Title	量子情報の21世紀(第9回『非平衡系の統計物理』シンポジウム,研究会報告)
Author(s)	大矢, 雅則
Citation	物性研究 (2002), 77(5): 874-886
Issue Date	2002-02-20
URL	http://hdl.handle.net/2433/97177
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

研究会報告

量子情報の２１世紀

東京理科大学理工学部情報科学科
大矢雅則
E-mail: ohya@is.noda.sut.ac.jp

１．はじめに

量子情報理論は，確率論をベースとしたシャノン流の古典的な情報理論では扱えない量子状態などを用いた情報の表現と通信を取り扱う理論である．この量子情報理論の基礎となるのが，新しい確率論である量子確率論と量子エントロピー論である．量子情報理論の範疇で取り扱われるもの代表的なものとして，量子通信がある．１９８０年代より，ここ２０年ほど，完全に量子的な通信とは何かを考え，量子チャネルの数理，量子相互情報量（相互エントロピー）の定式化，量子通信における誤り確率，通信路容量などの厳密な理論的研究を行ってきたが，欧米でも量子確率に関わる多くの研究者がこの種の研究を行っており，こうした研究を通して，完全な量子通信が近い将来実現されると思われている．そうした通信のもっとも究極な形と考えられているのが，量子テレポーテーションである．これが可能になれば，どんな量子状態でもそのまま伝送することができるので，通信の革命になるものである．最近，私とドイツのフィットナーは，コヒーレント状態を含む実現可能な状態を用いて，任意の量子状態のテレポーテーションを可能にする方法を考案した[4,5]．我々の方法はテレポーテーションの工学的な実現に役立つものと考えている．量子状態は観測されるとその形を変えてしまい，盗聴されたことが分かるので，量子テレポーテーションは，情報伝送のセキュリティーの面でも非常に大切なものである．

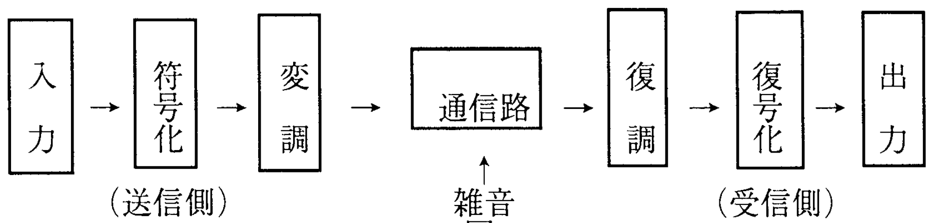
量子情報理論の延長上にあるものとして，量子コンピュータの研究がある．私とロシアのボロビッチは，昨年，量子情報理論のスキームに準じた量子アルゴリズムにカオス力学の状態変化のアイデアを導入することによって，NP完全問題の解が現実的な時間（多項式時間）で求められることを示した[22]．このNP完全問題を解く量子アルゴリズムは，その観測に対応する部分の処理を古典計算機におけるプロセス（カオス力学の状態変化）で行っており，それ故，観測に関わる部分が実現可能になる．これは，量子コンピュータとカオスシステムとを組み合わせたカオス量子コンピュータとも呼び得る新しいシステムである．

本稿では，量子情報に関連するトピックスの一つである量子伝送容量について述

べる．（本講演における量子コンピュータに関する文献は，[21,22]，量子テレポーテーションに関する文献は，[4,5,9,1]を参照．）

２．情報伝送過程の数理

情報伝送の全過程は通常次の図で表されている．



(図1)

なお，以下の議論ではチャネル（通信路）といえば雑音を含めたものを考えることにする．この節では，まず，この通信過程の古典，量子を問わない数理表現のエッセンスを説明しよう．

A を入力情報を記述するアルファベットの集合（もっと一般的な集合でもよい）とする：$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$．このとき入力空間 Ω は，Aの無限直積

$$\Omega = A^{\mathbf{Z}} \quad \left(\equiv \cdots\times A\times A\times\cdots = \prod_{-\infty}^{+\infty} A\right)$$

で与えられる．この入力空間が通信路にとって都合がよいものであれば Ω で記述された情報をそのまま通信路へ送ればよいが，そうでないときは，Ω と通信路にとって都合のよい他の空間 X との対応を考える必要がある．そこで

