弱値の半古典論による解釈

東京都立大学 大学院理学研究科 物理学専攻 田中篤司 *

要旨: Aharonov-Albert-Vaidman の弱値の半古典的な解析について報告します. この解析から, 弱値の異常な値, 例えば極端に大きな値や複素数の値, の本質は, 量子効果の主要なものである, 干渉や絡み合いとは無縁であることが明らかになりました. 同時に, この解析により, 古典軌道間の量子干渉が発現しない場合の, Ehrenfest の定理による, 古典軌道と量子論の期待値との対応付けを, 複素数値を取る古典軌道の場合へ拡張しました.

1 はじめに

量子論には, (予想外に) 多くの種類の測定の手続きが存在します. このことは, 近年の, 量子系の観測問題の研究の進展によってますます明らかになってきました. そのなかでも, 一つの興味深い方向性は, 多時間の "出来事" に関するものです (例. Aharonov-Bergmann-Lebowitz' rule [1], consistent history approach [2], 弱い測定 [3]). もう一つの興味深い方向性は, 測定装置の乱れた出力に対する, 統計的な議論を含むものです (例. 両立しない物理量の "同時測定" [4], 弱い測定 [3]). これらの議論の中のいくつかのものの動機は, 量子論における認識論や存在論に一石を投じることです. 一方, "convential" な量子論の解釈 ("Copenhagen 解釈") の枠組みの中に居座り, これらの議論を射影公理の単なる応用とみなしたとしても, これらの議論が, さまざまな要因の絡みあう測定過程の核心を簡潔に表現する概念を与えていることは間違いありません.

ここで議論するのは, 以上で挙げた方向性の交差点にある, 弱い測定と, それに対応する "期待値" である, 弱値についてです. 以下で紹介するように, 弱値は "異常な" 値, 例えば, 対応する作用素の固有値の範囲を逸脱した値, 特に, 複素数の値を取り得ます. このため, 弱値は, 古典的な概念と完全に無縁なもののように思われます. しかしながら, 本論で展開する, 弱値の半古典解析は, 量子論特有の概念である, 干渉や絡み合いに頼らずに, 弱値を, "異常な" ものを含めて, 理解できることを示します [5].

2 弱値と弱い測定

Aharonov-Albert-Vaidman の弱値 [3] の考察のために, 次のような量子集団を導入します: 被測定系 (以下, 単に系と呼びます) の量子状態を, 時刻 $t=t'$ において始状態 $|\psi'\rangle$ に準備します; その後, 時刻 $t=t''(>t')$ で, 系を *postselect* します. このとき系が, 終状態 $\langle\psi''|$ にあることを確認したとします. このようにして, 始状態と終状態で量子集団を指定することにします.

四つの parameter $(\langle\psi''|, t''; |\psi'\rangle, t')$ を用いて, 以上のように指定される量子集団に対し, $t\in[t',t'']$ における, 物理量 $\hat{A}$ の弱値 [3] を

$$\mathrm{W}(\hat{A},t)\equiv\frac{\left\langle\psi''\middle|\hat{U}(t'',t)\hat{A}\hat{U}(t,t')\middle|\psi'\right\rangle}{\left\langle\psi''\middle|\hat{U}(t'',t')\middle|\psi'\right\rangle}$$

と定義します. ここで, $\hat{U}(t_1,t_0)$ は $[t_0,t_1]$ での時間発展作用素.

弱値 $\mathrm{W}(\hat{A},t)$ は驚くべき性質を持ってます: 弱値は "異常な" 値, つまり, 作用素 $\hat{A}$ の固有値の範囲を逸脱した値, を取り得ます [3]. 実際, $\hat{A}$ が Hermite 作用素であっても, $\mathrm{W}(\hat{A},t)$ は複素数の値を取り得ます.

