

## 砂山に inspire された履歴依存の力学系モデル

東京大学 総合文化研究科 石原 秀至<sup>1</sup>

### 1 Introduction

砂山やサイロの中の静粉体の内部応力は、その分布が非一様であることが知られている。静粉体内部においては粒子がそれぞれお互を支えるわけであるが、その「支え方」は均一ではなく、一般にその応力分布が(平均より大きいところでは)指数的に分布している。このことは様々な実験・数値実験を通して結果が得られている。これは静止粉体内部においてアーチ構造が形成され、ストレスチェーンと言われる比較的少数の力を支える(応力が高い)部分ができ、主にこの部分が自重を含め砂山にかかる力を支えることによる。そのため、例えばサイロの中の粉体の圧力は、例えば液体が満たされている場合と異なり、深さに比例するということがない。実際その圧力はある大きさ以上にならず、収束する。その際周囲の壁が粉体の重さを支える。周りに壁がない砂山の場合は、直観的にはその中心部(高さが最もあるところ)で最も高い圧力を示すかのように考えられるが、実験的には中心部ではディップ(dip)と呼ばれる圧力のくぼみができ、中心部から少し離れたところに円環状に最も圧力が高いところが分布することが見出されて来ている。しかしながら最近の実験により、これは必ずしも正しくないことがわかってきた。

[3]の実験では、砂山を積むのに、2種類の積み方を行い、底部の圧力(床が受ける圧力)を比較している。一つは、砂の供給源を一点として積んでいくやり方であり(localized-source procedure)、もう一つは、砂の供給源を広くとっていきやり方(raining procedure)である。このような作り方をして出来た砂山の底の圧力分布を測ると localized-source procedure で作った砂山では(従来言われていたとおり)中心部に dip があつたが、raining procedure では dip は見られなかったのである。使われている粉体は同じであるから、この違いは積み方によって出来たのである。ここで、マクロな操作(ここでは砂の供給の幅の広さでパラメトライズ)でマクロな変化が得られた、ということに注目する。

静止粉体中の応力伝搬は、この例に限らず、様々な実験を通して複雑であることがわかって来ているが、我々の興味の対象は砂の性質そのものではなく、その履歴依存の性質に注目し、静止粉体に基づいた簡単な力学系モデルからそのメカニズムや性質を考察する。

<sup>1</sup>E-mail: shuji@complex.c.u-tokyo.ac.jp

## 2 Model

静止粉体中の応力分布の性質として、(a)「より圧力のかかっている方がより上のものを支える傾向がある」ということ(アーチ構造は壊れにくい[5])、(b)当然静止状態では釣合の条件を満たし、流れは無視する(大きな流れ・位置変化のない部分に注目する)(c)この条件で静止(釣合い)状態へのローカルな緩和を考える。という条件を仮定し、図1の様な格子上のスカラー変数  $x_{ij}$  のダイナミクスとして取り扱う。(このような枠組は Q-model に近い[4]。ここで、各サイトは砂一粒というよりある粗視化したスケールでの変数と考えた方が妥当である。) 即ち、

$$\tau \frac{dx_{i,j}^t}{dt} = -x_{i,j}^t + \beta_{ij} + x_{i,j-1}^t \frac{(x_{i,j}^t)^\alpha}{(x_{i,j}^t)^\alpha + (x_{i-1,j}^t)^\alpha} + x_{i,j-1}^t \frac{(x_{i,j}^t)^\alpha}{(x_{i,j}^t)^\alpha + (x_{i+1,j}^t)^\alpha} \quad (1)$$

という式が成り立つ。ここで  $x_{ij}$  は site( $i, j$ ) での応力、 $\tau$  は緩和の time scale、 $\beta_{ij}$  は site( $i, j$ ) の自重であるが、簡単の為 site によらず  $\beta_{ij} = 1$  (or 0) とした。 $\alpha$  は仮定(a)の度合のパラメーターで、上方の site の重さ  $x_{i,j-1}$  がその下の  $x_{i-1,j}, x_{i,j} \propto \alpha$  乗の比をとって  $((x_{i-1,j})^\alpha : (x_{i,j})^\alpha)$  で支えられるとする。この式は  $j$  方向へと向かっての一方方向結合である事に注意。(以後  $\vec{x}_j = (x_{1,j}, x_{2,j}, \dots)$ ) この系は必ず固定点に落ち、その状態(静止状態)ではローカルな釣合方程式である

$$x_{i,j} = \beta + x_{i,j-1} \frac{(x_{i,j})^\alpha}{(x_{i,j})^\alpha + (x_{i-1,j})^\alpha} + x_{i,j-1} \frac{(x_{i,j})^\alpha}{(x_{i,j})^\alpha + (x_{i+1,j})^\alpha} \quad (2)$$