「 Ω から X への写像 ξ を符号化とよぶ 」

一般に上の写像 ξ には１対１であることを要求する場合が多いがここでも特に断わらない限りこれを仮定する．ここで，符号化の例をあげておこう．

（例１） 長さＭのアルファベットからなるメッセージ
$\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_M)$，$\omega_k\in A$ を二進符号（ツーとトンなど）からなる長さ N の系列へ符号化する．すなわち$\xi(\omega)\in\{0,1\}^{\mathrm{N}}\subset X$
（例２） （例１）のメッセージを電気信号に置き換える．
（例３） （例１）のメッセージを光信号や他の量子状態に置き換える．

（例２）は古典論的な対象であり，（例３）は量子的な対象である．なお，符号化は例１や例２のようなものをいくつか組み合わせてなされ，さらに，復元の方法までを込みにして効率のよい符号とは何かを考えることになる（符号理論）．

さて，あるメッセージ$\omega^{(k)}$の生起確率をp_kとし，こうしたメッセージの列を伝送するとする．このとき，この列 $\{\omega^{(k)}\}$ の有する情報量（エントロピー）は生起確率$p = \{p_k\}$ の関数として

$$S(p) = -\sum_k p_k \log p_k \tag{1.1}$$

で与えられる．この確率分布pはメッセージの状態を表しているので，メッセージ自体やメッセージの列を入力状態と呼ぶことになる．これらの入力状態を物理的に設計された通信路に送るとき，メッセージそれ自体やメッセージの列の情報量がどれほど正しく送られたかが問題になる．そうした議論のために次に必要になるのは通信路の数理である．

$\mathfrak{F}$をΩの部分集合から作られるσ集合体とし，入力状態を記述する可測空間を（$\Omega, \mathfrak{F}$），Xを符号化された入力状態を記述する空間とする．ここで，Xは生の入力空間同様，可測空間の場合もあり，ヒルベルト空間などの場合もある．通常（古典系）の情報理論では可測空間となる．入力空間と同様，出力空間も符号化されたままの空間X’と情報源と同様なアルファベットから作られる空間Ω’（多くの場合Ω’＝Ω）上で記述される．このとき，通信路の働きはXからX’への写像で表される．この写像をγで表すと，入力（信号）ωがある仕方ξで符号化され，それがチャネルγを通して伝送され，それが復号化$\tilde{\xi}$によって元のアルファベット（Ω＝Ω’の場合を考えて）にもどされるプロセスは次のようにかける．

$$\omega \xrightarrow{\xi} \xi(\omega) \xrightarrow{\gamma} \gamma \circ \xi(\omega) \xrightarrow{\tilde{\xi}} \tilde{\xi}(\gamma \circ \xi(\omega)) \tag{1.2}$$

このような通信プロセスの効率は相互エントロピーとエントロピーの比，シグナルと雑音（ノイズ）の比，誤り確率等によって測られる．

この通信過程の基本は，ωの生起確率と，ωを符号化した$\xi(\omega)$の生起確率は同じであるから，空間Xの状態（これも以下入力状態と呼ぶ）から空間X’の状態（出力状態）への変換ということになる．この入力状態を出力状態に移す写像がチャネルということになる．したがって，チャネルとは（1.2）のX上の確率分布の集合，確率測度の集合，密度行列の集合などのいわゆる状態の集合

からX' 上の状態の集合への写像ということになる.

以上より，$P(\Omega)$を確率測度(分布)全体からなる集合とすると，あるメッセージを通信する場合，メッセージの空間は$(\Omega,\mathfrak{F},P(\Omega))$で表され，Xを符号化された入力空間とすると，情報通信の全過程は

$$\Omega \xrightarrow{\xi} X \xrightarrow{\gamma} X' \xrightarrow{\tilde{\xi}} \Omega'$$

で表される．つまり，メッセージ$\omega\in\Omega$は符号化されて$\xi(\omega)$となり，チャネルを通って出力側へ符号化されたまま届いて$\gamma\circ\xi(\omega)$となり，そして復号化されて再びメッセージ$\tilde{\xi}\circ\gamma\circ\xi(\omega)$ となるのである.

ここで，空間Xは古典的対象のときもあるし，量子力学的対象である場合もある．例えば，Xが量子系を表すヒルベルト空間$\mathcal{H}$ならば，符号化された入力系は$(B(\mathcal{H}),\mathcal{S}(\mathcal{H}))$と表される．なお，$\mathcal{S}(\mathcal{H})$は$\mathcal{H}$上の密度作用素全体である．出力系も入力系と同様に記述される.