弱値は単に, 理論上でのみ意味を持つものではありません. 実験的に得ることができる物理量です (例えば, 文献 [6] で測定例が報告されています). そこで, 弱値を測定する手続きを説明します [3, 7]. まず, von Neumman 型の測定装置 [8] を用意します. ただし, その針の位置の量子ゆらぎが大きい状態を, 測定装置の始状態とします. 測定装置と (被測定) 系を弱く結合させます. この結果, 系と針に相関が生まれます. その後, 系を postselect します. postselection の結果, 試行が考察の対象となる量子集団に属する場合に, 針を測定します. この, 針の測定は, 射影公理の適用の対象になる測定です. 針の測定結果は, 始状態で量子ゆらぎが大きいことと, 系との結合が弱いために, ゆらぎが大きく, 一回の結果では何か意味のあることは見いだせません. ここが, 弱い測定と, 射影公理を伴なう通常の測定と異なるところです. 弱い測定が意味を成すためには, 以上の試行を多数回蓄積した統計分布を得る必要があります: 針の位置分布の最大値から, 弱値の実部が求まります; 一方, 針の運動量 (つまり, 位置の共役な物理量) の分布の最大値から, 弱値の虚部が求まります.

3 弱値の半古典評価

説明を簡潔にしたいので, 一次元空間中の質点を例とします. その位置を q, 運動量を p と記します. 対応する位置作用素を $\hat{q}$, これの固有値 q に対応する固有 vector を $|q\rangle$ と記します. この系の時間発展を記述する Hamiltonian 作用素を $\hat{H}$ と記します.

量子集団として, 時刻 $t=t'$ での始状態 $|\psi'\rangle\equiv|q'\rangle$, 時刻 $t=t''$ での終状態 $\langle\psi''|\equiv\langle q''|$ で指定されるものを考えます. この量子集団に対して, 時刻 $t\in[t',t'']$ での弱値 $\mathrm{W}(\hat{A},t)$ を計算するには, 以下の母関数が有用です:

$$Z(\zeta(\cdot),\hat{A})\equiv\langle\psi''|\underset{\leftarrow}{\exp}\Big\{-\frac{i}{\hbar}\int_{t'}^{t''}\big(\hat{H}-\hat{A}\zeta(t)\big)\,dt\Big\}|\psi'\rangle \tag{1}$$

ここで, $\underset{\leftarrow}{\exp}(\cdot)$ は時間順序が課された指数関数です. これを用いると,

$$\mathrm{W}(\hat{A},t)=-i\hbar\left.\frac{\delta\ln Z(\zeta(\cdot),\hat{A})}{\delta\zeta(t)}\right|_{\zeta(\cdot)\equiv0}$$

が成立するのは自明です. 以下この右辺を半古典評価します.

*Email: tanaka@phys.metro-u.ac.jp

作用素 $\hat{A}$, $\hat{H}$ に対して，その古典対応物を，それぞれ $A(q,p)$, $H(q,p)$ と記します．ここでは議論の精度は誤差 $\mathcal{O}(\hbar)$ を持つので，作用素順序の問題は無視します．

ここで，半古典的に $Z(\zeta(\cdot),\hat{A})$ (1) を扱う方法は，Z の Feynman 経路積分表示の定常位相評価です [9]．このとき，半古典的な Z に寄与する軌道 $(q(t),p(t))$ は，Hamiltonian $H(q,p)-A(q,p)\zeta(t)$ によって定まる Hamilton 方程式と，境界条件 $q(t')=q'$ および $q(t'')=q''$ を満たす必要があります．境界条件は，始状態 $|q'\rangle$ と終状態 $\langle q''|$ によって定まります．一般にこの条件を満たす古典軌道は複数個存在し得ます (文献 [9], Chap. 12)．

ここで，重要な仮定を置きます: $\zeta(\cdot)$ が無限小のとき，Z の半古典評価では，古典軌道が唯一寄与を持つ．言い換えると，Z が単一の項から成ると仮定します

$$Z \simeq E\exp(iS/\hbar) \qquad (2)$$

ここで，S は古典作用，E は半古典的な確率振幅です．以下の議論に無関係な Maslov 指数 [10] は省きました．S と E の定義は以下のとおり [11]:

$$E \equiv \left(2\pi\hbar\,\partial q''/\partial p'\right)^{-1/2} \qquad (3)$$

$$S \equiv \int_{t'}^{t''}\{p(t)\dot{q}(t)-H(q(t),p(t)) + A(q(t),p(t))\zeta(t)\}dt \qquad (4)$$

