} \xrightarrow{\text{perturbation}} \vec{x}_{present} + (\text{'noise'})$$

(実際は積むとそれぞれ積まれたぶんだけ変化する。) この「noise」部分によって $\vec{x}_{present}$ が駆動されるので重要なのはその「noise」の性質である。出来あがった「道筋(ストレスチェーン)」を見る時、その軌道は各時間の「noise」の性質によって変化してるわけだから、その軌道の変化の仕方が積み方の履歴をコードしている。一方積む過程においてどのような積み方をしたか、についての統計的性質がこの「noise」の統計的性質に反映すると考えられる。(逆に noise の統計的性質を変えないような積み方(「操作」)の変更は系に埋め込まれる「履歴の跡」には何の影響も与えないし、系にとってもそのような操作の変更は重要ではないと期待できるだろう。) 問題は「noise 部」の統計的特徴づけであるが、例えば最も大事な量としては方向性があるだろう。即ち「noise(ξ)」の

時間平均 (1次モーメント) $\langle \xi \rangle_t$ である。(場所に依存する $\xi(x)$ だろうが。) 勿論さらに2次モーメントなどを取り込みうるし、そうすることによってより「詳細」な noise を構成しうるが、系の詳細にはよらない巨視的な変数で閉じた記述が可能ではないだろうか？

このようなシナリオにそって系の履歴を考慮した変数の縮約化が可能なのではないだろうか？ 結局これは砂山で言うとストレスチェーンの変化だけに注目する、注目し得る、ことを言ってるにすぎなく、経験的な直観と一致すると言えよう。

しかし問題点はある。積み始めの初期で次第に非一様性が出来る時いかにできるか。はじめ積んで行くにあたって、揺らぎの中から選ばれるのであるが、一度できたものはさらに成長する「種」になるので、この「出来方」は大事な問題である。そのほかに、縮約された変数の数を決める手段がないという問題もある。

なお以上に述べたことはあくまでもシナリオであるので、その妥当性については、今後の課題にしたいと思う。

Dynamical property	履歴性
GCI	履歴無し
LCI	変数縮約 (少数変数による記述) 可能
AS	変数縮約不能 (?)

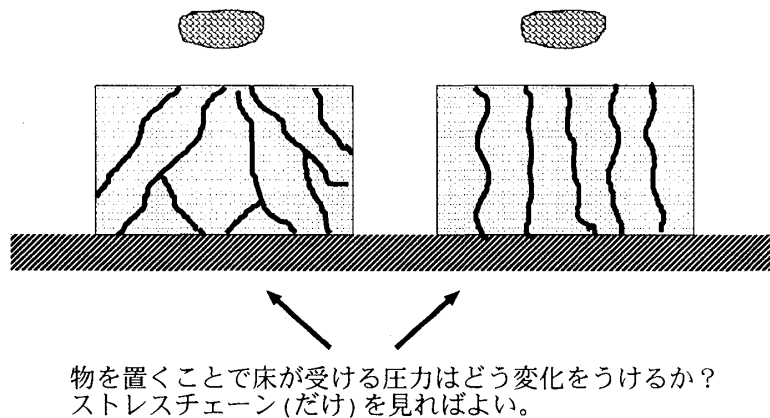
5.3 粉体系として

以上行ってきたことを粉体系として捉えるならば、粉体として満たすべき性質をもう少し問わなければならないだろう。結局はマイクロ系 (粉体粒子一つ一つのダイナミクス) からの本論文で設定した仮定「一度出来てしまった流れの通り道が、より多くの流れを通す」の妥当性、を検証することになるのかもしれない。あるスケールで仮定に入れたような性質を満たすことがあるだろうか？この仮定は素朴にアーチの壊れにくさ、丈夫さからおいた。事実建築的な意味でのアーチは非常に壊れにくいそうである。[42] しかしながら球形である粉体に対しては一部アーチ構造を作ってもある方向には強くてもある方向に弱い (fragile)。事実本論文での仮定をしない q-model [9] で粉体の応力の分布が説明出来てしまうことを考えると、このような仮定の正当性は疑わしくも思える。しかしながら q-model のような層の上下の間の相関のない確率モデルでは、実験 [4] であるような形の「作り方による」内部応力の依存性の再現性が得られないし、(これがスカラーモデルを扱う上での、応力分布と履歴性のジレンマである。下表参照) また、あくまでも静的なモデルであり、ある静止状態になる、その前の動的性質との関連を考慮していない。その上で本論文の仮定がどれほど正当性があるかわからないが、少なくとも一つの軸の取り方ではなからうかと思う。この論文で置いた仮定を導入する時断わったように、仮定の成り立つスケールというのも明確ではない。その意味では fragile な性質とは必ずしも反するものでもないと思われる。図 6 で、定性的性質が格子形によらない、ということはこの解釈が許されることを意味する。(但し、そうすると、“stress chain” の意味が曖昧になってくる。)