情報伝送過程をもう少し詳しく説明すると次のようになる：k番目のメッセージが確率λ_kで発生するM個のメッセージが受け手側に送られたとすると，M個のメッセージ列$(\omega^{(1)},\omega^{(2)},\omega^{(3)},\ldots,\omega^{(M)})$における各メッセージの生起確率分布は$\rho=(\lambda_k)$であり，これは古典系の状態である．$\xi$が古典的な符号化なら，$\xi(\omega)$は電気パルスのような古典的対象になり，$\xi$が量子符号化なら，$\xi(\omega)$はコヒーレント状態などの量子論的対象になる．前者は第1節で扱ったから，ここでは後者の場合を考える．すなわち，$\xi(\omega^{(k)})$は量子状態で，我々は$\xi(\omega^{(k)})$をσ_kで表すことにする．このようにしてメッセージ列の符号化された状態は,

$$\sigma=\sum_k \lambda_k\sigma_k$$

となり，この状態はチャネルγを通って伝送される．このチャネルはXの状態空間$\mathcal{S}(\mathcal{H})$からX'の状態空間$\mathcal{S}(\mathcal{H}')$への完全正写像$\Gamma^*$（$i.e.,\ \Gamma: B(\mathcal{H}')\to B(\mathcal{H})$を$\Gamma^*$の共役写像とすると，$\Gamma(I)=I$および$\forall n\in\mathbf{N}$，$\forall A_k\in B(\mathcal{H}), \forall\in A'_k\in B(\mathcal{H}')$に対して$\sum_{j,k=1}^{n}A_k^*\Gamma\left(A_k'^*A'_j\right)A_j\ge 0$を満たす写像）で表されるので，符号化されたままの量子出力状態は$\Gamma^*\sigma$である．情報伝送過程というのは状態変換の過程としてとらえることができるので，ΩとΩ'が古典系で，XとX'が量子系ならば，通信過程は

$$P(\Omega) \xrightarrow[\Xi^*]{} \mathcal{S}(\mathcal{H}) \xrightarrow[\Gamma^*]{} \mathcal{S}(\mathcal{H}') \xrightarrow[\tilde{\Xi}^*]{} P(\Omega')$$

と書ける．ここで Ξ^*は符号化ξに対応するチャネルであり，$\tilde{\Xi}^*$は復号化$\tilde{\xi}$に対応するチャネルである．

情報伝送の効率を表すチャネルの伝送容量（Channel Capacity）を計算するには相互エントロピーが必要になるので，次節では，シャノンの相互エントロピーを含む量子相互エントロピーについて復習しておく［7,18］．

3．量子相互エントロピー

古典系の相互エントロピーは入力系と出力系の間の同時確率分布を用いて，定義されていた．ところが量子系においては，一般に同時確率分布が存在しないということが知られている［8,18］．そこで，Ohyaは，量子入力系$(B(\mathcal{H}),\mathcal{S}(\mathcal{H}))$と量子出力系$(B(\mathcal{H}'),\mathcal{S}(\mathcal{H}'))$において，古典系の同時確率分布に代わるものとして，$\mathcal{S}(\mathcal{H})$から$\mathcal{S}(\mathcal{H}')$へのチャネル Λ^*が線形のとき，量子系の初期状態 ρ と終状態 $\Lambda^*\rho$ の間に存在する相関を表す合成状態 (compound state) を次のように定めた［12,13］：入力状態 ρ の Schatten 分解（１次元のスペクトル分解）を

$$\rho = \sum_k \lambda_k E_k$$

とすると，合成状態 σ_E は$\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ 上に

$$\sigma_E = \sum_k \lambda_k E_k \otimes \Lambda^* E_k$$

で定められる．ここで，E_kは１次元射影作用素である．この合成状態は古典系の同時確率分布をその特別な場合として含むことがわかっている．ところで，合成状態σ_Eはシャッテン分解 $E = \{E_k\}$ に依存するので添え字 E を付してある．

この合成状態を用いると，初期状態 ρ がチャネル Λ^* によって $\Lambda^*\rho$ に変換されたとき，ρ の有する情報のどれほどが終状態 $\Lambda^*\rho$ に伝えられたかを表す相互エントロピーを以下のように定めることができる．

