Tsallis エントロピによる記述とは？

— What is Tsallis' entropic description trying to tell us? —

茨城大学 工学部 電気電子工学科　和田 達明[1]
茨城大学 理工学研究科 SVBL　斎藤 健[2]

Tsallis エントロピに基づく非示量的統計力学 [1, 2] が、急速に発展している。Tsallis エントロピの適用例を、i) ベキ乗型の相関関数で特徴付けられる記号 (時系) 列系と、ii) 確率分布がベキ乗型の系の 2 種類に大別し、両者を対比しながら、Tsallis エントロピに基づく記述とは何をどのように記述するのかを考察する。

1　はじめに

Tsallis エントロピ

$$S_q \equiv \frac{1-\sum_i p_i^q}{q-1}, \qquad (\sum_i p_i = 1; q \in \mathcal{R}) \tag{1}$$

に基づく非示量的統計力学 [1, 2] は、Boltzmann-Gibbs (BG) 統計力学の 1 実数パラメータ q による拡張であり、指数関数やベキ関数で記述できる現象を同じ枠組で扱える。$q \to 1$ の極限で S_q は BG エントロピに帰着する。S_q の特徴は、統計的に独立な部分系 A と B に対して成立する**擬加法性**である。

$$S_q(A, B) = S_q(A) + S_q(B) + (1-q)S_q(A)S_q(B) \tag{2}$$

Tsallis 統計力学は発展途上の分野であり、パラメータ q の物理的意味は未だ良く判っていない。しかしながら、散逸写像の時系列系 [3] において、軌道のベキ的混合性を特徴づける**固有なエントロピ指数** q^* が存在し、q に物理的意味があると考えられる。

2　S_q に基づく記述とは？

Tsallis エントロピ S_q が適用されている対象系は、次の 2 種類に分類できる。

i) **記号列相関** (S_q は、記号列の path に対するエントロピ)
ベキ乗型の相関関数に特徴付けられる長距離 (長時間) 相関が存在し、BG エントロピの加法性が成立しない系[3]。例えば、散逸写像に基づく時系 (記号) 列系の時間発展 [3, 4]。

---

[1] E-mail:wada@ee.ibaraki.ac.jp

[2] 現所属：(株) シンプレクス・テクノロジー

[3] 連続確率変数の確率過程の場合には、長距離相関や長時間相関をもつ系でも、BGS エントロピが加法的になる場合がある。例えば、スペクトルが $1/f^\beta$ 型になるガウス過程、すなわち、ガウス型の $1/f^\beta$ ゆらぎでは、$1/f^\beta$ ゆらぎという長時間相関をもつ系であるにもかかわらず、分布がガウス型であることから、BGS エントロピが加法的になる。

ii) **ベキ乗型分布** (S_q は、分布に対するエントロピ)
例えば長距離相互作用の為に、確率分布が、BG エントロピ最大原理から得られる指数型の Boltzmann 分布ではなく、ベキ乗型の分布になる系。

i) は、BG エントロピの加法性が成立しない系を扱うので、非示量的統計力学と呼ぶに相応しい。例えば、状態数 $W(N)$ の記号列のサイズ N 依存性がベキ乗則 $W(N) \sim N^{\beta}$ に従う系[4] へ非示量的統計力学を適用するには、一般化 q-指数関数

$$\exp_q(x) \equiv [1+(1-q)x]^{\frac{1}{1-q}} \tag{3}$$

を導入して

$$W(N) \sim \exp_q(\lambda_q N) \propto N^{\frac{1}{1-q}}, \quad \text{for large } N \tag{4}$$

と表現する。これは、Tsallis エントロピ $S_q(N) = \ln_q W(N)$ が N に比例すること

$$S_q(N) \sim \lambda_q N \tag{5}$$

を意味するが、このようにベキ乗則を、q-指数関数を用いて、式 (4) と表す必然性は希薄である。

一方、ii) における Tsallis エントロピは、ベキ乗分布をエントロピ最大原理から導き、BG エントロピのパラメータ q による自然な拡張だが、なぜ S_q を用いるかは明確ではない。

このように現時点では、非示量的統計力学はその存在理由が明確でなく、何をやっているのか分かり難い。以下では、非示量的統計力学とは何か、Tsallis エントロピによる記述とは何をどのように記述しているのかを探る為、上記の 2 種類の系に対してその特徴を記していく。

2.1 Gibbs 集団とのアナロジ

i) 記号列相関
熱浴のような外部系は考えないという意味で小正準集団である。例えば、ベキ乗則に従う $W(N)$ を q-指数関数を用いて式 (4) のように表す。また $W(N)$ に対して等重率の仮定がなされ、$S_q = \ln_q W$ で表される。

ii) ベキ乗型分布
エントロピ最大原理適用の際、q-期待値 $U_q \equiv \sum_i \epsilon_i p_i^q / \sum_j p_j^q$ が一定の条件を課すので (逆) 温度に相当するパラメータ β があり、正準集団である。ラグランジェ未定乗数 β_q を用いて、この拘束条件下で S_q が最大となる確率は $p_i = \exp_q[-\beta_q(\epsilon_i - U_q)]/\bar{Z}_q$ となる。$\bar{Z}_q$ は一般化分配関数で、物理的 (逆) 温度 β と β_q の間に、$\beta_q = \beta / \bar{Z}_q^{1-q}$ の関係が成立 [1] する。

2.2 Boltzmann の運動論とのアナロジ

i) 記号列相関
全系を考えているので、N 体分布による記述に相当する。例えば、相関のある記号列の中から、長さ N の記号列 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_N$ の出現確率 $p(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_N)$ を考える。