層の相関	応力分布	履歴性	モデル例
無	指数的減衰	無	q-model
有	非指数的減衰	有	本論文のモデル

前節に述べたように、直観的には妥当性のある conjecture、「砂山の応力分布はそのストレスチェーンをみれば理解できる。」ということが正当化できそうである。これは例えば砂山の上にものを置いた時底面の圧力分布の変化は、ストレスチェーンの分布に応じて変化するだろう、そしてその時はストレスチェーンだけを見れば良い、ということである。(図 5.3)

粉体の実験 [4] で見られた「履歴依存性」に関して、基本的に力学系としての性質としてここで得られた結果が必要であろう。



ここでは、このモデルを通して得られた知見をより realistic な粉体系へと拡張する方向性を議論する。

- もし粉体を完全に剛体球として扱い、摩擦を考慮するならば、その静止状態は不定になる。そのような状態へこの解析の拡張(固定点の性質を見る)にはどうすれば良いのか? 「ストレスチェーンを見ればよい」という結論は有効であるか。
- サイロ等では横の壁が粉体を「挟み込む」ことによって支えられている。(逆にそのような横に対しての境界がフリーな系である砂山の例だからこそ、dip が見えたのではないだろうか?) これは、サイロの様な系では水平方向の「運動量」が大事であるということである。実際の粉体内部のアーチ構造はこの成分が重要であろう。これは場の変数を 2 つにすることで出来る。
- Euler 描像を Lagrange 描像へ。例えば DEM シミュレーションにおいて、何を測ると有意味か、など。その方法論。(格子形がきれいでない場合、等) 単純にミクロレベルからの基礎づけ、を目指しても良いと思う。
- 離散性と連続描像。時間の連続化。連続描像は何処まで可能か、など。粉体が履歴を持つ系としてそのメカニズムを与えるスケール。連続描像で記憶系として記述しうるか。これは前節に述べたことと直接関係する。

もっと動的な粉体系で見られる履歴効果について [5]、静止粉体で見られる履歴性とどう結びつくか、結びつきうるか。ここで「動的」というのは、次のような意味である。本論文でたてたモデルは粉体そのものの流れ自体は考慮しなかった(「流れ描像」の節を参照)。そういう意味であくまでも近静止状態のモデルであり、粉体粒子の空間移動が大きい「流れ」のあまり重要でない

粉体の振舞いを意識している。[5]では粉体を「たてにゆする」という実験を行っているが、「流れる」ほど強い振動を扱っているわけではなく、ひよっとしたら近静的描像で扱えるのかもしれない。([5]では履歴性の説明のためのモデルを出しているが、ここで出されているモデルも「流れ」が重要なものでないと言う意味で、「近静的」なものであろう。) こういう方向も探っていきたい。

5.4 展望/更に抽象的な「履歴依存」のシステム

ここで立てたモデルは砂山から出発したものの、砂山というには、完全に「富めるものがより富む」というモデルであり、いささか過激である。たとえば、ストレスチェーンが壊れたりして、それでもその「残骸」の効果があるような、そのような現象は考慮していない。(ここで例えばカオス的遍歴のバーストの前後の状態の相関性をイメージしている。[37])