また，$p'\equiv p(t')$ です．

単一項条件 (2) から $\mathrm{W}(\hat{A},t)=\delta S/\delta\zeta(t)|_{\zeta(\cdot)=0}+\mathcal{O}(\hbar)$ が成立します．さらに，古典作用の定義 (4) を用いると，

$$\mathrm{W}(\hat{A},t)=A(q(t),p(t))+\mathcal{O}(\hbar) \qquad (5)$$

です．ここで，軌道 $(q(t),p(t))$ は，$\zeta(\cdot)=0$ でのものです．評価 (5) の右辺第一項目は，“古典的な” 量です: $\hbar$ にほとんど依存しませんし，一般に，極限 $\hbar\to 0$ でも消えません．結局，Feynman 核 $\langle\psi''|\hat{U}(t'',t')|\psi'\rangle=Z(\zeta(\cdot)\equiv 0)$ の半古典評価に寄与する，唯一の古典軌道 $(q(t),p(t))$ がわかると，誤差 $\mathcal{O}(\hbar)$ の精度で弱値が求まることがわかりました．

また，このとき，物理量 A の弱い分散 $\mathrm{W}(\{\hat{A}-\mathrm{W}(\hat{A})\}^2)$ [12] を半古典評価すると $\mathcal{O}(\hbar)$ です．

いまの議論では，始状態と終状態を，位置作用素の固有状態に限りましたが，これについての一般化は，半古典代数 [13, 14] を使うことで容易に得られます．ただし，問題とする半古典 Feynman 核が単一項条件 (2) を満たしている必要があります．

4 “異常な” 弱値の半古典的な説明

4.1 Coherent state path integral: — 複素数値を取る弱値と，複素数値を取る古典軌道 —

以上の半古典的な議論が，複素数値を取る弱値を説明することを示します．半古典評価 (5) から容易に予期できることは，古典的に起こり得ない過程，例えば，tunnel 現象 [15] や非断熱遷移 [16, 17]，に際して，複素数値を取る弱値が現われることです．古典的に起こり得ない過程を調べる上で，技術的に最も簡単な方法は，coherent state 経路積分の半古典評価 [18] を調べることです．なぜなら，これは，一般に，複素数値を取る古典軌道によって構成されているからです．

ここでは，通常の量子論の教科書で頻用される coherent state [19] を用いますが，半古典的な定式化の便宜上，次の複素正準変換を使って導入します [20, 14]

$$\begin{bmatrix} Q \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix}$$

これに対応した作用素 $\hat{Q}$, $\hat{P}$ は，それぞれ，調和振動子の生成消滅作用素に対応しています．ここで，coherent state $|q'p'\rangle$ は，$\hat{P}$ の，固有値 $(p'-iq')/\sqrt{2}$ に対応する固有状態として定義します．

coherent state 表示の Feynman 核 $K(q''p''t'';q'p't')\equiv\left\langle q''p''\left|\hat{U}(t'',t')\right|q'p'\right\rangle$ の半古典評価は，K の coherent state 経路積分表示 [21] の定常位相評価から得られます．これに対応する，古典軌道の境界 ($t=t',t''$) 条件は，Klauder によって得られました [18]: $P(t')=P'\left(\equiv(p'-iq')/\sqrt{2}\right)$, $Q(t'')=Q''\left(\equiv(q''-ip'')/\sqrt{2}\right)$．これの一つの説明法は，$|q'p'\rangle$ が $\hat{P}$ の右固有状態であり，$\langle q''p''|$ が $\hat{Q}$ の左固有状態であることを思い出すことです: それぞれに対応する固有値が，古典軌道の値 $P(t')$ と $Q(t'')$ を定めます．注目すべき点は，実軌道が，時刻 t' での，相空間中の点 (q',p') が実の時間発展によって時刻 t'' で (q'',p'') に到着する場合のみ $(q(t),p(t))$ は $t'<t<t''$ の間ずっと実の値を取ります．しかし，これは例外的で，一般に，$(q(t),p(t))$ は複素数値を取ります．

