

# 混合戦略の導入による新しいアトラクターの出現<sup>1</sup>

東京大学大学院 新領域創成科学研究科 複雑理工学 橋本 康<sup>2</sup>

戦略として混合戦略を含めたゲームダイナミクスを研究した。純粋戦略からなる系に混合戦略を導入することによって、ある条件の下では新しいアトラクティングセットが出現する。レプリケータ系としてみれば混合戦略の導入は相互作用行列のランクを上げずに行と列を増やすことに対応する。新しく出現するアトラクティングセットは系内部の平衡点の中心多様体となる。

## 1 イントロダクション

$n$  個の純粋戦略が存在し、戦略  $i$  と戦略  $j$  が対戦した時の戦略  $i$  が得る利得を  $A_{ij}$  で与えたものをゲームと呼ぶ。

レプリケータ方程式は Taylor-Jonker[1] によって最初に提唱され、その後、進化系を記述する方程式として研究が進められた (e.g. Maynard Smith and Hofbauer [2, 3, 4]). 一般には  $x_i (i = 1, \dots, n)$  を変数とする微分方程式

$$\dot{x}_i = x_i \left( f_i(\mathbf{x}) - \sum_j x_j f_j(\mathbf{x}) \right)$$

で表される。この系は単体  $S_{n-1}$  上で不変であり、相空間を単体  $S_{n-1}$  としてその上でのダイナミクスを扱う。一般には  $n \times n$  行列  $A$  を用いて  $f_i(\mathbf{x}) = \sum_j A_{ij} x_j$  とした系を指す。

この系を行列  $A$  を利得行列、変数  $x_i$  を戦略  $i$  をとるプレイヤーの人数の比と考え、その平均利得に応じてプレイヤーの人数の比が増減するゲームの進化ダイナミクスと捉えた系がゲームダイナミクスである。

$n$  個の純粋戦略を持ち、行列  $A$  を利得行列とするゲーム系は

$$\dot{x}_i = x_i \left( \sum_j A_{ij} x_j - \sum_{j,k} x_j A_{jk} x_k \right) \quad (1)$$

と表現される。ここで、 $x_i$  は純粋戦略  $i$  を用いるプレイヤーの数の全体に対する比であり、 $\sum x_i = 1$  and  $x_i \geq 0$  を満たすものとする。

この系の力学系としての興味深い振る舞いが見つかっている [5, 6, 7, 8]. ここでは、この系にプレイヤーの取り得る戦略として混合戦略を許した場合の振る舞いを研究する。

<sup>1</sup> 本研究は、池上高志 (東京大学大学院 総合文化研究科 広域科学 E-mail:ikega@sacral.c.u-tokyo.ac.jp) との共同研究である

<sup>2</sup> E-mail: hasimoto@sacral.c.u-tokyo.ac.jp

## 2 モデル方程式 I

次のように混合戦略を含むゲームダイナミクスを定義する.

行列  $A$  を利得行列に持つ  $n$  個の純粋戦略からなるゲームを考える. 各混合戦略は  $n$  次元ベクトル  $s$  で表され, 純粋戦略  $i$  をとる確率が  $s_i$  となる. よって,  $s_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^n s_i = 1$  である. 混合戦略  $s^k$  が混合戦略  $s^l$  から得る平均利得は  $\sum_{i,j} s_i^k A_{ij} s_j^l$  となり, ゲームダイナミクスは, 各混合戦略をとるプレイヤーの比  $y_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) を変数として,

$$\dot{y}_i = y_i \left( \sum_j {}^t s^i A s^j y_j - \sum_{j,k} y_j {}^t s^j A s^k y_k \right) \quad (2)$$

と表される.