[4] ここでの N は確率変数ではないことに注意

ii) ベキ乗型分布

対象とする系のみを考え、1体分布による記述である。例えば、エネルギEで指定される状態の実現確率は、$p(E) \propto \exp_q[-\beta_q E]$と表せる。

2.3 q-指数関数の因子化について

$q \neq 1$においてq-指数関数は、$\exp_q[x+y] = \exp_q[x] \cdot \exp_q[y/\{1+(1-q)\}]$のように、互いに独立ではない因子の積として表せる。

i) 記号列相関

q-指数関数の上記性質により、記号(時系)列における長距離(時間)相関が表現されている。例えば時間発展がq-指数関数で記述出来る場合、初期時刻t_0の影響が

$$\exp_q[\lambda_q\, t_n] = \exp_q[\lambda_q(t_0 + n\Delta t)] = \exp_q[\lambda_q\, t_0] \cdot \exp_q[\frac{\lambda_q\, \Delta t}{1+(1-q)t_0}]$$

$$\times \exp_q[\frac{\lambda_q\, \Delta t}{1+(1-q)(t_0+\Delta t)}] \cdots \exp_q[\frac{\lambda_q\, \Delta t}{1+(1-q)(t_0+(n-1)\Delta t)}] \tag{6}$$

の様に全ての項に及び、t_0依存性が長時間に渡って継続する長時間相関を意味する。

ii) ベキ乗型分布

確率分布関数がq-指数関数型なので、全系の一般化分配関数は1粒子の一般化分配関数の独立な積として表せない。例えば、銀河のpolytropicモデルや電子プラズマの乱流等において、全エネルギを系統的に1粒子エネルギに、説明なしに置き換えている場合があると指摘[5]されている。これらは**因子化(factorization)近似**

$$\exp_q(-\beta \sum_n e_n) \approx \prod_n \exp_q(-\beta e_n) \tag{7}$$

であり、この近似で無視した効果は、次に述べるフィッティング・パラメータとしてのq^*を適切に選ぶことで補償されていると思われる。

2.4 系固有のエントロピ指数q^*の決定法

i) 記号列相関

Tsallisエントロピの線形性の条件(5)、又は条件付きTsallisエントロピ$S_q(N|1)$の加法性の条件からq^*を決定出来る。例えば、長距離相関のある記号列$\{\sigma_1, \sigma_2, \cdots\}$に対して、条件付きTsallisエントロピ[6]

$$S_q(N|1) \equiv \frac{S_q[p(\sigma_1, \cdots, \sigma_{N+1})] - S_q[p(\sigma_1)]}{1+(1-q)S_q[p(\sigma_1)]} \tag{8}$$

が、$q = q^*$においてのみ、**加法性**

$$S_{q^*}(N|1) = S_{q^*}(1|1) + S_{q^*}(N-1|1) \tag{9}$$

を満たすようにq^*を決定[7]することが出来る。

ii) ベキ乗型分布

実験で得られた物理量の分布を、Tsallis エントロピ最大原理から得られる一般化カノニカル分布にあてはめて q^* を決定する。q^* は単なるフィッティング・パラメータとみなせる。

2.5 q の意味？

i) 記号列相関

$q^* = 1$ は、式 (2) から判るように S_q の加法性 (系の統計的独立性) を意味し、q^* の 1 からのずれは、系の相関 (統計的独立性からのずれ) の度合と考えられる。

ii) ベキ乗型分布

$q^* = 1$ は、確率分布が Boltzmann 分布 $p_i \sim \exp(-\beta x_i)$ (ガウス分布を含む) であることを意味する。q^* の 1 からのずれは、確率分布の Boltzmann 分布からのずれを表す。ガウス分布を含むより一般的な安定分布を極限分布とする、一般化中心極限定理 [8] と関係がある。

3 まとめ

現時点において、q の意味や S_q による記述の意義についてはまだ良く判っていないが、時系 (記号) 列の相関の場合において、系に特有なエントロピ指数 q^* という量が存在する。また、$q = q^*$ においてのみ、条件付き Tsallis エントロピの示量性 [7] が成立する。長時間 (長距離) 相関により、確率 p や状態数 W が独立な因子の積に分解できない非示量的な系に対して、条件付き Tsallis エントロピを用いて、$q = q^*$ の時にのみ示量的な記述が可能となると考えられる。

参考文献

[1] C. Tsallis, J. Stat. Phys. **52** (1988), 479; Braz. J. Phys. **29** (1999), 1; cond-mat/0010150.

[2] 阿部純義, 数理科学 439 (2000), 71-80.

[3] C. Tsallis *et al.*, Chaos Solitons and Fractals **8** (1997) 885; M.L. Lyra and C. Tsallis, Phys. Rev. Lett. **80** (1998) 53; U. Tirnakli *et al.*, cond-mat/0005210; L. Fronzoni *et al.*, Chaos Solitons and Fractals **11** (2000) 2361-2369.

[4] M. Buiatti, P. Grigoline and L. Palatella, Physica A **268** (1999) 214.

[5] Q. A. Wang *et al.*, Chaos Solitons and Fractals **13** (2002) 131.

[6] S. Abe and A. K. Rajagopal, Physica A **289** (2001) 157; quant-ph/0003145.

[7] T. Wada and T. Saito, Physica A **301** (2001) 284.

[8] S. Abe and A. K. Rajaopal, Europhys. Lett. **52** (2000) 610.