群速度やその分散が小さい時の位相方程式

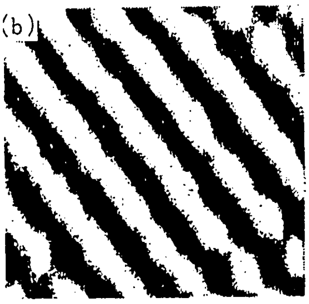
名古屋大学(理)　増冨祐司, 野崎一洋

1　知りたい物理

反応拡散系：

$$\partial_t U = F(U) + D\nabla^2 U. \tag{1.1}$$

に現われる非平衡パターンのダイナミクスを解析したい。ここで F は非線形項。U はある物理量で n 次元ベクトル。例えば化学反応物質濃度など。今回は特に U が二次元系を進行するストライプパターン ($U(kx - \omega t + \phi)$ を成す場合 (下図) において、このパターンの時間発展を解析したい。具体的には位相方程式 [1] を導出し、その方程式を解析する。位相方程式とは解析困難な非線形偏微分方程式である (1.1) を、遅い自由度である位相の自由度を用いて、自由度を縮約し近似した、位相場に対する発展方程式である。位相方程式は元の方程式より数値的に解くことが簡単であり、時には解が得られたりするので系の解析に非常に有用ある。



2　今回やったこと

現在まで位相方程式は数多く提出されているが、進行するストライプパターンに対しては拡散安定な場合、進行方向 (x 方向) に弱不安定な場合 (Eckhaus 不安定)、ストライプの方向 (y 方向) に弱不安定な場合 (Zig-Zag 不安定)、そして進行方向、ストライプの方向、共に弱不安定な場合、各々について位相方程式が導出されている [2],[3]。

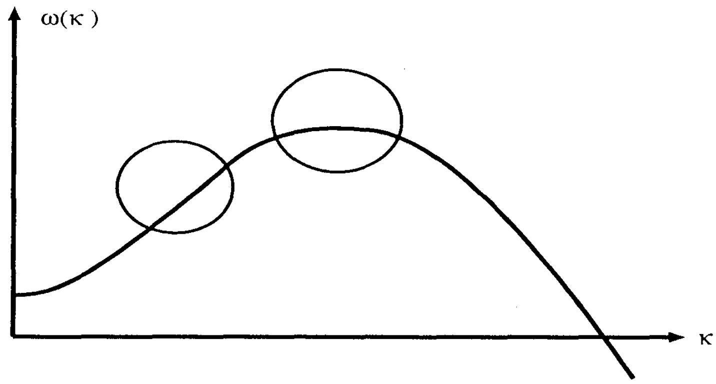
拡散安定な場合を記述する位相方程式は非等方 Burgers 方程式：

$$\phi = D_{\parallel}\phi_{xx} + D_{\perp}\phi_{yy} + N_{\parallel}\phi_x^2 + N_{\perp}\phi_y^2, \tag{2.2}$$

$D_{\parallel} > 0, D_{\perp} > 0$ である。ここで非線形項の係数は

$$N_{\parallel} \sim \ddot{\omega}, \quad N_{\perp} \sim \dot{\omega} \tag{2.3}$$

であることがわかっている。一方、角速度$\omega(k)$は一般に波数kの関数でそれは分散関係であるから、たとえば分散関係が下図のような場合は丸の波数の領域で、



$$N_{\|} \sim \ddot{\omega} \sim O(\epsilon), \quad N_{\perp} \sim \dot{\omega} \sim O(\epsilon) \tag{2.4}$$

となる。これは元々のストライプパターンの群速度の分散や群速度が小さいということに対応している。

単に非線形項の係数が (2.4) となったならば、(2.2) においてその項が消えて終わりであるが、これに弱不安定性が付け加わった時、高次の非線形項が現われておもしろい。現象論的な対称性とスケーリングの議論 [2] により、現われる非線形項を書き下すことも可能であるが、今回は微分方程式に対するくりこみ群の方法 [4],[5] を用いて摂動論的に位相方程式を求めた。実際、その一つを書き下すと例えば$N_{\|} \sim \ddot{\omega} \sim O(\epsilon)$かつ、Eckhaus 不安定 ($D_{\|} \sim -O(\epsilon)$) の時

$$\phi_t = D_{\|}\phi_{xx} + A\phi_{xxx} + N_{\|}\phi_x^2 + N_{\|\|}\phi_x^3 + H\phi_x\phi_{xx} \tag{2.5}$$

を得た (y 方向は無視)。右辺第 4 項と第 5 項が単なる Eckhaus 不安定の場合にはない項である。

得られた方程式の解析はまだまだこれからであるが、現在上記の (2.5) を中心に解析を行っている。

参考文献

[1] 蔵本由紀, 森肇. 散逸構造とカオス, 岩波書店 (2000).

[2] K.Kuramoto,Prog.Theor.Phys.71,1182(1984).

[3] Y.Masutomi,K.Nozaki,Physica D,151,44(2001).

[4] L.Y.Chen,N.Goldenfeld and Y.Oono, Phys.Rev.E54,376(1996).

[5] S.Goto,Y.Masutomi and K.Nozaki,Prog.Theor.Phys.102,471(1999).