時間間隔 $t''-t'$ が十分短ければ，K の半古典評価で寄与する古典軌道は唯一です．よって，単一項条件 (cf. (2)) が成立します．このとき，弱値の半古典評価 (5) より

$$(\mathrm{W}(\hat{q},t),\mathrm{W}(\hat{p},t))=(q(t),p(t))+\mathcal{O}(\hbar) \qquad (6)$$

です．つまり，弱値 $\mathrm{W}(\hat{q},t)$ と $\mathrm{W}(\hat{p},t)$ は近似的に，古典的な運動方程式に従います．さらに，$(q(t),p(t))$ は，一般に，複素数値を取るので，$\mathrm{W}(\hat{q},t)$, $\mathrm{W}(\hat{p},t)$ も複素数値を取ります．複素数値を取る弱値の例を挙げた，この議論は，典型的な量子現象である，量子干渉や量子的な絡み合いに全く触れていない点を強調しておきます．

半古典評価 (6) は，既知の，実の古典軌道と量子系の期待値との対応の拡張になっています: Eherenfest の定理 [22] によれば，量子系の，位置，および，運動量の，量子ゆらぎが小さければ，その期待値は古典的な運動方程式に従います．Eherenfest の定理を用いる議論の対象は，明らかに実の古典軌道のみです．しかし，この議論の，複素古典軌道への拡張 (6) は，古典軌道が実か複素かを一切区別しません．

例として，vanishing Hamiltonian $H=0$ を挙げます．このとき，半古典評価が厳密な答を与えることに注意してください．$t=t'$ での始状態を $|q'p'\rangle$, $t=t''$ での終状態を $\langle q''p''|$ とします．$t\in[t',t'']$ での古典軌道は一定値を取ります:

$$q = \frac{1}{2}(q''+q')-\frac{i}{2}(p''-p') \qquad (7)$$

$$p = \frac{1}{2}(p''+p')+\frac{i}{2}(q''-q') \qquad (8)$$

これらは一般に複素数値を取ります．同時に，これらは $t\in[t',t'']$ での弱値 $\mathrm{W}(\hat{q},t)$ と $\mathrm{W}(\hat{p},t)$ を厳密に与えます．

4.2 Spin coherent state path integral: — spin-$\frac{1}{2}$ 系の spin の成分の，弱い測定の結果が 100 である理由 —

Aharonov, Albert and Vaidman の調べた，spin-$\frac{1}{2}$ の系の弱値は，半古典的な spin coherent state 経路積分 [18] を使った半古典評価 (5) から説明がつきます．spin の向きを，極座標を (θ,ϕ) で記述します．同時に，極座標は spin coherent state $|\theta,\phi\rangle$ を parameter 付けします [19]. Feynman 核 $\langle\theta'',\phi''|\hat{U}(t'',t')|\theta',\phi'\rangle$ の定常位相評価で現れる古典軌道 $(\theta(t),\phi(t))$ は，Hamilton 方程式と，Klauder の境界条件 [18]

$$\begin{aligned}\exp(i\phi')\tan(\theta'/2) &= \exp(i\phi(t'))\tan(\theta(t')/2)\\ \exp(-i\phi'')\tan(\theta''/2) &= \exp(-i\phi(t''))\tan(\theta(t'')/2)\end{aligned} \tag{9}$$

を満たします．以前の (q,p) での coherent state の場合と同様に，$\theta(t)$ と $\phi(t)$ は，一般に，複素数の値を取ります．

量子集団として，始状態 $|\theta',\phi'\rangle$ と，終状態 $\langle\theta'',\phi''|$ で指定されるものを考えます．以前と同様に，Feynman 核の半古典評価で，古典軌道がひとつだけ寄与する場合は，この量子集団に対応する弱値の半古典評価 (5) が適用できます．