Eq.(2) では, 利得行列は  $B_{ij} (= {}^t s^i A s^j)$  となり, ダイナミクスは  $m-1$  次元単体上で定義される. 純粋戦略  $i$  の出現頻度  $x_i$  は Eq.(2) では  $\sum_j s_i^j y_j$  で与えられる.  $n \times m$  行列  $S$  を  $(s^1 | \dots | s^m)$  と定義すると  $x$  の時間発展は

$$\begin{aligned} \dot{x} &= S \dot{y} = \sum_i s^i y_i ({}^t s^i A x - {}^t x A x) \\ &= \sum_i y_i (s^i - x) ({}^t s^i - x) A x \end{aligned} \quad (3)$$

と表され, 一般に  $S$  の構造に依存する. 混合戦略の数  $m$  が増えると系の相空間の次元は上がるが,  $A$  による  $B$  の制限 (i.e.  $\text{rank}(B) \leq \text{rank}(A)$ ) によって実質的な系の自由度は制限されてしまう.

また,  $S$  によって元の方程式 Eq.(1) の平衡点に射影される点は Eq.(2) の平衡点となり, それらは単体  $S_{m-1}$  上の  $(m-n)$  次元の超平面となる. Eq.(1) の内部平衡点を  $q$ ,  $S$  によって  $q$  に射影される単体  $S_{m-1}$  上の点の集合を  $H_q$  と定義する.  $s_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) を純粋戦略 (i.e.,  $s_i = \{s | s_i = 1, s_j = 0 (j \neq i)\}$  ( $i = 1, \dots, n$ )),  $s_i$  ( $i = n+1, \dots, m$ ) をそれらの混合戦略と仮定する.  $\tilde{q}$  を  $\{y | y_i = q_i (i = 1, \dots, n), y_i = 0 (i = n+1, \dots, m)\}$  とおくと,  $\tilde{q}$  は  $(n-1)$  個の安定な方向を単体  $S_{n-1}$  に,  $(m-n)$  個のニュートラルな方向を超平面  $H_q$  にそれぞれ持つ.

## 3 モデル方程式 II

3つの純粋戦略からなる内部平衡点を持つゲーム系の利得行列は, 相空間上のフローの位相的な性質を変えずに次のような形に変換することが出来る.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & d+a & d-a \\ d-b & 0 & d+b \\ d+c & d-c & 0 \end{pmatrix}.$$

明らかにこのゲーム系は内部平衡点を  $\frac{1}{3}(1, 1, 1)$  に持つ. 線形安定性解析より, 内部平衡点が安定である必要十分条件は

$$d > 0 \text{ and } ab + bc + ca > -d^2 \quad (4)$$

となる.

また, 内部平衡点が ESS である必要十分条件は

$$d > 0 \text{ and } ab + bc + ca > (a^2 + b^2 + c^2) - 3d^2 \quad (5)$$

となる.

よって内部平衡点が安定だが, ESS でないための必要十分条件は

$$d > 0 \text{ and } (a^2 + b^2 + c^2) - 3d^2 > ab + bc + ca > -d^2 \quad (6)$$

となる.

一般性を失わずに  $d = 1$  を仮定することが出来る. 条件 (6) の下で, 特に, 以下で  $r_1, r_2$  と定義される 2 つのサドルが存在する次のような  $(a, b, c)$  の領域を考える.

$$a > 1, b > 1, c < -1 \text{ and } b + c > 0. \quad (7)$$

これらの条件 (6)(7) の下で, このゲーム系は 6 つの平衡点を持つ (図 1).

- $p_1 = (1, 0, 0), p_2 = (0, 1, 0)$  and  $p_3 = (0, 0, 1)$  が純粋戦略にあたる.
- 線分  $p_2-p_3, p_3-p_1$  上にそれぞれ  $r_1 = (0, \frac{1+b}{2+b-c}, \frac{1-c}{2+b-c})$  と  $r_2 = (\frac{1-a}{2-a+c}, 0, \frac{1+c}{2-a+c})$  のサドル平衡点が存在する.
- 内部平衡点  $q = \frac{1}{3}(1, 1, 1)$  が存在する.

条件 (6)(7) の下では  $p_1$  と  $q$  がアトラクタとなり,  $p_1$  が ESS であり,  $q$  は ESS ではない. (i.e.  $\forall x (\neq p_1) \in S_2, {}^t p_1 A p_1 = 0 > {}^t x A p_1$ ).  $p_1$  と  $q$  の吸引領域境界は  $p_2$  から  $r_2$  へのヘテロクリニック軌道となる.