量子入力状態 ρ と量子チャネル Λ^* に関する量子相互エントロピーは，次の条件を満たさなければならない．

(1) もし，チャネル Λ^*が恒等変換 idであれば，相互エントロピーは，フォ

ン・ノイマン エントロピーに一致しなければならない．すなわち，
$I(\rho;id)=S(\rho)\equiv -tr\rho\log\rho$.
(2) 系が古典系であれば，量子相互エントロピーは古典系の相互エントロピーに一致しなげればならない．
(3) 基本不等式 $0\le I(\rho;\Lambda^*)\le S(\rho)$ を満たす必要がある．

この３つの条件を満たすものとして，入力状態 ρ とチャネル Λ^* に関する相互エントロピー（情報量）は，

$$I(\rho;\Lambda^*)=\sup\left\{S(\sigma_E,\ \rho\otimes\Lambda^*\rho);E=\{E_k\}\right\} \tag{2.1}$$

で定められる［12,14］．ここで，左辺の上限は入力状態 ρ のシャッテン分解 $E=\{E_k\}$ に対して取り，$S(\bullet,\bullet)$ は相対エントロピーで，２つの状態 ρ,σ に対して，

$$S(\rho,\sigma)=tr\rho(\log\rho-\log\sigma)$$

で定められるものである［24］．さらに，この相互エントロピーは次のように表すことができる．

＜定理１＞　$S(\sigma_E,\sigma_0)=\sum_n \lambda_n S(\Lambda^* E_n,\Lambda^*\rho)$.

また，古典系の相対エントロピーの有限直交分割による定義と同様に量子系の相互エントロピーも状態 ρ の有限直交分解（$\rho=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\rho_k$，$n<+\infty$，$s(\rho_i)\perp s(\rho_j)(i\neq j)$）によって定めることもできる［16］．つまり，

＜定理２＞ $F(\rho)$ を ρ の全ての有限直交分解の集合とするとき，

$$I(\rho;\Lambda^*)=\sup\left\{\sum_k \lambda_k S(\Lambda^*\rho_k,\Lambda^*\rho);\rho=\sum_k\lambda_k\rho_k\in F(\rho)\right\}.$$

＜定理１＞を使うと次の基本的不等式が証明される．

＜定理３＞ 基本不等式：$0\le I(\rho;\Lambda^*)\le\min\{S(\rho),S(\Lambda^*\rho)\}$ ．等号は $\Lambda^*=id$（恒等写像）のときのみ成立する．

なお，この量子相互エントロピーは入力系が古典系で出力系が量子系のときは，入力状態が確率分布または確率測度であるため シャッテン分解は一意になり，それゆえ，上限を取る必要はなくなる．例えば，ある記号列 $\left\{\omega^{(k)}\right\}$ が確率 $p=\left\{p_k\right\}$ で生起する場合，p 自体の分解は

$$p=\sum_k p_k\delta_k \quad (\delta_k \text{ はデルタ測度；} \delta_k(j)=\delta_{kj})$$

と一意に表せるから，どのようなチャネル Λ^* を用いても，相互エントロピーは

$$I\left(p;\Lambda^*\right)=\sum_k p_k S\left(\Lambda^*\delta_k,\Lambda^* p\right)$$

と表せることになる．さらに，入力系が古典系の場合は，$\sum_k p_k S(\Lambda^*\delta_k)$が有限であれば，上の相互エントロピーは

$$I\left(p;\Lambda^*\right)=S(\Lambda^* p)-\sum_k p_k S(\Lambda^*\delta_k)$$

と表せることになる．この形が古典入力系と量子出力系に対して，Holevo［6］，Levitin［10］等によって論じられたもので，純粋に量子入力系と量子出力系に対する量子相互エントロピー（2.1）の特別な場合である．

相互エントロピー $I\left(\rho;\Lambda^*\right)$ は，古典系のそれと同様な性質持っているが，特に，＜定理３＞の不等式より，量子相互エントロピー$I\left(\rho;\Lambda^*\right)$ を使って量子通信における様々な尺度が定められるのである．例えば，チャネル Λ^*と初期状態ρに関する効率がエントロピー・相互エントロピー比（ＥＭＲ）

$$r\left(\rho;\Lambda^*\right)=\frac{I\left(\rho;\Lambda^*\right)}{S(\rho)}$$

よって与えられる．また，与えられたチャネルΛ^*とある適当な状態の集合$\mathcal{S}$に対して送信できる情報量の最大値である次の節で詳しく論ずるチャネルの伝送容量（通信路容量）は次のように与えられるのである：

$$C^{\mathcal{S}}\left(\Lambda^*\right)=\sup\left\{I\left(\rho;\Lambda^*\right);\rho\in\mathcal{S}\right\}.$$