が成立し、ここで重要なことは  $\vec{x}_{j-1}$  の元に適当な  $\alpha$  の範囲で  $\vec{x}_j$  が(安定な)多重解を持つ、即ち釣合いの位置が一意的には決まらないことである。

以後この系を考える。実際には(1)式を  $\Delta t = 1$  の Euler 法にあたる CML を計算した。こうしても系の持つ基本的性質は変わらない。

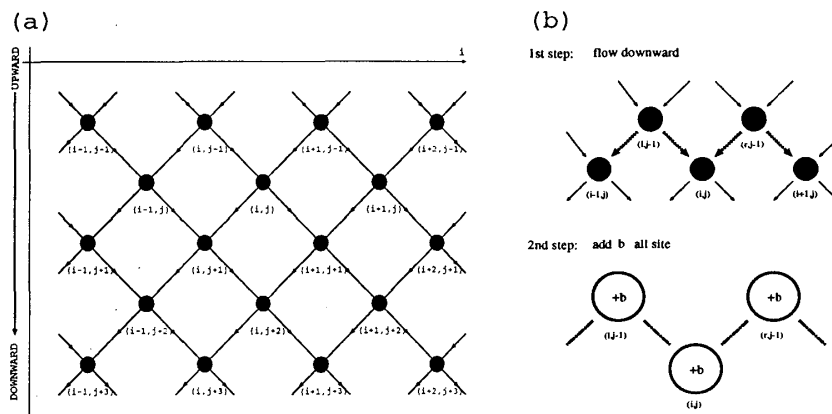


図 1: (a) 格子の形。  $j$  の方向への一方方向結合である。(b) 時間発展の手続き

### 3 現象

#### 3.1 砂山

系がどのような振舞を示すかを見る。 $\alpha = 1.3$ で行う。[3]にしたがって「砂山を積む」ことを試みる。ここで「積む」とは、(イ)積まれていない site に対しては  $\beta = 0$  (口) 下方の 2 つの site のうち、一つでもまだ積まれていなかったらそこには積まれず、条件が満たされるまで下方へと落ちて(流れて)行く。(ハ)積まれた site は  $\beta = 1$  の値を持つ。また、積んだ瞬間については衝撃の強さとして正の摂動を加える。

全ての site が  $x_{ij} = 0$  の状態から始め、最終的な砂山の形になるまで周期的に「砂を積んで」いった。各 step 毎に砂を降らせ、その場所、横方向  $i$  番目の格子点に降ってくる確率が標準偏差  $W \times N/2$  のガウス分布に従うようにした。(a) $W = 0.1$  と (b) $W = 10.0$  で行い、前者はほぼ相似形を保ったまま、後者は上部が比較的平らなまま成長しそれぞれ (a)localized-source procedure と (b)raining procedure に対応する。図 2 が結果である。見て分かるように (a) では  $x_{ij}$  の通る道筋が斜めに形成され、結果として底面では中心部では圧力が小さい dip が形成される。また、その道筋は上部ではほぼ垂直であり、下部になるほど傾きが大きくなる。一方 (b) では底面部で dip を作らず、内部は比較的乱れている。図には示さないが、その分散は dip 部分で大きい。

図 3(a) では底面の圧力分布を plot したものを示す。この図は  $N=128$  のシステムに対し、 $W=0.1$  と  $W=10.0$  で 100sample とってそれを平均したものである。たしかに  $W=0.1$  では dip が見られる。また、システムサイズに関する依存性を調べた。 $N=128$  の山と  $N=256$  の山を調べ、それぞれ 100sample とりその平均で比較する。 $N=256$  のシステムについてシステムサイズと  $x_{ij}$  を半分にしたものを表示した。その結果図 3(b) のようにほぼ一致した。したがってシステムサイズに関しては適当にスケールアップ出来ることを示している。これは実験結果 [3] と一致するものである。

#### 3.2 形成の時間スケール

系の形成時の時間スケールによる違いについて調べる為、再び「積む」ということを行う。ここでは  $\alpha = 1.2$  とし、横の条件を周期条件にした  $N \times M$  のシステムを用意し、下の層から順に積んでいく ( $M = 120$ )。  $\tau$  step 毎に周期的に最下段から 1 層ずつ  $\beta$  を与え