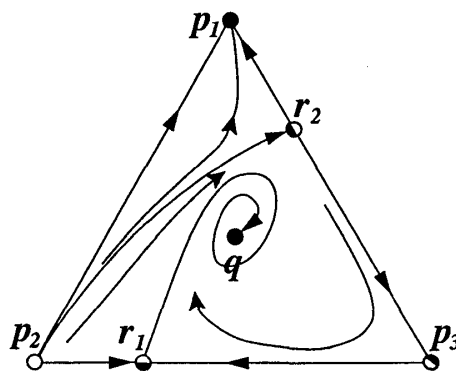


図 1: 単体  $S_2$  上のフローの構造. 2 つの安定平衡点  $p_1, q$  が存在し, それらの吸引領域の境界は  $p_2$  から  $r_2$  へのヘテロクリニック軌道となる.

### 4 混合戦略の導入

次に純粋戦略 2 と 3 を用いた混合戦略  $v = (0, 1 - k, k)$  を導入する. 純粋戦略を 3 つとも用いた混合戦略に拡張することは簡単だが, ここでは単純にするため 2 つの純粋戦略を用いた場合に限定する. この戦略を新しい 4 番目の頂点として, 単体  $S_2$  を  $S_3$  上に図 2 のように埋めこむ. 上で定義された平衡点は以下の  $S_3$  上の平衡点に対応する.

- $\tilde{p}_1 = (1, 0, 0, 0), \tilde{p}_2 = (0, 1, 0, 0), \tilde{p}_3 = (0, 0, 1, 0)$
- $\tilde{r}_1 = (0, \frac{1+b}{2+b-c}, \frac{1-c}{2+b-c}, 0), \tilde{r}_2 = (\frac{1-a}{2-a+c}, 0, \frac{1+c}{2-a+c}, 0)$
- $\tilde{q} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0)$  and  $\tilde{p}_4 = (0, 0, 0, 1)$ .

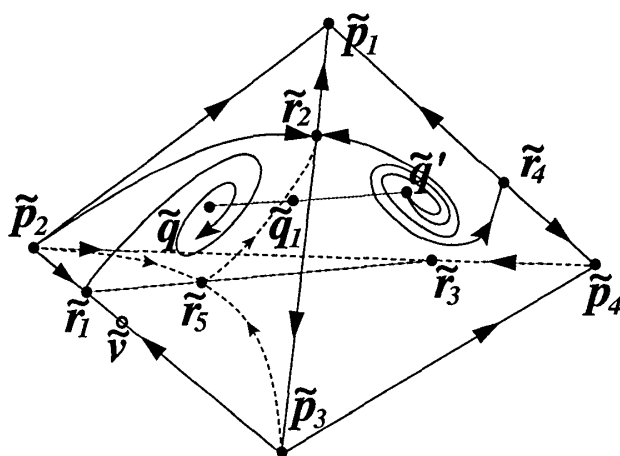


図 2: 単体  $S_3$  上の平衡点とフロー. 直線  $\tilde{v}-\tilde{p}_4, \tilde{r}_1-\tilde{r}_3$  と  $\tilde{q}-\tilde{q}'$  は互いに平行である. 直線  $\tilde{q}-\tilde{q}'$  と  $\tilde{r}_1-\tilde{r}_3$  上の点はそれぞれすべて平衡点である.  $k^2(2+b-c) - 2k(1+a-c) + (2+a-b) > 0$  が満たされるとき,  $\tilde{r}_4$  とヘテロクリニック軌道  $\tilde{q}' \rightarrow \tilde{r}_4$  は存在しない. この場合,  $\tilde{p}_4$  は  $\tilde{p}_4-\tilde{p}_1$  方向に不安定である.

純粋戦略からなるゲーム系の平衡点に行列  $S$  によって射影される点は, この系の平衡点となるので,  $r_1$  と  $q$  にそれぞれ射影される線分  $\tilde{r}_1-\tilde{r}_3$  と線分  $\tilde{q}-\tilde{q}'$  は平衡点からなる. パラメータ  $k$  が以下の条件を満たすと仮定すると

$$\frac{1}{2} > k > \frac{1-c}{2+b-c}, \tag{8}$$

$\tilde{r}_3$  が線分  $\tilde{p}_2-\tilde{p}_4$  上に, また  $\tilde{q}'$  は  $\tilde{p}_1, \tilde{p}_3$  と  $\tilde{p}_4$  を含む平面上に存在する.