ところで，文献［11,14］では，状態ρの有限直交分解の代わりにρの有限分

解を使った準(pseudo)相互エントロピー$I_p(\rho;\Lambda^*)$が次のように定められている：

$$I_p(\rho;\Lambda^*) = \sup\left\{\sum_k \lambda_k S\left(\Lambda^*\rho_k, \Lambda^*\rho\right); \rho = \sum_k \lambda_k \rho_k, \textit{finite decomposition}\right\}$$

ただ，このエントロピーは確率測度に対する相互エントロピーの定義に直接対応しないばかりでなく，数値計算も難しいものである．

なお，ここで論じた密度作用素に対するエントロピー，相対エントロピー，および相互エントロピーは，通常の測度論的定式化をその特殊な場合として含む，より一般的な非可換（C*-）力学系においても定式化されている［2,7,18,23］．さらに，この非可換力学系の相互エントロピーを用いて，量子系の一般化された力学的（ＫＳ）エントロピーや一般の量子状態のフラクタル次元を導入したり，力学系のカオスを分類することなどができるのである［15］．

４． 量子チャネルの伝送容量

この節で，情報伝送の効率を表すチャネルの伝送容量（通信路容量（Channel Capacity））について論じよう．情報通信過程を扱うときは，何をどう扱おうとしているのかはっきりさせておく必要がある．例えば，量子チャネル$\gamma = \Gamma^*$自体の伝送容量（情報伝送の能力）を知りたいなら，量子空間Xにおける量子状態から始める必要があり，メッセージに対する古典状態から始めてはならない．もしメッセージの符号化と復号化を含めた全通信路の伝送容量を求めたいのであれば，それは$\tilde{\xi}\circ\gamma\circ\xi = \tilde{\Xi}^*\circ\Gamma^*\circ\Xi^*$というチャネルの伝送容量を求めることになるから，古典状態から始める必要がある．後者の場合はほぼ古典的な通信過程と同様なものになり，様々な量の計算はシャノンの通信理論をそのまま適用すればできる．前者の場合は状況が異なり，純粋に量子論的なものになるから，シャノンの通信理論の枠組みでは処理しきれなく，量子情報理論特有な扱いが必要になる．いずれにせよ，チャネルΛ^*の伝送容量を求めるときは，研究したい対象によって定まる適当な集合上で，量子あるいは古典状態ρに対する相互エントロピー$I(\rho;\Lambda^*)$の上限を求めればよい．

そこで，量子通信過程における２つのタイプの伝送容量，すなわち，量子チャネルΓ^*の伝送容量と，古典チャネル（古典－量子－古典チャネル）$\tilde{\Xi}^*\circ\Gamma^*\circ\Xi^*$の伝送容量の求め方について説明する［16,17］．

（１）量子チャネルの伝送容量

量子チャネルの伝送容量とは，チャネル自身の情報伝達能力であり，古典的な対象として取り扱っかわれるメッセージの符号化の仕方にはよらない．したがって，任意の量子状態から始めて相互エントロピーを求め，その上限をとればよい．この点において誤解が生じることがよくあるので注意しておこう．例えば，ある人はメッセージの符号化から始めて相互エントロピーを求め，その上限をとって量子チャネルの伝送容量を計算したというが，これは正しくない．たとえ符号化が量子符号化だとし，その符号化されたメッセージを量子チャネルを通して受け手側に送ったとしても，もともと古典状態から始めているからその伝送容量は量子チャネルそれ自体の伝送容量ではない．その場合は，古典－量子－古典チャネルの伝送容量であり，前述したように通常のシャノンの理論が適用されるものである．これにつては後で説明する．

量子チャネルΓ^*の伝送容量は，$\mathcal{S}_0(\subset \mathcal{S}(\mathcal{H}))$を用意された量子状態の集合とすると，$\mathcal{S}_0$に関するチャネル$\Gamma^*$の伝送容量は，

$$C^{\mathcal{S}_0}(\Gamma^*) = \sup\{I(\rho;\Gamma^*)\,;\,\rho \in \mathcal{S}_0\}$$

で与えられる．ここで，$I(\rho;\Gamma^*)$は式(2.1)で$\Lambda^* = \Gamma^*$としたときの相互エントロピーである．$\mathcal{S}_0 = \mathcal{S}(\mathcal{H})$のときは，$C^{\mathcal{S}(\mathcal{H})}(\Gamma^*)$は単純に$C(\Gamma^*)$とかき，伝送容量 $C(\Gamma^*)$は

$$C(\Gamma^*) = \sup\{I(\rho;\Gamma^*)\,;\,\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})\}$$