しかし力学系としての抽象化を通して見えたこともあった。定性的には局所的に feed back があるような系であり、「始めにあったものが勝つ」系でもある。砂山においては「上流から下流への」流れとして、格子系も単純なものを選んだわけだが、この格子系は任意に取りうる。その際には「定常な流れ(固定点)」へと落ちるかどうかも自明ではない。仮定自体は非常に単純なもので、この様な仮定は現実的な系で何処まで妥当かどうかは議論がわかれるところではあろうが、その単純さゆえ(ダイナミクスが CML ということもあり)「ネットワークとしての性質」を見るのにも役立つと考えられる。問題意識、その念頭におく系は introduction に書いた。

APPENDIX

A. 時間連続版との比較

時間連続の極限を考察する。本論文で取り扱った CML

$$x_{i,j}^{t+1} = \beta + x_{l,j-1}^t \frac{(x_{i,j}^t)^\alpha}{(x_{i,j}^t)^\alpha + (x_{i-1,j}^t)^\alpha} + x_{r,j-1}^t \frac{(x_{i,j}^t)^\alpha}{(x_{i,j}^t)^\alpha + (x_{i+1,j}^t)^\alpha} \quad (39)$$

に対しての拡張を考えると、 $0 < c < 1$ として、

$$x_{i,j}^{t+1} = (1 - c)x_{i,j}^t + c \left(\beta + x_{l,j-1}^t \frac{(x_{i,j}^t)^\alpha}{(x_{i,j}^t)^\alpha + (x_{i-1,j}^t)^\alpha} + x_{r,j-1}^t \frac{(x_{i,j}^t)^\alpha}{(x_{i,j}^t)^\alpha + (x_{i+1,j}^t)^\alpha} \right) \quad (40)$$

したがって、時間連続の極限をとると、 $c/\Delta t = 1/\tau$ を一定にして、

$$\tau \frac{dx_{i,j}}{dt} = -x_{i,j} + \beta + x_{l,j-1}^t \frac{(x_{i,j}^t)^\alpha}{(x_{i,j}^t)^\alpha + (x_{i-1,j}^t)^\alpha} + x_{r,j-1}^t \frac{(x_{i,j}^t)^\alpha}{(x_{i,j}^t)^\alpha + (x_{i+1,j}^t)^\alpha} \quad (41)$$

ここで、 β, τ は適当な x, t のスケールをとれば $\beta = 1.0, \tau = 1.0$ とおける。この式は各格子点での固定点への緩和方程式である。

上に挙げた式は全て同じ固定点を持つ。(本論文で用いたマップはこの方程式を時間ステップ $\Delta t = 1$ で Euler 的に解いたものにあたる。)

Jacobian 行列を求めると、式 (27) で導入したマップの Jacobian 行列を用いて、

$$\hat{J} = \hat{A} - \hat{1}_{N \times M} \quad (42)$$

である。したがって、 \hat{J} の固有値 $\bar{\lambda}_i^J$ は行列 \hat{A} の固有値 $\bar{\lambda}_i^A$ と

$$\lambda_i^J = \lambda_i^A - 1.0 \quad (43)$$

という関係にある。今の場合マップではなく連続時系列なので、(最大)固有値の値の符号で安定性が変わる。(中間の式(40)では、 $\hat{A}_c = c\hat{A} + (1-c)\hat{1}_{N \times M}$, $\lambda_i^{A_c} = c\bar{\lambda}_i^A - c + 1.0$ であり、 c の値に関わらず、 λ_i^A と $\lambda_i^{A_c}$ は同時に 1.0 になる。)この時、それぞれ対応する固有値に対して、同じ固有ベクトルを持つ。即ち各固定点に対して、その安定方向・不安定方向は同じである。

これらのことから、(少なくとも固有点の近傍の)ダイナミクスは時間の連続・離散性に関わらず似通っていると考えられ、実際、41 の場合をシミュレーションすると、定性的には似たような振舞をしていた。このことから、本論文で得た結果は時間連続の場合にも当てはまることが期待される。

謝辞

まず何よりも指導教官である金子邦彦先生に感謝をしたいと思います。この駒場の2年間、様々な議論と示唆を与えてくださっただけでなく、いろいろな意味で未熟な私を忍耐強く指導してくださいました。

佐々先生のセミナーは、本論文で取扱った問題意識について考えるきっかけとなりました。

金子研のメンバーには、議論その他をとおして様々な影響を受けました。特に藤本さんには本論文を書くにあたっていろいろ教えていただきました。また、先輩スーパーユーザーの皆様にも感謝します。

