

## 極性流体としての粉体斜面流

九州大学 理学府

京都大学 人間・環境学研究科

九州大学 理学研究院

御手洗 菜美子<sup>1</sup>

早川 尚男

中西 秀

本論文では、希薄な粉体流の連続体モデルによる記述を試みる。粉体流の特徴の一つとして、粒子の大きさが巨視的な流動のスケールと比較して無視できないため、粒子の回転が速度場に影響を及ぼすという点が挙げられる。この特徴を連続体モデルに取り入れるため、流体の構成要素の回転の自由度を、角速度場及び偶応力テンソルと非対称な応力テンソルによって考慮した、極性流体モデルを採用する。角運動量の輸送係数、及び回転と並進の自由度間の運動量の輸送係数を、初等輸送論を用いて見積り、一様な斜面流の速度及び角速度プロファイルを計算する。これらの結果は数値実験で得られたプロファイルをよく再現することを示す。

### 1 極性流体と粉体流

粉体系は、巨視的な大きさを持った粒子の集団であり、その相互作用は散逸的である。粉体流の巨視的な挙動を記述する理論を構成しようとする試みは古くから行われているが、まだそのような枠組みは確立されていない。粉体系の解析的な取り扱いを困難にしている要因の一つとして、粒子の大きさが巨視的な流動の長さのスケールと比較して無視できず、スケールの分離が困難であることが挙げられる。

このような構成要素が内部自由度を持つ流体を記述する枠組みとして、極性流体 [1] がある。極性流体モデルは、構成要素の回転を独立変数として取り扱い、その速度場との結合を考慮したモデルであり、粉体系を記述するのに適した流体力学的枠組みといえる。本論文では、この極性流体モデルを希薄な粉体流に適用し、方程式に現れる粘性係数を初等輸送論に基づいて評価する。また、このモデルが、希薄な粉体斜面流の数値実験で得られた一様定常流の性質をよく再現することを示す。

### 2 極性流体の方程式

極性流体モデルを構成する方程式は、通常の流体力学と同様に各保存則から得られる [1]。質量  $m$ 、慣性モーメント  $I$  の粒子から構成される系では、粒子数密度を  $n$ 、速度場を  $\mathbf{v}$ 、角速度場を  $\mathbf{w}$  として、質量保存則、運動量保存則、角運動量保存則より、それぞれ

$$D_t n = -n \partial_i v_i, \quad (1)$$

$$m n D_t v_i = f_i + \partial_j S_{ji}, \quad (2)$$

$$I n D_t w_i = \partial_j C_{ji} + s_i^{(a)} \quad (3)$$

<sup>1</sup>E-mail: namiko@stat.phys.kyushu-u.ac.jp

が得られる。ここで、ラグランジュ微分  $D_t = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$  を用い、添え字にはアインシュタインの規約を用いた。  $S$ ,  $C$  はそれぞれ応力及び偶応力テンソルであり、  $\mathbf{f}$  は体積力を表す。  $s^{(a)}$  は、応力テンソルの非対称部分により生み出されるトルクで、

$$s_i^{(a)} = \epsilon_{ijk} S_{jk} \quad (4)$$

である。ここで、  $\epsilon_{ijk}$  はエディントンのイプシロン（完全反対称テンソル）である。

これらの表式を実際に用いるためには、応力テンソルと偶応力テンソルの構成方程式が必要である。本研究では、速度及び角速度の勾配の1次の項までで構成した等方テンソルを採用する [1]。すると、応力テンソル  $S$  及び偶応力テンソル  $C$  は、以下の式で表される。

$$S_{ij} = (-p + \lambda \partial_k v_k) \delta_{ij} + \mu (\partial_i v_j + \partial_j v_i) + \mu_r [(\partial_i v_j - \partial_j v_i) - 2\epsilon_{ijk} w_k], \quad (5)$$

$$C_{ij} = c_0 \partial_k w_k \delta_{ij} + \frac{\mu_B + \mu_A}{2} (\partial_i w_j + \partial_j w_i) + \frac{\mu_B - \mu_A}{2} (\partial_i w_j - \partial_j w_i). \quad (6)$$