条件 (6)(7)(8) の下で,  $\tilde{q}'$  は  $\tilde{p}_1-\tilde{p}_3-\tilde{p}_4$  平面上で不安定となり,  $\tilde{q}$  は平面  $\tilde{p}_1-\tilde{p}_2-\tilde{p}_3$  上で安定なので, 安定性が線分  $\tilde{q}-\tilde{q}'$  上で変化することになる (参照 図 2). 線分  $\tilde{q}-\tilde{q}'$  上の点を  $\theta$  によってパラメタライズ ( $\tilde{q}(\theta) = (1-\theta)\tilde{q} + \theta\tilde{q}' (0 \leq \theta \leq 1)$ ) すると,  $\tilde{q}_1 = \tilde{q}(\theta_1)$  ( $\theta_1 = \frac{2}{(2+b-c)k}$ ) で安定性が交替することが分かる.

元の純粋戦略からなるゲーム系では, アトラクタは  $p_1$  と  $q$  であったが, 新しい系ではそれらに対応するアトラクタは  $\tilde{p}_1$  と  $\tilde{q}(\theta < \theta_1)$  となる.  $\tilde{q}'$  の不安定性より,  $\tilde{q}'$  の近傍の点は  $\tilde{p}_1$  へ,  $\tilde{q}(\theta < \theta_1)$

の安定性より  $\tilde{q}(\theta < \theta_1)$  の近傍の点は  $\tilde{q}(\theta < \theta_1)$  へそれぞれ引き込まれる. このことから  $\tilde{p}_1$  と  $\tilde{q}(\theta < \theta_1)$  の吸引領域の境界は線分  $\tilde{q}-\tilde{q}'$  によって貫かれていることが分かる. もし, この系に他にアトラクタが存在しなければそれらの点は一致し,  $\tilde{q}(\theta > \theta_1)$  の近傍の点は  $\tilde{p}_1$  に吸引されることになる. しかし, 実際にはそれらの間に3番目のアトラクティングセットが存在する.

#### 4.1 $\tilde{r}_2$ の安定多様体

$\tilde{r}_2$  は2次元の安定多様体を持ち, ヘテロクリニック軌道  $\tilde{q}' \rightarrow \tilde{r}_2, \tilde{p}_2 \rightarrow \tilde{r}_2$  を境界を持つ. (参照 図 2). 以下ではこの  $\tilde{r}_2$  の安定多様体を  $\Omega$  と定義する.  $\Omega$  は2つの領域に分けることが出来る. 一つは  $\tilde{p}_2$  からのヘテロクリニック軌道からなる領域で, もう一つは  $\tilde{q}(\theta > \theta_1)$  からのヘテロクリニック軌道からなる領域である. 前者を  $\Omega_1$ , 後者を  $\Omega_2$  とそれぞれ定義する. (参照 図 3).

$\Omega_1$  と  $\Omega_2$  の境界は線分  $\tilde{r}_1-\tilde{r}_3$  上の一点から  $\tilde{r}_2$  へのヘテロクリニック軌道である. この線分  $\tilde{r}_1-\tilde{r}_3$  上の一点を  $\tilde{r}_5$  と定義する.  $\tilde{p}_2$  から  $\tilde{r}_5$  へのヘテロクリニック軌道と  $\tilde{p}_3$  から  $\tilde{r}_5$  へのヘテロクリニック軌道もまた存在し, 結局  $\Omega_2$  はヘテロクリニックサイクル  $\tilde{p}_3 \rightarrow \tilde{r}_5 \rightarrow \tilde{r}_2$  を境界を持つ. このヘテロクリニックサイクルを  $C$  と定義する.