例として，再び，vanishing Hamiltonian $H=0$ を考えます．このときの，弱値の半古典評価 (5) は，やはり，厳密な値を与えます．始状態と終状態として，$(\theta',\phi')=(2\alpha,0)$, $(\theta'',\phi'')=(\frac{\pi}{2},\pi)$ を考えます[2]．ここで，$0<\alpha<\pi/2$. 時刻 $t\in[t',t'']$ での弱値は

$$\begin{aligned}\mathrm{W}(\hat{\sigma}_x) &= -1\\ \mathrm{W}(\hat{\sigma}_y) &= -i\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}\\ \mathrm{W}(\hat{\sigma}_z) &= \frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}\end{aligned}$$

です．$\mathrm{W}(\hat{\sigma}_x)$ の値 -1 は，終状態 $(\theta'',\phi'')=(\frac{\pi}{2},\pi)$ での postselection によるものです．$\mathrm{W}(\hat{\sigma}_y)$ は複素数値を取る弱値の一例になっています．$\mathrm{W}(\hat{\sigma}_z)$ は，"異常に" 大きな値を取り得ます．

というわけで，spin-$\frac{1}{2}$ 系の spin の成分の，弱い測定の結果が 100 になる [3] ことの，可能な説明のひとつは，単に

> **spin の弱値は古典的な運動方程式と，**
> **Klauder の境界条件 (9) に従う**

ということです．

ここで，再度強調しておきたいことがあります: "異常な" 弱値は量子干渉を必ずしも必要としないことです．また，干渉の定義は，波動現象の見かた (例えば，表示の取りかた) に強く依ることに注意すべきです．半古典的な Feynman 核の構成は，単一項条件が成立する限りにおいて，うまく干渉効果を排除します．

5 半古典的な評価の限界

半古典的な評価 (5) を得るうえで本質的な条件は，単一項条件 (cf. (2)) でした．この条件の破綻について説明します．

議論に入るまえに，予め断っておきたいことがあります: この条件の破綻によって発生する困難の源は，(古典) 軌道に付随した波動の干渉の発現です．ゆえに，既存の，軌道描像による量子論の定式化においても，この困難は何らかの形で発現します．例えば，Bohm [23] や Nelson [24] による，量子系の軌道理論では，"量子的な力" の発散がこれに相当します．よって，現状では，この点において，半古典論の (より良い) 代用物となるような，量子系の軌道理論は存在しません．

さて，単一項近似の破綻を，4.1節で議論した，半古典 coherent state 経路積分法で説明します [25, 26]. 他の，始状態・終状態の組についても似たような事情です (詳細は文献 [27] 参照). 問題となる時間間隔 $t''-t'$ が小さい場合，半古典的な Feynman 核で重要な寄与を成す古典軌道は唯一，実古典軌道の近隣にあるものだけです．古典軌道族の分岐点である，(相空間中の) 焦点 (文献 [25] および，文献 [9] の Chap. 15 を参照) は，このとき，実軌道から，はるか離れたところにあるので，この焦点からの Feynman 核への影響は実質的に無視できます．というわけで，単一項近似が成立します．$t''-t'$ が大きくなると，いくつかの焦点は実軌道に近づいていきます [26]. このために，焦点は，Feynman 核の構造に強い影響をもたらします: 量子干渉が発現するので，単一項近似は破綻します [25]. さらに，焦点は，半古典的な確率振幅 (cf. eq. (3)) を発散させます．この発散は，$\mathrm{W}(\hat{A})$ の半古典評価 (5) の $\mathcal{O}(\hbar)$ の寄与を発散させます．さらに，弱い分散 $\mathrm{W}(\{\hat{A}-\mathrm{W}(\hat{A})\}^2)$ の半古典評価も発散します．

まとめると，単一項条件が破綻する点で，半古典評価に強いゆらぎがあらわれます．その後に，複数の古典軌道からの寄与による干渉が発現します．一応，この時点でも半古典評価は実行可能ですが，一般に，評価 (5) のような簡単な形にはまとまらなくなります．

