“線状構造の動的不安定性 —暴れるホースのモデル—”

京大理　島 伸一郎、水口 毅

線状の構造を持つ物質の示すパターンや運動は、様々な分野において興味深い振舞を示す。例えば、物理化学における鎖状高分子の振舞。流体力学における渦糸の構造やダイナミクス。生物学においては現象はミクロからマクロのスケールにわたり、DNAの振舞、タンパク質の折り畳み、繊毛の脈打ち運動、蛇の運動、などがあげられる。これらは本質的に非平衡現象であり、弾性、外力、散逸といったいくつかの要因がバランスして起こる。そこで、そこには各系の詳細によらない、非平衡系特有の普遍的な法則が見出されるのではないかと期待される。

具体的な系として、流体が流れていて、その吐き出し口が自由端になっているチューブの運動について考える。その身近さからか様々な研究がなされており、流量を大きくしていくと、ある臨界値でそのまっすぐな状態は不安定化し、チューブは左右に振動し出す事が理論的にも実験的にも知られている。しかし、今までの研究で使われて来た理論モデルは、厳密ではあるが微小振幅に対してのみ有効であり、また、その吸い込み口の境界条件もかすがい止めされたものに特化している。そこで我々は、現象論的なアプローチをとることにより、任意の振幅、そして、より一般的な吸い込み口の境界条件について成り立つモデルを作った。

まず、考える系を明らかにする。流体が流れていて、その吐き出し口が自由端になっているチューブを考える。運動は二次元平面内に拘束されていて、重力は働いていないものとする。チューブの長さは一定であるとする。また、チューブを一次元的な物として考え、その太さは運動に影響を与えないとする。チューブに働く力は次の四種類を考える。(1) まっすぐな形からの曲り具合に応じて働く弾性力。(2) 流体の速度は一定とし、チューブ上の各点における流体の運動量の変化が及ぼす横方向の力。(3) チューブの運動に反して働く抵抗力。(4) 長さが不変な事から来る束縛力。また、吸い込み口の典型的な境界条件として次の二種類を考える。(1) かすがい止めした場合。つまり、吸い込み口の位置も方向も固定する。(2) 蝶番止めした場合。つまり、位置のみを固定し、全体が自由に回転できるようにする。

このような系に対し、N 個の切片を弾性的な関節でつないだ離散的モデルを導入し、その発展方程式を導く。最終的に、$N \to \infty$ の連続極限をとることで、連続的発展方程式を非線形微分積分方程式として導く事ができる。これは任意の振幅に対して成り立ち、強く非線形な振舞をも記述できる。かすがい止めと蝶番止めの違いは境界条件の違いと言う形で反映される。

次に、得られたモデルの示す振舞を流量を、コントロールパラメタとして解析する。

発展方程式は、チューブが完全にまっすぐなまま動かないと言う解を、任意の流量に対して持つ。そこで、この自明な解の線形安定性解析を行った。その結果、かすがい止めにしたときは、流量がある臨界値を越えるとHopf分岐をおこし、チューブは左右に振動し出す事が予想される。これは従来の結果と一致する。また、蝶番止めにした時は、流量がある臨界値を越えるとGoldstoneモードを伴った熊手分岐を起こし、チューブは固定された吸い込み口を中心に回転し出すことが予想される。

実際に数値シミュレーションを行うことで、この振舞を確認した。分岐直後の典型的な振舞は図1に示す通りである。

さらに流量を大きくしたときの系の振舞について言及したい。数値シミュレーションによる解析によると、かすがい止めしたチューブは周期倍分岐を次々と起こした後カオスに至るようである。また、蝶番止めしたチューブは二番目の分岐としてにHopf分岐を起こした後、周期倍化して行きカオスに至るようである。

また、我々のモデルは流体を吸い込んだ時のチューブの振舞に対して興味深い示唆を与える。流体から受ける力として、我々は運動量の変化のみを考えている。その結果、吸い込んだときと吐き出したときとでチューブは全く同じ振舞をすることが予想される。

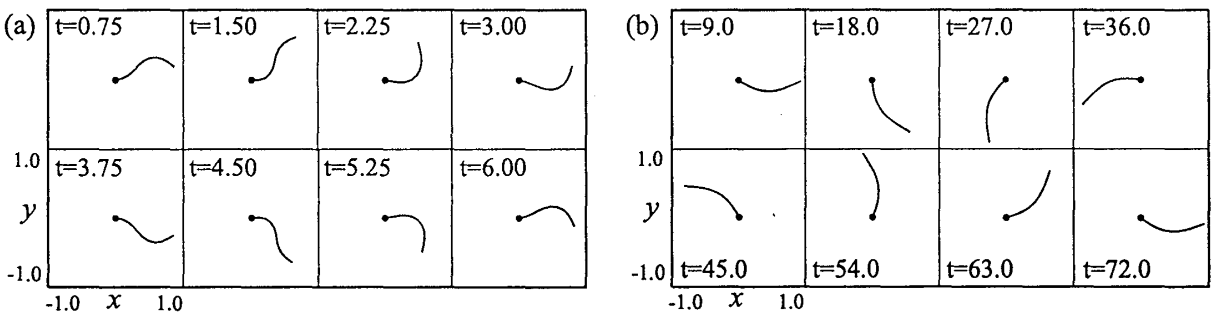

図 1: 臨界を越えたある流量におけるチューブの運動を、各時刻 t におけるスナップショットとして表示した。黒丸は吸い込み口を表す。(a) 吸い込み口の方向を固定したチューブは左右に振動し始める。(b) 吸い込み口の方向を自由にしたチューブは回転し始める。