僕を支えて下さっている、全ての人に感謝します。

参考文献

- [1] 田口 善弘 「砂時計の七不思議」 中公新書 (1995)
- [2] Heinrich M.Jaeger and Sidney R.Nagel Granular, Solids,liquids,and gases. *Rev. Mod. Phys.* **68**, 1259. (1996)
- [3] 早川 尚男・那須野 悟 粉体の物理 現代物理最前線 1 共立出版 (2000)
- [4] Loic Vanel, Daniel Howell, D.Clark, R.P.Behringer and Eric Clément, Memories in sand:Experimental tests of construction history on stress distribution under sandpiles. *Phys. Rev. E* **60**, R5040. (1999)
- [5] Christophe Josserand,Alexi V.tkachenko,Daniel M.Mueth,and Heinrich M.Jaeger, Memory Effect in Granular Materials. *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3632. (2000)
- [6] C.-h.Liu,S.R.nagel,D.A.Schechter,S.N.CopperSmith,S.Majumdar,O.Narayan,T.A.Witten, *Science* **269**, 513. (1995)

- [7] (a) Daniel M. Mueth, Heinrich M. Jaeger and Sidney R. Nagel, Force distribution in a granular medium. *Phys.Rev.E* **57**, 3164. (1998)
(b) Daniel L. Balir ,nathan W. Mueggenburg,Adam H.Marshall,Heinrich M.Jaeger,Sidney R.Nagel, Force distribution in 3D granular assemblies:Effect of packing order and inter-particle friction. cond-mat/0009313 (1999)
- [8] Farhang Radjai, Michel Jean, Jean-Jacques Moreau, and Stéphane Roux, Force Distribution in Dense Two-Dimensional Granular Systems. *Phys.Rev.E* **77**, 274. (1996)
- [9] S.N.CopperSmith, C.-h.Liu, S.majumdar, O.Narayan, and T.A.Witten, Model for force fluctuations in bead packs. *Phys.Rec.E* **53**, 4673. (1996)
- [10] H.A.Janssen, V.D.I -Zeit **39**, 1045. (1895)
- [11] S.F.Edwards and C.C.Mounfield *Phisica A* **226**, 1. (1996)
- [12] J.P.Wittmer, M.E.Cates, and P.Claudin, Stress Propagation and Arching in Static Sand-piles. *J.Phys.I France* **7**, 39. (1997)
- [13] P.Claudin, J.-P.Boucahud, M.E.Cates, J.P.Wittmer, Models of stress fluctuations in granular media. *Phys.Rev.E* **57**, 4441. (1998)
- [14] Miguel Da Silva and Jean Rajchembach, *Nature* **406**, 708. (2000)
- [15] Guillaume Reydellet, Eric Clément, condmat/0012083
- [16] Jufei Geng, D.Howell, E.Longhi, and R.P.Behringer G.Reydellet, L.Vanel and E.Clément S.Luding, Footprints in Sand: The Response of Granular material to Local perturbation. condmat/0012127
- [17] Gael Combe and Jean-Noël Roux. Strain versus Stress in a Model Granular Materials: A Devil's Staircase *Phys.Rev.Lett*, **85**, 3628. (2000)
- [18] S.Ouaguenouni and J.-N.Roux, Force distribution in frictionless granular packing at rigidity threshold *Europhys.Lett* **39**, 117. (1997)
- [19] Jean-Noël.Roux, Geometric origin of mechanical properties of granular materials. *Phys.Rev.E* **61**, 6802. (2000)
- [20] J.B.Knight, C.G.Fandrich, C.G.Fandrich, C.N.Lau, H.M.Jaeger and S.R.Nagel, Density Relaxation in a vibrated granular material. *Phys.Rev.E* **51**, 3957. (1995)
- [21] J.B.Knight, E.E.Ehrichs, V.Y.Kuperman, J.K.Flint, H.M.Jaeger and S.R.Nagel, Experimntal studt of granular convection. *Phys.Rev.E* **54**, 5726. (1995)
- [22] 今井 功 古典物理の数理 岩波講座 応用数学
「科学」 Vol.70 から連載記事を参照