この構成方程式は、ナビエーストークス方程式で記述されるニュートン流体の自然な拡張で、  $\mu_r = 0$  のとき (5) 式はニュートン流体の応力テンソルを回復する。(5) 式、(4) 式より、

$$s^{(a)} = 2\mu_r (\text{rot} \mathbf{v} - 2\mathbf{w}) \quad (7)$$

となり、角速度場  $\mathbf{w}$  が、速度場の回転  $\frac{1}{2} \text{rot} \mathbf{v}$  に一致するように緩和していくことがわかる。

### 3 極性流体としての希薄な粉体流

#### 3.1 初等輸送論による輸送係数の見積もり

(5) 式、(6) 式には、複数の輸送係数が現れている。この節では、これらの係数のうち、一様定常流を考えるとときに現れるものを、初等輸送論を用いて見積もる。なお、本論文では2次元系を取り扱うが、3次元系への拡張は容易である。

2次元円板が平面内を1方向に流れている系の定常状態を考える。速度を  $\mathbf{v} = (u(y), 0)$ 、角速度を  $\mathbf{w} = \omega(y)$  とすると、構成方程式 (5)、(6) より、

$$S_{yx} = \mu u'(y) + \mu_r (u'(y) + 2\omega(y)), \quad (8)$$

$$C_{yz} = \mu_B \omega'(y) \quad (9)$$

が得られる。  $S_{yx}$  は  $y = \text{const.}$  の平面が単位時間単位面積当たりにかかる  $x$  方向の力、  $C_{yz}$  は  $y = \text{const.}$  の平面が単位時間単位面積当たりにかかる  $z$  方向のトルクを表している。以下で、  $\mu$ ,  $\mu_r$ ,  $\mu_B$  を初等輸送論を用いて評価する。

#### 3.2 $\mu$ の見積もり

$\mu$  はニュートン流体の動粘性係数に対応し、その導出は [2] などの統計力学の教科書にあるが、後の議論のためにここで簡単にまとめておく。

$y = Y = \text{const.}$  の平面を横切る粒子による、単位時間単位面積あたりの運動量輸送を考える。粒子の平均自由行程を  $l$ 、数密度を  $n$ 、質量を  $m$ 、 $y$  方向の平均の速さ（速度揺らぎの幅）を  $\bar{v}$  とすると、単位時間あたりに  $y > Y$  から  $y < Y$  へ平面を横切る粒子と  $y > Y$  から  $y < Y$  へ平面を横切る粒子による運動量輸送の差より、

$$S_{yx} \sim n\bar{v}m [u(Y+l) - u(Y-l)] \sim n\bar{v}mlu'(Y) \quad (10)$$

が得られる。これを (8) 式の第一項と比較すれば、

$$\mu \sim n\bar{v}ml \quad (11)$$

と評価できる。2次元では、粒子直径を  $d$  とし、 $l \sim 1/(nd)$  なので、次式が得られる。

$$\mu \sim \bar{v}m/d. \quad (12)$$

### 3.3 $\mu_B$ の見積もり

$\mu_B$  の項は、 $y = Y$  の平面を横切る粒子による、単位時間単位面積あたりの角運動量輸送に起因し、§3.2 の質量  $m$  を慣性モーメント  $I$  に、速度  $u(y)$  を角速度  $\omega(y)$  に置き換えれば、 $\mu$  と同様の手順で評価できる。その結果、

$$C_{yz} \sim n\bar{v}I [\omega(Y+l) - \omega(Y-l)] \sim n\bar{v}Il\omega'(Y) \quad (13)$$

が得られ、(9) 式と比較すれば

$$\mu_B \sim n\bar{v}Il \quad (14)$$

と評価できる。粒子が2次元円板の場合、 $I = md^2/8$  であるから、結局次式が得られる。

$$\mu_B \sim n\bar{v}ml \cdot d^2 \sim \bar{v}md. \quad (15)$$

### 3.4 $\mu_r$ の見積もり

$\mu_r$  の項は、回転の自由度と並進の自由度の間の運動量の輸送係数であり、これは粒子間衝突に起因する。表面が粗く、衝突時に接線方向にも力が働くような粒子間の、境界面  $y = Y$  の近傍での衝突を考えよう。上側の粒子と下側の粒子の接触点の速度差  $\Delta V$  は、

$$\begin{aligned} \Delta V &= \left[ u\left(Y + \frac{d}{2}\right) + \frac{d}{2}\omega\left(Y + \frac{d}{2}\right) \right] - \left[ u\left(Y - \frac{d}{2}\right) - \frac{d}{2}\omega\left(Y - \frac{d}{2}\right) \right] \\ &\sim \frac{d}{2} [u'(Y) + 2\omega] \end{aligned} \quad (16)$$