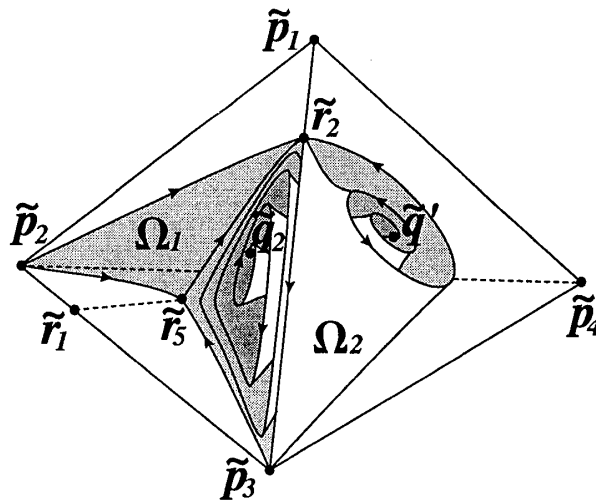


図 3:  $\Omega : \tilde{r}_2$  の安定多様体.  $\Omega$  は2つの領域  $\Omega_1, \Omega_2$  に分けることが出来る.  $\Omega_1$  は  $\tilde{p}_2$  からの  $\Omega_2$  は  $\tilde{q}(\theta > \theta_1)$  からのヘテロクリニック軌道の集合. それらの境界は  $\tilde{r}_5$  から  $\tilde{r}_2$  へのヘテロクリニック軌道となる.

線分  $\tilde{q}-\tilde{q}'$  上の  $\Omega_2$  の境界の点を  $\tilde{q}_2 = \tilde{q}(\theta_2)$  とすると,  $\tilde{q}_2$  を  $\alpha$ -極限集合に持ち, ヘテロクリニックサイクル  $C$  を  $\omega$ -極限集合に持つ軌道が存在する. よって  $\tilde{q}_2$  は不安定平衡点であり, もし  $\theta_2$  が  $\theta_1$  と等しいとすると  $\tilde{q}_2$  はその近傍に必ず安定平衡点を持つことになり, フローの連続性に矛盾する. また  $\theta_2$  は明らかに  $\theta_1$  より小さくないので  $\theta_2$  は  $\theta_1$  より大きいことが分かる. 結局  $\tilde{q}_2$  の不安定多様体はその境界にヘテロクリニックサイクル  $C$  を持つ2次元曲面となる. この不変集合を  $\alpha$  と定義する.

## 4.2 $\tilde{q}_1$ の中心多様体

中心多様体定理より,  $\tilde{q}_1$  の中心多様体が少なくとも1つ存在し, それを  $\beta$  と定義する.  $\tilde{q}_1$  はその近傍に必ず安定平衡点及び不安定平衡点の両方を持つので, 軌道の連続性より  $\beta$  上の軌道は  $\tilde{q}_1$  を  $\alpha$ -極限集合にも  $\omega$ -極限集合にも持たない. このことから  $\beta$  上の軌道はすべて閉軌道となる. 単体  $S_3$  の境界を含む閉軌道はヘテロクリニックサイクル  $C$  しかないので,  $\beta$  の境界はこのヘテロクリニックサイクルとなる. よって,  $\beta$  は  $\tilde{q}_1$  を中心に不可算無限個の周期軌道が稠密に並び, 境界にヘテロクリニックサイクル  $C$  を持つ曲面となる.

以上より,  $\alpha$  と  $\beta$  によって囲まれる領域が存在し, 明らかにこの領域の軌道は  $\tilde{p}_1$  にも  $\tilde{q}(\theta < \theta_1)$  にも漸近せず, 別のアトラクティングセットに漸近することになる.

$\tilde{q}(\theta)$  の安定 (不安定) 多様体は2次元曲面となるが,  $\theta_1 < \theta < \theta_2$  の領域における  $\tilde{q}(\theta)$  の不安定多様体は, その境界を  $\beta$  上の周期軌道に持つ (参照 図 4).

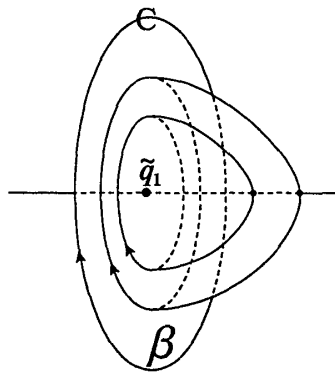


図 4:  $\tilde{q}(\theta)$  ( $\theta_1 < \theta < \theta_2$ ) の不安定多様体は  $\beta$  上の周期解を境界に持ち,  $\theta$  が小さいほど小さい周期軌道を境界に持つ.