- [23] 曾田範宗 「摩擦の話」 岩波新書
- [24] 数理科学 特集「トライボロジー」 No.10 (1993)
- [25] M.Hirano ,K.Shinjo, Atomistic locking and friction. *Phys.Rev.B* **41**, 11837. (1990)
 M.Hirano ,K.Shinjo ,R.Kaneko ,Y.Murata, Anisotropy of frictional forces in muscovite mica. *Phys.Rev.Lett* **67**, 2642. (1992)
- [26] 松川 宏 摩擦の物理の最近の発展 日本物理学会誌 **51**, 584. (1996)
 摩擦という物理現象 パリティ **9**, 18. (1994)
 摩擦の不思議 数理科学 **443**,41. (2000)
- [27] 「摩擦の物理」 固体物理 35 (2000) からのリレーコロキウム
- [28] Bo N,J,Persson Sliding Friction Springer (1998)
- [29] J.H.Dieterich, Preseismic Fault Slip and Earthquake Prediction. *Journal of Geophysical Research* **83(B8)**, 3940. (1978)
- [30] F.Heslot,T.Baumberger,B.Perrin,B.Caroli,and C.Caroli, Creep,stick-slip,and dry-friction dynamics: Experiments and a heuristic model *Phys.Rev.E* **49**, 4973. (1994)
 T.Baumberger,F.Heslot and B.Perrin, Crossover from creep to inertial motion in friction dynamics. *Nature* **367**, 544. 1994
- [31] S.Nasuno,A.Kudrolli,A.Bak,and J.P.Gollub, Time-resolved studies of stick-slip on sheared granular layers. *Phys.Rev.E* **58**, 2161. (1998)
 那須野 悟 2001 年 1 月 東京大学 駒場集中講義 「粉体の物理」
 粉体の物理と摩擦の物理 物性研究 第 4 3 回物性若手夏の学校テキスト
 粉体摩擦 - ミクロなすべりとマクロなすべり- 日本物理学会誌 **53**, 775. (1998)
- [32] Andy Ruina, Slip Instability and State Variable Friction Laws *Journal of Geophysical Research* **88(B12)**, 10359. (1983)
- [33] Y.F.Lim and Kan Chen, Dynamics of dry friction:A numerical investigation. *Phys.Rev.E* **58**, 5637. (1998)
- [34] Katsuhiko Sato Analysis of a Stasistical Stick-Slip Model *Progress of Theoretical Physics* **102**, 37. (1999)
- [35] Hisao Hayakawa, Simple model for granular friction. *Phys.Rev.E* **60**,4500 (1999)
- [36] J.M.Carlson and A.A.batista constitutive relation for the friction between surface *Phys.Rev.E* **53**, 4153. (1996)
- [37] 金子 邦彦・津田 一郎 「複雑系のカオス的シナリオ」

- [38] Frederick H. Willeboordse, Kunihiro Kaneko, Pattern dynamics of a coupled map lattice for open flow. *Physica D* **86**, 428. (1995)
- [39] Kunihiro Kaneko, Lyapunov analysis and information flow in Coupled Map Lattice, *Physica D* **23**, 436. (1986)
- [40] K. Fujimoto, K. Kaneko, Noise-induced input dependence in a convectively unstable dynamical systems. *Physica D* **129**, 203. (1999)
藤本 仰一 移流不安定性と揺らぎによって機能するシグナル伝達モデル *物性研究* **70-6**, 773. (1998-9)
- [41] S. AUBRY and P. Y. Le DAERON, The Discrete Frenkel-Kontrova model and its extension. *Physica D* **8**, 381. (1983)
M. Peyard, S. Aubry, Critical behaviour at the transition by breaking of analyticity in the discrete Frenkel-Kontrova model. *J. Phys.* **C16**, 1593. (1983)
- [42] J・E・Gordon 著 石川 廣三 訳 「構造の世界」 丸善
- [43] Edward Ott, Chaos in Dynamical Systems, Cambridge University Press (1993)
- [44] Landau, L.D. and Lifschitz, E.M Theory of Elasticity, Pergamon (1987)(佐藤常三・石橋善弘 訳 「増補新版 弾性理論」, 1989)