である。衝突一回当りの接線方向の運動量輸送  $\Delta p$  は、接触点の速度差に比例すると考えられ、 $\Delta p \sim m\Delta V$  が得られる。一方  $y = Y$  近傍の幅  $d$  の間で単位時間、単位長さあたりに衝突が起こる頻度は  $n^2\bar{v}d^2$  と評価できるので、この過程による  $y = Y$  の平面を通した運動量輸送は

$$S_{yx} \sim n^2\bar{v}md^3(u'(Y) + 2\omega(Y)) \quad (17)$$

となる。(8)式の第2項と比較すれば次式が得られる。<sup>2</sup>

$$\mu_r \sim n^2 \bar{v} m d^3. \quad (18)$$

### 3.5 粘性係数の比

これらの結果から、

$$\frac{\mu_B}{\mu} \sim d^2, \quad \frac{\mu_r}{\mu} \sim (nd^2)^2, \quad (19)$$

と評価できる。(3)式、(6)式、(7)式を見てもわかる通り、 $\mu_B$ は $\mu$ 、 $\mu_r$ と次元が長さの自乗だけ異なることに注意が必要である。従って、他の粘性係数と比較して $\mu_B$ の大きさを評価するには、巨視的な流動のスケール $L$ を導入して無次元化する必要がある、ここで述べた一般論の範囲では評価できない。ただ、 $\mu$ 及び $\mu_B$ の導出で特徴的な長さとなっている平均自由行程 $l$ を用いて無次元化すれば $(\mu_B/l^2)/\mu \sim (d/l)^2$ となり、分子気体のように $d/l \ll 1$ 、 $l \ll L$ の場合には $\mu_B$ が十分小さいといえよう。一方で、粒子の大きさ程度の面積あたりの粒子数が無視できない場合は、 $\mu_r$ が $\mu$ と比べて無視できなくなり、個々の粒子の回転が速度場に及ぼす影響が大きくなる。

### 3.6 斜面上の一様流

最後に具体例として、極性流体モデルを用いて2次元系での斜面上の一様定常流の速度、角速度プロファイルを計算し、それが数値実験の結果をよく再現することを確かめる。

2次元系での斜面上の粉体流を考え、斜面に沿った方向に $x$ 軸、斜面に垂直上向きに $y$ 軸をとる。一様定常流、すなわち $n = n(y)$ 、 $\mathbf{v} = (u(y), 0)$ 、 $\omega = \omega(y)$ を考えると、連続の式(1)は恒等式となり、 $x$ 、 $y$ 方向の運動方程式と、角速度の方程式として、以下の3つの式が得られる：

$$\rho g \sin \theta + \partial_y [(\mu + \mu_r) \partial_y u + 2\mu_r \omega] = 0, \quad (20)$$

$$-\rho g \cos \theta - \partial_y p = 0, \quad (21)$$

$$-2\mu_r (\partial_y u + 2\omega) + \partial_y [\mu_B \partial_y \omega] = 0. \quad (22)$$

ここで、 $\rho = \rho(y) = mn(y)$ とした。理想気体の状態方程式

$$p = nT \quad (23)$$

を採用し、さらに温度一定の仮定 $T = \bar{T} = \text{const.}$ をおくと、(21)式から密度のプロファイルとして次式が得られる。

$$\rho(y) = \rho_0 \exp(-y/h), \quad h = \bar{T}/(mg \cos \theta). \quad (24)$$

<sup>2</sup>文中にも述べたが、球または円を考える場合、 $\mu_r$ は、粒子表面の粗さの効果などで接線方向の運動量が輸送されない限りあらわれない。この効果を、接線方向の反発係数 $\beta$ を $\mathbf{n} \times \mathbf{V}' = -\beta(\mathbf{n} \times \mathbf{V})$  ( $\mathbf{n}$ は動径方向の単位ベクトル、 $\mathbf{V}'$ は衝突前(後)の接触点の相対速度)と導入して表現すれば、省略された係数の中に $(1+\beta)$ に比例する項があらわれるであろう。ここで、 $\beta = -1$ が、粒子表面がなめらかな極限を表している。