6 まとめと展望

本論で，弱値と，Feynman 核の半古典評価に寄与する古典軌道が，ある条件の下で密接に関係することを明らかにしました: ある条件とは半古典評価で，古典軌道同志の干渉が無視できるという条件です．このことから，"異常な" 弱値，複素数の値であったり，極めて大きな値であったりするもの，が量子干渉を持ちださなくても説明できることを指摘しました．半古典論を用いた議論では，弱値のなかで，"ふつう" のものと "異常" なものの区別はありません．

本論の展望として，ひとつの推論を伸べます．このことは，本研究の動機の核心にあったものです: それは，半古典論における複素数値を取る古典軌道と，物理的な実在との関係 [25] を明らかにすることです．

半古典論は，古典軌道と量子動力学の対応付けを与えます．古典的に起こり得ない量子現象，例えば，tunnel 現象 [15] や非断熱遷移 [16, 17] では，複素数値を取る古典軌道が重要な役割を演じます．近年の研究によれば，この approach は，古典的に起こりえない量子現象ににおける "量子 chaos" [28] を調べる際に，(古典) 力学系の研究の知見を活用可能にしました [25, 29]. さらに，複素数値を取る古典軌道は，厳密な量子論の定式化でも利用されます [30, 31]. このように，複素数値を取る古典軌道は多くの物理現象を説明するための理論的な枠組みを提供しています．

しかしながら，現状では，複素数値を取る古典軌道は自然界にその対応物を持たない，近似法 (半古典論) に由来する artifact だと考えられています．

本論の結果は，次のような推論を示唆します: 複素数値を取る古典軌道は弱い測定で観測できるのではないか? つまり，複素数値を取る古典軌道には自然界にその対応物があるのではないか，という推論です．

しかしながら，この推論はいくつかの難点を抱えています: 一点は，弱い測定の統計的な性質に起因します．量子論の

[2] 議論を簡潔にするため，文献 [3] の例を簡略化しました．

"conventional な" 解釈に従えば, 弱値は, 始状態と終状態で指定される統計集団に属した性質です. この点に関しては, Vaidman [32] が, 弱値と量子論の多世界解釈 [33] との関連づけを示唆しています. もし, これが許されれば, 弱値を, 統計集団に頼らずに考えることが可能になります; もう一つの難点は, 半古典的な評価 (5) が, 単なる近似であるということです. つまり, 測定できるとしても, 近似的だ, ということです. しかしながら, いくつかの系では半古典論は厳密でありえます (cf. 文献 [30]). 特に, 本論で取りあげた具体例はいずれも厳密なものでした. これらの考えを発展させることは将来の課題とします.

結局のところ, 現時点で確かなことは次の二点です: (1) 実値のものであれ, 複素数値のものであれ, 短い時間 scale の範囲でならば, せいぜい近似的かつ統計的ではありますが, 古典軌道の対応物を自然の中で見いだすことが可能です; (2) より長い時間 scale では, 量子論の創始者達が結論したように, 古典軌道は, 実値のものであれ, 複素数値のものであれ, 実在という立場を完全に失います. これらをまとめると, 実値と複素数値を取る古典軌道の物理的な実在の "度合" は同程度であると結論できます.

謝辞

本研究の一部は, 筑波大学物理学系にて行いました. 筑波大での研究遂行においては, 筑波大学学内プロジェクトからの助成を受けました.

参考文献

[1] Y. Aharonov, P. G. Bergmann, and J. L. Lebowitz, Phys. Rev. **134**, B1410 (1964)

[2] R. B. Griffiths, J. Stat. Phys. **36**, 219 (1984); Phy. Rev. A **57**, 1604 (1998), R. Omnés, Rev. Mod. Phys. **64**, 339 (1992), M. Gell-Mann and J. B. Hartle, Phys. Rev. D **47**, 3345 (1993)

[3] Y. Aharonov, D. Z. Albert and L. Vaidman, Phys. Rev. Lett. **60**, 1351 (1988); see also, Y. Aharonov, D. Z. Albert, A. Casher and L. Vaidman, Phys. Lett. A **124** 199 (1987)

[4] E. Arthurs and J. L. Kelly, Bell Syst. Tech. J. **44**, 725 (1965); S. L. Braunstein, C. M. Caves, and G. J. Milburn, Phys. Rev. A **43**, 1153 (1991); S. Stenholm, Ann. Phys. (NY) **218**, 233 (1992)

[5] Atushi, Tanaka, *Semiclassical theory of weak vales*, 投稿中 (2001); Atushi, Tanaka, *The WKB Method, Complex-Valued Classical Trajecories and Weak Measurements*, to appear in the Proceedings of ISQM-Tokyo '01

[6] N. W. M. Ritchie, J. G. Story and R. G. Hulet, Phys. Rev. Lett. **66**, 1107 (1991).