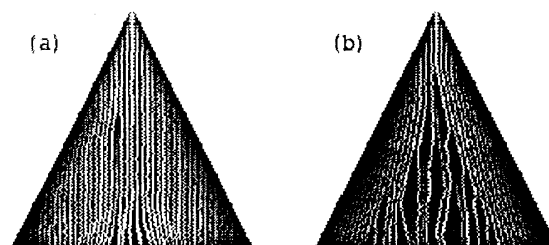


図 2: (a)localized-source procedure( $W = 0.1$ ) (b)raining procedure( $W = 10.0$ ) で形成した砂山の内部圧力分布。白い所が  $x_{ij}$  が大きい所。 $\alpha = 1.3$ ,

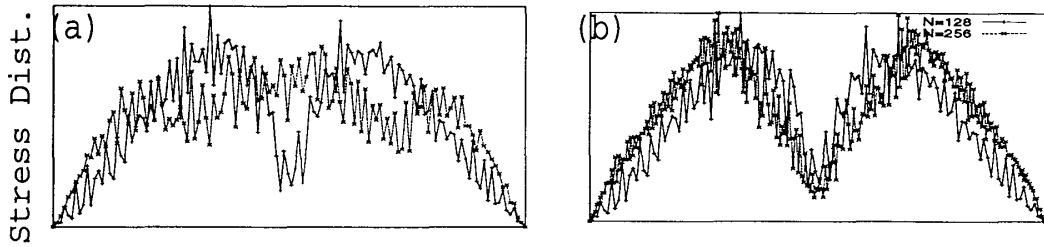


図 3: (a)localized-source procedure,raining procedure それぞれの底圧分布 (100sample average) (b) $N=128$  と  $N=256$  の結果をスケールしたもの。  $\alpha = 1.3$

る。この際、積んだ層に対して摂動を加える。(fluctuationは0から0.1の一様乱数から選んだ。)最上層まで積んで、固定点に落ちるまで待つ。図4(a)参照のこと。いろいろ $\tau$ を変えていった時、固定点で最下段( $j = 199$ )での  $x_{ij} > \bar{x}_j (\equiv \sum_i x_{ij}/N)$  である  $x_{ij}$  の数の比  $\langle N_o/N \rangle$  ( $\langle \rangle$ は500sample平均)と、root mean square  $RMS_j \equiv \langle \sqrt{(x_{ij} - \bar{x}_j)^2} \rangle$  をを 図4(b)に示した。もともと乱れの大きな系であるので error bar は大きいですが、十分大きな  $N$  に対して平均値の振舞いは収束していると言える。この図で、積み上げの速さに対して系の最終状態が変わってくる、即ち形成の time scale が状態に記憶されているといえる。 $\tau \sim 100$  を境に増減が逆転しているが、その後の変化は緩やかであり、また、十分大きい  $\tau$  では変化は小さいと期待できる。このような振舞いは系全体の緩和の time scale と形成の速さの兼ね合いによると考えられる。

#### 4 力学系としての性質

前節で見られた現象は  $\alpha > 1.0$  で見らる。ここで  $\alpha$  を動かした時何が起こるか見てみる。以後  $N \times M$  からなる周期条件の格子上で考える。(I) $\alpha 0 \sim 0.7$  では  $x_{ij}$  が  $i$  によらず同じ値 ( $j+1$ ) になり、一様状態だけが安定固定点である。(II) $\alpha 0.7 \sim 1.0$  では上流で一様、下流で  $x_{ij}$  の大小の zig-zag like パターン (2周期というわけではない) ができ、安定固定点は一つではない。上流に摂動を入れた時、その摂動が成長して (convective instability,CU) 下流

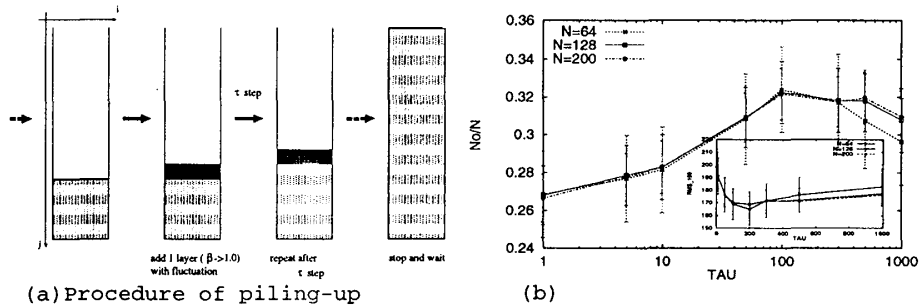


図 4: (a) 時間周期を変えて一段づつ積んでいく。(b) $N = 64, 128, 200$  についての  $\tau$  に対する  $\langle N_o/N \rangle$  と  $RMS_j$ (inset)。  $\alpha = 1.3$