巨視的な流動を特徴付ける長さスケール  $L$  は、この密度の緩和長  $h$  程度であると考えられる。(24) 式と (19) 式を用いると、定数  $\alpha$ ,  $\beta$  を用いて

$$\frac{\mu_r}{\mu} = \alpha \exp(-2y/h), \quad \frac{\mu_B}{\mu} = \beta d^2, \quad (25)$$

と表すことができる。(25) と  $\mu$  が定数であることを用いれば、(20) 式, (22) 式より

$$\tilde{u}(Y) = -e^{-Y} - \frac{\beta \epsilon^2}{2} \frac{d\tilde{\omega}(Y)}{dY} + C_0 \quad (26)$$

ここで、 $Y \equiv y/h$ ,  $\epsilon \equiv d/h$ ,  $\tilde{u}(y) = u(y)/(\rho_0 g h^2 \sin \theta / \mu)$ ,  $\tilde{\omega}(y) = \omega(y)/(\rho_0 g h \sin \theta / \mu)$  とし、また無限遠 ( $y \rightarrow \infty$ ) では境界条件  $S_{yx} = 0$  を課した。 $C_0$  は積分定数である。また、 $\tilde{\omega}(Y)$  については

$$\frac{d^2 \tilde{\omega}(Y)}{dY^2} - 2 \frac{\alpha \exp(-2Y)}{\beta \epsilon^2} \left[ \frac{\exp(-Y) + 2\tilde{\omega}(Y)}{1 + \alpha \exp(-2Y)} \right] = 0, \quad (27)$$

が得られ、その解は積分定数  $A$ ,  $B$  を用いて

$$\tilde{\omega}(Y) = A\tilde{\omega}_1(Y) + B\tilde{\omega}_2(Y) + \tilde{\omega}_p(Y), \quad (28)$$

と表される。ここで、 $\eta = \exp(-Y)$  とすると、 $\tilde{\omega}_1$ ,  $\tilde{\omega}_2$ ,  $\tilde{\omega}_p$  は無限級数を用いて以下のよう  
に与えられる:

$$\tilde{\omega}_1 = \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k} \eta^{2k}, \quad b_0 = 1, \quad b_{2k} = \left[ \frac{4}{\beta \epsilon^2} - (2k-2)^2 \right] \frac{\alpha b_{2k-2}}{(2k)^2}. \quad (29)$$

$$\tilde{\omega}_2 = \omega_1(\eta) \log \eta + \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k} \eta^{2k}, \quad c_0 = 0, \\ c_{2k} = \left[ \frac{4}{\beta \epsilon^2} - (2k-2)^2 \right] \frac{\alpha c_{2k-2}}{(2k)^2} - \frac{2\alpha}{(2k)^3} \left[ \frac{4}{\beta \epsilon^2} + 4(k-1) \right] b_{2k-2}. \quad (30)$$

$$\tilde{\omega}_p = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k+1} \eta^{2k+1}, \quad a_3 = \frac{2\alpha}{9\beta \epsilon^2}, \quad a_{2k+1} = \left[ \frac{4}{\beta \epsilon^2} - (2k-1)^2 \right] \frac{\alpha a_{2k-1}}{(2k+1)^2}. \quad (31)$$

これらの結果を、離散要素法を用いた数値実験 [3] の結果にフィッティングしたものが図 1 に示してある。まず図 1(a) を見ると、理想気体の状態方程式と温度一定の仮定によって得られた密度のプロファイルがよく数値実験を再現している。プロファイル (24) 式にフィットすると、 $h \sim 2.24$  より  $\bar{T} \sim 2.0$  という評価ができる。図 1(b) と比較すると、これは密度が高い床付近の温度と同程度であり、仮定が妥当であることがわかる。

密度プロファイルから得られた  $h$  の値を用い、境界条件として  $u(0)$ ,  $\omega(0)$  に数値実験で得られた値を代入し、 $\alpha, \beta, \mu/\rho_0, \partial_y \omega(0)$  をフィッティングパラメータとして、角速度及び速度プロファイル (28) 式, (26) 式を数値実験結果にフィットしたのが図 1(c), (d) であり、よい一致を示している。この時の各パラメータの値はそれぞれ  $\mu/\rho_0 \sim 0.95$ ,  $\alpha \sim 0.10$ ,  $\beta \sim 0.12$ ,  $\omega'(0) \sim 2.9$  である。初等輸送論の見積もりと数密度の値によれば  $\alpha \sim (n_0 d)^2 \sim 0.1$ ,  $\beta \sim 1/8$  であるので、パラメータのオーダーも見積もりと矛盾がないことがわかる。また、図 1(e) を見ると、特に境界付近で個々の粒子の回転が励起され、速度場の回転とのずれが