$\theta$  が  $\theta_1$  に近いほど,  $\tilde{q}(\theta)$  の不安定多様体の境界の周期軌道は  $\tilde{q}_1$  に近くなり,  $\tilde{q}(\theta_2)$  の不安定多様体はその境界を  $\beta$  の境界  $C$  に持つことから,  $\tilde{q}(\theta)$  ( $\theta_1 < \theta < \theta_2$ ) の不安定多様体全体は,  $\alpha$  と  $\beta$  で囲まれる領域と等しくなる. 結局,  $\beta$  は  $\alpha$  と  $\beta$  で囲まれる領域を吸引領域に持つアトラクティングセットとなり, その吸引領域は正のメジャーを持つ.

もし条件 (7) を満たさないとすると, サドル  $r_1, r_2$  はそれらの内, 高々1つしか存在せず, フローの構造は図 1 と異なる形になるが, それでも ESS でない内部平衡点を持てば, 必ず  $\tilde{q}$  を不安定にする混合戦略が存在し, そのとき  $\tilde{q}_1$  の安定多様体は周期軌道の族からなり, その吸引領域は正のメジャーを持つ.

結局, もし3戦略ゲーム系が ESS でない内部平衡点を持てば, 常に新しいアトラクティングセットを作る混合戦略を選ぶことが出来て, そのアトラクティングセットは不可算無限個の周期軌道からなる.

### 4.3 数値シミュレーション

以下では条件 (6)(7)(8) の下で

$$a = 5, b = 27, c = -3 \text{ and } k = \frac{1}{4}$$

のようにパラメータを選んで数値シミュレーションを行った. このとき  $\theta_1 = \frac{1}{4}$  となり, 数値計算より  $\theta_2 \simeq 0.3$  となる (参照 図 5).

$\theta_1$  より大きい領域に, 近傍の点が  $\tilde{p}_1$  に吸引されずに周期軌道に漸近する軌道を見つけることが出来る (参照 図 6).

数値シミュレーションでも  $\beta$  上に  $\tilde{q}_1$  の周りに周期軌道が並び, その境界がヘテロクリニックサイクル  $C$  になることが観察される (参照 図 7).

以上より,  $\tilde{q}_1$  の中心多様体  $\beta$  が正のメジャーを持つ吸引領域を持ち,  $\beta$  がこの系の新しいアトラクティングセットとなることが分かる.

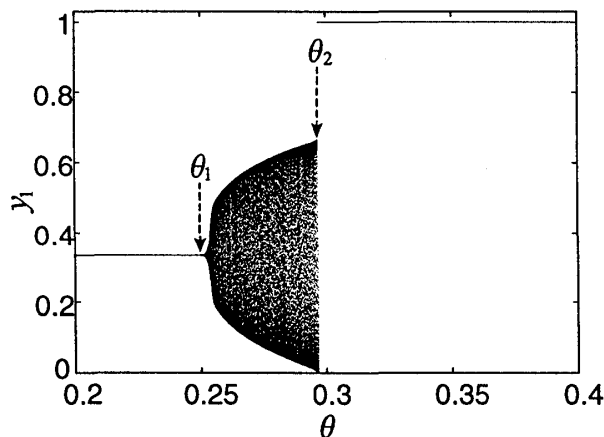


図 5:  $\theta$ - $y_1$ :  $\tilde{q}(\theta)$  の近傍を初期値に持ち, 十分時間がたった後の  $y_1$  の値をプロットした.  $\tilde{q}(\theta < \theta_1)$  の近傍から始めた軌道は  $\tilde{q}(\theta < \theta_1)$  へ吸引され,  $\tilde{q}(\theta > \theta_2)$  の近傍から始めた軌道は  $\tilde{p}_1$  へ吸引される.  $\tilde{q}(\theta_1 < \theta < \theta_2)$  の近傍から始めた軌道は周期解に漸近する.