の状態を壊す(以下の議論を含め[6]を参照)。このため情報を保持できない。(III) $\alpha$  1.0 ~ では系は乱れた状態をとり、ここで(マクロな意味で)履歴性を示す。(II)(III)の違いは緩和仮定にも現われ(図5)II相では緩和が全体的に速やかに起こるのに対し、III相では急激な変化(localな固定点変わる)がintermittentに起こり、またそれが下方へと伝搬する。

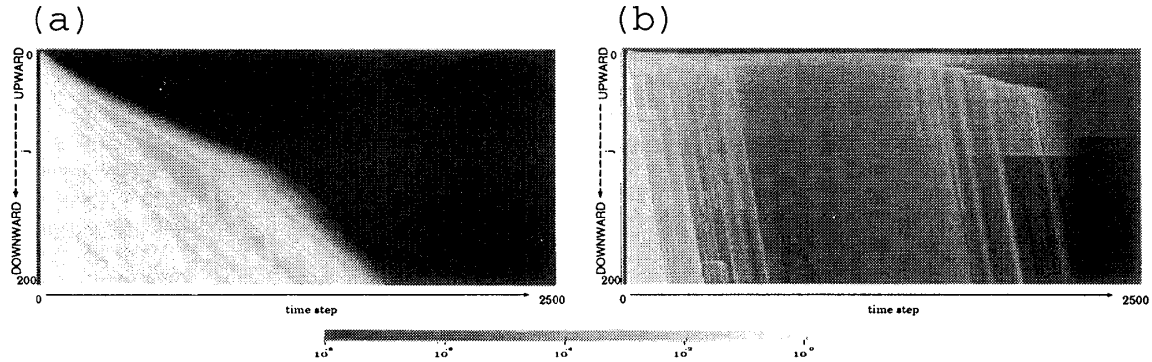


図 5: (a) $\alpha = 0.9$ (b) $\alpha = 1.3$ での緩和の仕方。変化は各層の 5step 毎の時間変化の絶対値の和  $\sum_i |x_{i,j}^t - x_{i,j}^{t-5}|$  を  $N(j+1)$  で割って、log の grey scale で表示したもの。(b)では時間・空間的に intermittent に大きな変化がおこる。

式(2)から、 $\bar{x}_j$ は $\bar{x}_{j-1}$ に(陰的に)依存している。この関係を $\bar{x}_j = \bar{f}(\bar{x}_{j-1}, \bar{x}_j)$ とすると、各層での固定点の一次関係式 $\delta \bar{x}_j = (E - (\partial \bar{f} / \partial \bar{x}_j))^{-1} (\partial \bar{f} / \partial \bar{x}_{j-1}) \delta \bar{x}_{j-1}$ が成り立ち( $E$ は $N$ 次元単位行列)、これは上流での摂動(例えば $\beta_{ij}$ の変化)が下流域の釣合いの位置に及ぼす影響を見積もるもので、II相(CU)・III相共に(下流での $x_{ij}$ の増加を考慮に入れて規格化したものでも)固有値1以上の値を持つ。(即ちIII相も上流の摂動に大きな影響を受ける。)II相III相の違いをこの量に関連した何らかの量(eigen vector等)で測りたいのだが、ここでは、III相において、静止状態から最上層 $\bar{x}_0$ (initially 1)に対して $\vec{\beta}_0 \rightarrow \vec{\beta}_0 + \delta \vec{\beta}_0$ という(パルスではない)摂動を与えることを試みる。再び静止状態に達した時と前の状態比べ、この結果図6(b)の白い部分が摂動の前後で変化した。(a) $x_{ij}$ と比較すると値の大きい $x_{ij}$ のsiteが変化が激しいことがわかる。このことから上に与えられた摂動は

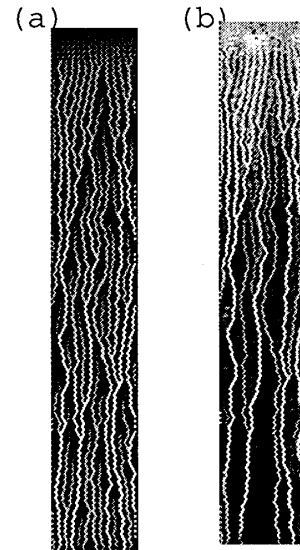


図 6 :  $N = 32, \alpha = 1.3$ での (a) $x_{i,j}$  (b)摂動を与えた前後の変化 白い所が(a)では $x_{ij}$ が、(b)では変化(の絶対値)が大きい所。

