線状構造の記述

京都大学 理学部　水口 毅[1]，島 伸一郎[2]

弾性的な性質をもった線状構造が外力によって駆動される場合の動力学的な振舞いに着目し，理論的および数値的な計算を通して解析を行った．その結果，系の振舞が境界条件に強く依存することを示した．また，記述する座標に関する考察を行った．

【モデル】

質点集団に対して，相互作用として適当な形の伸び弾性，曲げ弾性，駆動力および散逸を取り入れ，さらに連続極限と粘性極限をとることによって得られる以下の偏微分方程式をモデルとする．$0 \le s \le 1, 0 \le t$ で定義された実関数 $\theta(s,t)$ および $\lambda(s,t)$ に対して：

$$
\begin{aligned}
(1+\lambda)\dot{\theta} &= -k_b(\theta'''' - \theta''\theta'^2) + k_e(\lambda\theta'' + 2\lambda'\theta') - k_f\theta'' \\
\dot{\lambda} &= k_b(\theta''^2 + 2\theta'''\theta') + k_e(\lambda'' - \lambda\theta'^2) + k_f\theta'^2.
\end{aligned}
$$

ただし，s は駆動力のない「自然な」状態にある線状構造に沿って一様にとった座標であり，$\dot{}$ は t に関する微分を，$'$ は s に関する微分をそれぞれ表す．$\theta(s,t)$ および $\lambda(s,t)$ はそれぞれ空間に固定された x 軸と線状構造の接線とのなす角，自然状態からの伸びを表す[3]．時刻 t における線状構造上の座標 s の点の位置 $\vec{r}(s,t)$ は $\theta(s,t), \lambda(s,t)$ を用いて

$$
\vec{r}(s,t) = \begin{pmatrix} x(s,t) \\ y(s,t) \end{pmatrix} = \vec{r}(0,t) + \int_0^s (1+\lambda(s',t)) \begin{pmatrix} \cos\theta(s',t) \\ \sin\theta(s',t) \end{pmatrix} ds'
$$

と表される．境界条件としては様々なものが考えられるが，本稿では典型的な例として頭部 $(s=0)$ に対して clamped(位置固定，向き固定) もしくは hinged(位置固定，向き自由) の二種類を，また尾部 $(s=1)$ に対しては free（位置自由，向き自由）を考える．それぞれ

$$
\begin{aligned}
\theta &= 0, k_b\theta''' - k_e\lambda\theta' + k_f\theta' = 0, k_b\theta''\theta' + k_e\lambda' = 0 && \text{clamped} \\
\theta' &= 0, k_b\theta''' - k_e\lambda\theta' + k_f\theta' = 0, k_b\theta''\theta' + k_e\lambda' = 0 && \text{hinged} \\
\theta' &= 0, \theta'' = 0, \lambda = 0 && \text{free}
\end{aligned}
$$

と表現される．

【シミュレーション】

簡単のため，コントロールパラメータのうち k_b, k_e を固定し，k_f を変化させ，自明直線解に近い適当な初期条件からシミュレーションを行った．k_f が増大するにつれ，系の

[1] E-mail: mizuguchi@tsuyoshi-inter.net
[2] E-mail: s_shima@ton.scphys.kyoto-u.ac.jp
[3] $\lambda(s,t)$ を導入するかわりに質点間距離が一定であるという拘束条件を用いたモデルの解析も平行して行われた．

振舞は静止状態から分岐を繰り返してダイナミックになっていく．その分岐シナリオは k_b, k_e にもよるが，境界条件にも依存することが数値的に判明した．具体的には，例えば clamped の場合は静止→振動→二重振動…であり，hinged の場合は静止→回転→振動→二重振動…となる．

【安定性解析】

自明直線解 $\theta(s,t) = \lambda(s,t) = 0$ に対して線形化された方程式は $\delta\lambda$ と $\delta\theta$ に対して分離される．そのうち $\delta\lambda$ は拡散方程式に従い不安定性を起こさないようである．一方 $\delta\theta$ の従う線形方程式はいわゆる KS 型

$$\dot{\delta\theta} = -k_b \delta\theta'''' - k_f \delta\theta''$$

になり，これをそれぞれの境界条件の元で解析した．分岐パラメータを $\epsilon \equiv k_f/k_b$ とし，境界条件を正しく考慮すると clamped の場合は $\epsilon_c = 37.69...$ で Hopf 分岐を起こし振動数 $\omega = 191.25...$ で振動しはじめることがわかる．一方，hinged の場合は Goldstone モード $\theta_{GS} = B_0(\mathrm{const.})$ の存在を考慮すると，$\epsilon_h = 20.16...$ で熊手型分岐の固有モードが Goldstone モードと結合して不安定になり，分岐直後では

$$\theta(s,t) = u \cdot t + v \cdot \left(\frac{\epsilon s^2}{2} + \frac{\cos\sqrt{\epsilon}s}{\epsilon^2 \cos\sqrt{\epsilon}} \right)$$

で，形を変えずに一定速度で回転すると予想される．(u, v は $\epsilon - \epsilon_h$ のみの関数.) これらの結果は数値実験のそれと定量的に一致する[4]．

【考察】

座標 s は駆動力のない「自然な」状態での線状構造に沿ってとったいわば"elastic gauge"である．これは系が弾性的な性質をもっているから採用されたのであり，$0 \leq t$ に対して $0 \leq s \leq 1$ という良い性質を持つ．これに対して，曲線の記述に関してより一般性をもっていると思われる kinematic equation

$$\partial_t k + \partial_l k \left(\int_0^l kV dl' + C \right) + k^2 V + \partial_l^2 V = 0$$

(l は弧長，$k(l,t)$ は曲率，$V(k)$ は曲線の速度の法線成分，C は端点の速度の接線成分) による記述を考えるとすると，その座標である弧長 l の最大値 $l_{\max}$ は一般に時間 t に依存することが予想される．(たとえば，一様回転状態では $l_{\max}$=const. だが，振動状態では $l_{\max}$ も対応する周期で振動していることが数値計算によって示されている.) これは，kinematic equation を導出するために用いられる"orthogonal gauge"φ を用いた場合でも同様である．(この場合，一様回転状態であっても（つまり全長が時間によらなくても）$\varphi_{\max}$ は t の単調減少関数になることが予想される.) このように時間によってシステムサイズが変化するような系による記述の可能性について議論した．

[4] 「両端を固定された場合 (例えば hinged-hinged の場合)，振動不安定は起きるか？」という問いに対する答えは，直観的には「否」だが理論的な証明はまだないようである．