## 5 結論

ゲーム系に混合戦略を導入することによって, 新しいアトラクティングセットが出現することを見た. ここでは新しい戦略は, ゲームにおける新しい手を意味するわけではなく, 既存の戦略の確率的な組み合わせでしかない. ゲームの構造は変化しないにも関わらず, その振る舞いは大きく変化する.

元の系におけるアトラクタは全て平衡点であったが, 新しく出現したアトラクティングセットは無限個の周期解の集合となり, このことはゲームの構造を変えることなく, 混合戦略の導入によって系の自由度が増加したことを意味する.

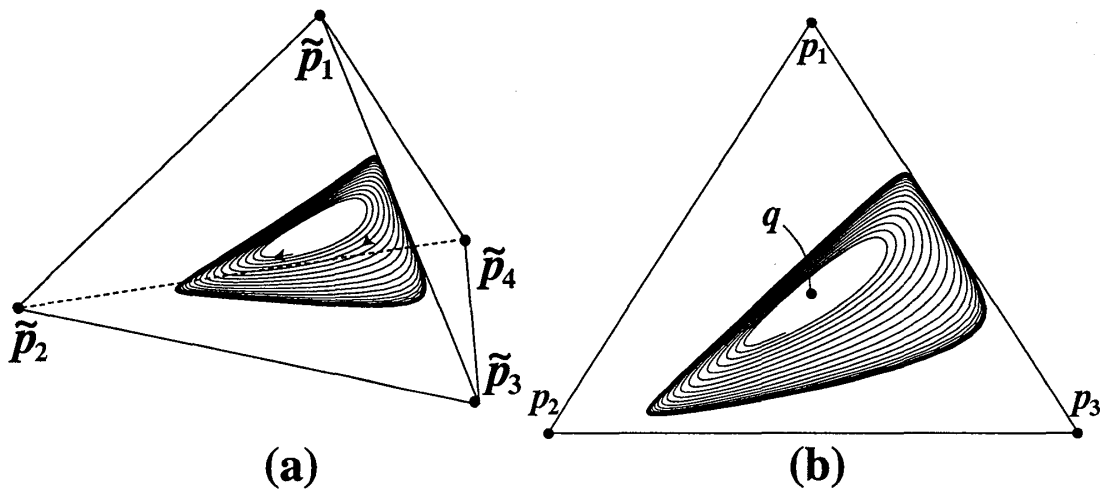


図 6: 新しく出現した周期軌道に漸近する軌道. 初期値は  $(\frac{5}{20}, \frac{6}{20}, \frac{6}{20}, \frac{3}{20})$ . (a) は単体  $S_3$  上での軌道.(b) は軌道を  $S_y$  によって単体  $S_2$  へ射影した軌道.

元の系では内部平衡点が安定で、新しく導入した戦略と他の 2 つの戦略との間の内部平衡点は不安定となるような状況は、元の系の内部平衡点が安定だが ESS でない時には一般に起こり得ることであり (逆に元の系の内部平衡点が ESS であるようなときには決して起こらない), ここで見た新しいアトラクティングセットの出現は特別な場合ではない.むしろ、混合戦略を許したゲームでの一般的な性質である.

進化生物学の観点から見ると、混合戦略は、単なる既存の種の性質の組みかえによって出現した変異種と考えることが出来る.これは相互作用行列のランクを上げずにサイズを増やす状況に対応する.系が内部平衡点にいと仮定すると、どんな変異種でも適応度は既存種と等しいので、侵入し、ゆらぎによって増大することが可能である.変異種の出現によって系のアトラクタの構造が変化したり、その変異種が侵入するためには必ずしも全く新しい性質が必要なわけではない、と言うことが出来る.

## 6 展望

次のような重要な状況が今後、議論されるべきであると考えられる.

- 2 つ以上の混合戦略が導入された場合.
- 元の系の内部のアトラクタが平衡点でない場合 (e.g. リミットサイクル, 準周期解).
- $\tilde{q}$  と  $\tilde{q}'$  の安定性が逆の場合.