III相では大きな変化を与えても少数の自由度 $x_{ij}$ だけに限られII相のように下流全てに大きな影響を及ぼす(その結果情報を破壊する)ということがない。実際、Spatially Chaos(SC, 上の空間関係式で最大固有値が1以上である状態)とCUは関連深いが[6]、SCであるIII相はCUではない。このことは最上層に前と同様に $\vec{\beta}_0 \rightarrow \vec{\beta}_0 + \delta \vec{\beta}_0$ ( $|\delta \beta_0| \ll |\beta_0|$ )とした時、今度は固定するのではなく、パルスとした時(即ち $\delta \vec{\beta}_0 \cdot \delta t_{t_0}$ )には元の固定点に

戻るのである。逆に小さな  $\delta\vec{\beta}_0$  でも長時間摂動を入れ続けていると、系はもとの固定点から外れてしまうことがわかった。図7は、 $32 \times 200, \alpha = 1.2$  のシステムで、(同一)固定点から最上層に一様摂動を  $\tau\text{step}$  入れたあと(即ち  $\vec{\beta}_0(t) = 1 + \delta\vec{\beta}_0 \cdot \theta(0, \tau), \theta(0, \tau)$  は0から  $\tau\text{step}$  まで1、それ以外は0の関数、 $\delta\beta_{0i}$  は  $[-n, n]$  の一様乱数から選んだ)もう一度静止状態になった時、もとの固定点とどれくらい離れたかを示すものである(最下層  $j = 199$  でユークリッド距離を測った)。ノイズの強さのみならず、摂動を入れる時間によって状態の遷移が変化してくることがわかる。粉体で考えると、弱い力でもかけ続けると変化し得るということである。

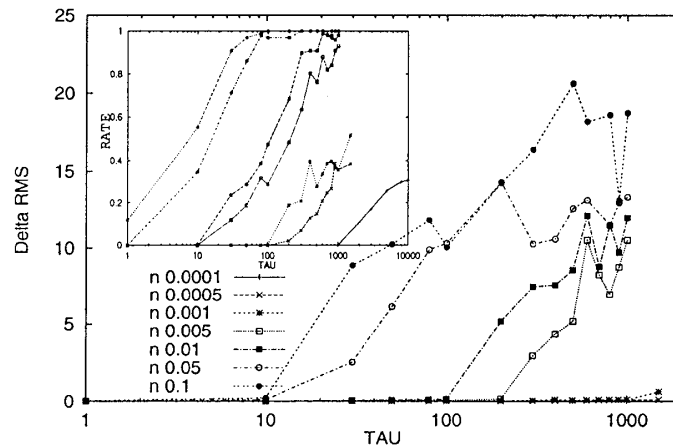


図7:  $\tau\text{step}$  摂動を加え続けた時の  $j = 199$  での固定点変化の大きさ  $\Delta RMS = \sqrt{(\Delta x_{ij} - \overline{\Delta x_{ij}})^2}$  ( $\Delta x_{ij} = x_{ij}^i - x_{ij}^f$ )。中身は、単純にもとの固定点に戻っていない確率 (by 500sample trial)。  $32 \times 200, \alpha = 1.2$

以上に見て来た現象を通して力学系の理解・アプローチを推しすすめること、簡単なモデル化ではあるが、力学系として、また、粉体系として意味のあることが見出せる事を期待している。

## 参考文献

- [1] Heinrich M. Jaeger and Sidney R. Nagel Granular, *Rev. Mod. Phys.* **68**, 1259. (1996)
- [2] 早川 尚男・那須野 悟 粉体の物理 現代物理最前線 1 共立出版 (2000)
- [3] Loic Vanel, Daniel Howell, D. Clark, R.P. Behringer and Eric Clément, *Phys. Rev. E* **60**, R5040. (1999)
- [4] S.N. CopperSmith, C.-h. Liu, S. majumdar, O. Narayan, and T.A. Witten, *Phys. Rev. E* **53**, 4673. (1996)
- [5] J・E・Gordon 著 石川 廣三 訳 「構造の世界」 丸善
- [6] Frederick H. Willeboordse, Kunihiro Kaneko, *Physica D* **86**, 428. (1995)