[7] 詳細は, 次の文献を参照: 田中, WKB 法における複素古典軌道と弱い測定, 研究集会数理物理の諸問題と力学系報告集, 伊藤秀一編 (2001)

[8] J. von Neumann J 1932, *Mathematische grundlagen der quantenmechanik*
(Springer Verlag, Berlin, 1932), § VI.3.

[9] L. S. Schulman, *Techniques and applications of path integration*, (Wiley, New York, 1981).

[10] M. C. Gutzwiller, J. Math. Phys. 8, 1979 (1967)

[11] J. H. van Vleck, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **14** 178, (1928)

[12] Y. Aharonov and L. Vaidman, Phys. Rev. A **41**, 11 (1990).

[13] W. H. Miller, Adv. Chem. Phys. **25**, 69 (1974).

[14] Y. Weissman, J. Chem. Phys. **76**, 4067 (1982).

[15] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics (Non-relativistic Theory)* (Oxford University Press, New York, 1977), § 47.

[16] L. Landau, Physik. Z. Sowjet. **2**, 46 (1932); E. C. G. Stueckelberg, Helv. Phys. Acta **5**, 369 (1932); J-T. Hwang and P. Pechukas, J. Chem. Phys. **67**, 4640 (1977).

[17] W. H. Miller and T. F. George, J. Chem. Phys. **56**, 5668 (1972).

[18] J. R. Klauder, in *Path Integrals*, edited by G. J. Papadopoulos and J. T. Devreese, NATO Advanced Summer Institute (Plenum, New York, 1978), p. 5; in *Random Media*, edited by G. Papanicolauou, (Springer-Verlag, New York 1987), p. 163.

[19] J. R. Klauder and B.-S. Skagerstam, *Coherent states* (World Scientific, Singapore, 1985).

[20] P. Kramer, M. Moshinsky and T. H. Seligman, in *Group Theory and Its Applications*, edited by E. M. Loebl (Academic Press, New York, 1975),Chap Vol. III, p. 249.

[21] I. Daubechies and J. R. Klauder, J. Math. Phys. **26**, 2239 (1985).

[22] 例えば, D. Bohm, *Quantum theory* (Dover, New York, 1989), § 9.26 を参照

[23] D. Bohm, Phys. Rev. **85**, 166 (1952); Phys. Rev. **85**, 180 (1952).

[24] E. Nelson, Phys. Rev. **150**, 1079 (1966)

[25] S. Adachi, Ann. Phys. **195**, 45 (1989).

[26] Atushi Tanaka, (in preparation).

[27] R. G. Littlejohn, J. Stat. Phys. **68**, 7 (1992)

[28] M. C. Gutzwiller, *Chaos in Classical and Quantum Mechanics* (Springer-Verlag, New York, 1990).

[29] A. Shudo and K. S. Ikeda, Phys. Rev. Lett. **74**, 682 (1995); K. Takahashi and K. S. Ikeda, Ann. Phys. (N. Y.) **283**, 94 (2000); T. Onishi et al., Phys. Rev. E 64 (2001) 025201.

[30] R. Balian and C. Bloch, Ann. Phys. (N. Y.) **85**, 514 (1974).

[31] M. S. Wang, Phys. Rev. Lett. **79**, 3319 (1997); Phys. Rev. A **57**, 1565 (1998).

[32] Y. Aharonov and L. Vaidman, arXiv:quant-ph/0105101 (2001).

[33] H. Everett, III, Rev. Mod. Phys. **29**, 454 (1957)