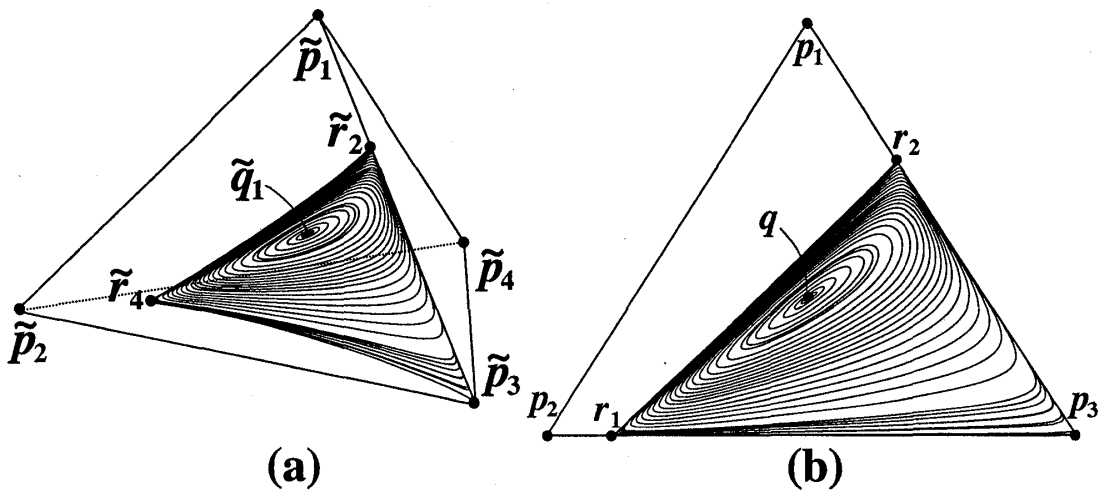


図 7: 不可算無限個の周期軌道からなるアトラクティングセット. (b) ではそれらを  $S_y$  によって元の相空間に射影している.

## 参考文献

- [1] P. D. Taylor, L. B. Jonker: "Evolutionary stable strategies and game dynamics", *Math. Biosci.* **40** (1978) 145-156.
- [2] J. M. Smith: *Evolution and the Theory of Games*, (Cambridge University Press, 1982).
- [3] J. M. Smith: *Game theory and the evolution of fighting in On Evolution*, (Edinburgh University Press, Edinburgh, 1972).
- [4] J. M. Smith: "The theory of games and the evolution of animal conflicts", *J. theor. Biol.* **47** (1974) 209-221.
- [5] J. Hofbauer, K. Sigmund: *The Theory of Evolution and Dynamical Systems*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1988).
- [6] T. Chawanya: "A New type of irregular motion in a class of game dynamics systems", *Prog. Theor. Phys.* **94** (1995) 163-179.
- [7] T. Chawanya: "Infinitely many attractors in game dynamics system", *Prog. Theor. Phys.* **95** (1996) 679-684.
- [8] K. Hashimoto, T. Ikegami: "Heteroclinic Chaos, Chaotic Itinerancy and Neutral Attractors in Symmetrical Replicator Equations with Mutations", *J. Phys. Soc. Jap.* **70** (2001) 349-352.
- [9] E. C. Zeeman: "Dynamics of the evolution of animal conflicts", *J. theor. Biol.* **89** (1981) 249-270.

- [10] E. van Damme: *Stability and Perfection of Nash Equilibria*, (Springer-Verlag, Berlin, 1991).
- [11] B. Thomas: “Evolutionary Stable Sets in Mixed-Strategies Models” *Theor. Pop. Biol.* **28** (1985) 332-341.
- [12] M. Nowak, K. Sigmund: “A strategy of win-stay, lose-shift that outperforms tit-for tat in the prisoner’s dilemma game”, *Nature* **364** 56-58 (1993).
- [13] K. Tokita, A. Yasutomi: “Mass extinction in a dynamical system of evolution with variable dimension”, *Phys. Rev. E* **60** (1999) 682-687.
- [14] S. Ohno: *Evolution by Gene Duplication*, (Springer-Verlag, Berlin, 1970).
- [15] F. Jacob: “Evolution and Tinkering”, *Science* **196** (1977) 1161-1166.