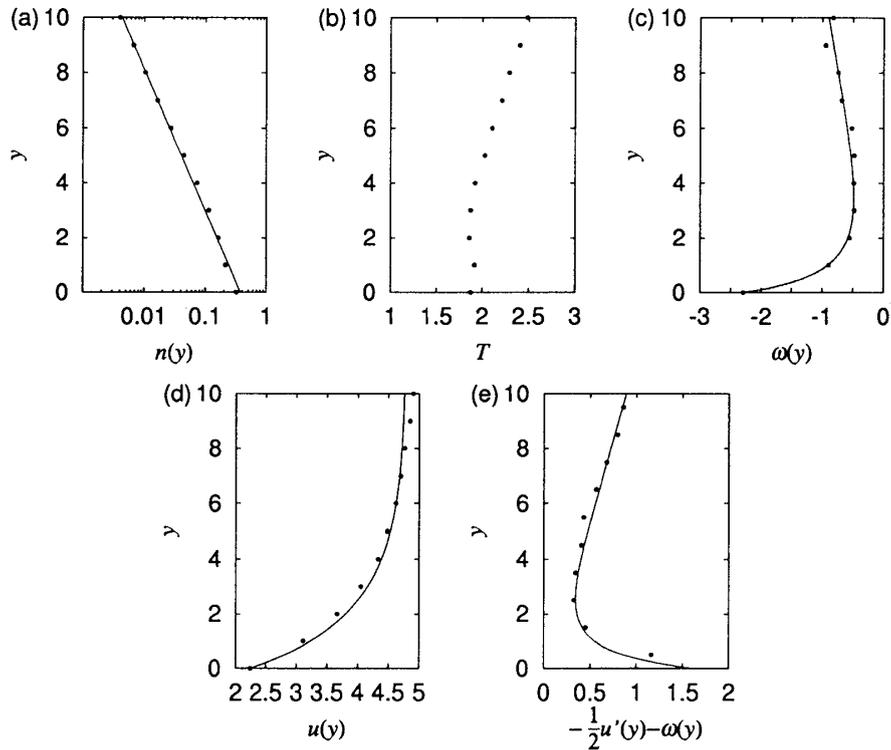


図 1: シミュレーションから得られた (a) 数密度  $n(y)$ , (b) 温度  $T(y)$ , (c) 角速度場  $\omega(y)$ , (d) 速度場  $u(y)$ , (e) 速度場の回転と角速度の差  $\frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{v} - \omega$ , のプロファイル. 黒丸はシミュレーションデータからえられたものであり, 実線は極性流体モデルの解をフィットした結果である. (c), (d), (e) の実線は方程式の数値解で, (c), (d) の破線は級数解 (29), (30), (31) を  $k = 5$  までの和で近似して得られた曲線 (実線とほとんど区別できない).

大きくなっている. モデルはこのずれもよく再現している. 遠方 ( $y \rightarrow \infty$ ) で再びずれが大きくなる傾向が見られるが, これは, 数密度が低いために, 衝突によって引き起こされた個々の粒子の回転が, 平均値  $\omega$  に大きく寄与することに因ると思われる.

#### 4 結論

希薄な粉体流を記述するモデルとして極性流体方程式を採用し, 方程式に現れる粘性係数を初等輸送論を用いて見積もった. この方程式を用いて, 斜面流の一様定常解の速度及び角速度プロファイルを計算した. その結果は, 離散要素法を用いた数値実験の結果をよく再現した. 極性流体モデルの適用範囲を明らかにするのは今後の課題である.

#### 参考文献

- [1] G. Lukaszewicz, *Micropolar Fluids: Theory and Applications*, (Birkhauser, Boston, 1999).
- [2] F. Reif, *Berkeley physics course vol.5, Statistical Physics*, (McGraw-Hill, New York, 1965).
- [3] N. Mitarai and H. Nakanishi, cond-mat/0104571.