のようにかける．相互エントロピーの単調増加性より次の不等式を得る［16］：

$$0 \le C^{\mathcal{S}_0}(\Gamma^*) \le \sup\{S(\rho)\,;\,\rho \in \mathcal{S}_0\}$$

（2）古典－量子－古典チャネルの伝送容量

古典－量子－古典（CQC）チャネルの伝送容量はメッセージの符号化から始まる通信過程全体の伝送容量であるから，符号化（と復号化）も含めた伝送容量である．古典分布である入力状態ρはメッセージの確率分布$\{\lambda_k\}$であり，前述したようにそのシャッテン分解は一意である：$p = \sum_n \lambda_n \delta_n$．したがって，チャネル$\tilde{\Xi}^* \circ \Gamma^* \circ \Xi^*$に対する相互エントロピーは

$$I(\rho;\tilde{\Xi}^*\circ\Gamma^*\circ\Xi^*)=\sum_k \lambda_k S\left(\tilde{\Xi}^*\circ\Gamma^*\circ\Xi^*\delta_k,\tilde{\Xi}^*\circ\Gamma^*\circ\Xi^*\rho\right)$$

となる．もし符号化Ξ^*が量子符号化なら，$\Xi^*\delta_k$は量子状態で表されるから，この符号化された量子状態をσ_kと書くことにすれば，$\sigma=\Xi^*\rho=\sum_k \lambda_k\sigma_k$となる．よって，上記の相互エントロピーは，

$$I(\rho;\tilde{\Xi}^*\circ\Gamma^*\circ\Xi^*)=\sum_k \lambda_k S\left(\tilde{\Xi}^*\circ\Gamma^*\sigma_k,\tilde{\Xi}^*\circ\Gamma^*\sigma\right)$$

とかける．この表現は古典的メッセージの符号化から復号化までの通信過程の相互エントロピーであり，C-Q-Cチャネルの伝送容量は，

$$C^{P_0}\left(\tilde{\Xi}^*\circ\Gamma^*\circ\Xi^*\right)=\sup\left\{I(\rho;\tilde{\Xi}^*\circ\Gamma^*\circ\Xi^*)\,;\,\rho\in P_0\right\}$$

となる．ここで$P_0(\subset P(\Omega))$は入力状態として用意された確率分布（または，測度）全体からなる集合である．さらに，符号化が色々と選べる場合，すなわち，符号化に対してフリーな場合の伝送容量は，全ての確率分布と全ての符号化 Ξ^*に対して相互エントロピーの上限をとることによって求められる：

$$C_c^{P_0}\left(\tilde{\Xi}^*\circ\Gamma^*\right)=\sup\left\{I(\rho;\tilde{\Xi}^*\circ\Gamma^*\circ\Xi^*)\,;\,\rho\in P_0,\Xi^*\right\}$$

最後に，様々な符号化と復号化がともに選べるときの伝送容量は，

$$C_{cd}^{P_0}\left(\Gamma^*\right)=\sup\left\{I(\rho;\tilde{\Xi}^*\circ\Gamma^*\circ\Xi^*)\,;\,\rho\in P_0,\Xi^*,\tilde{\Xi}^*\right\}$$

となる．これらの伝送容量$C_c^{P_0},C_{cd}^{P_0}$はいずれも，量子チャネルΓ^*自身の能力を測るものではなく，符号化や復号化を得たΓ^*の能力を測るものである．

なお，$\sum_k \lambda_k S\left(\Gamma^*\sigma_k\right)$が有限である場合は，

$$I(\rho;\tilde{\Xi}^*\circ\Gamma^*\circ\Xi^*)=S\left(\tilde{\Xi}^*\circ\Gamma^*\sigma\right)-\sum_k \lambda_k S\left(\tilde{\Xi}^*\circ\Gamma^*\sigma_k\right)$$

とかける．さらに，ρが密度関数$f(\lambda)$をもつ確率測度で，各λが符号化された量子状態 $\sigma(\lambda)$に対応しているならば，$\sigma=\int f(\lambda)\sigma(\lambda)d\lambda$となり，

$$
\begin{aligned}
&I(\rho;\tilde{\Xi}^*\circ\Gamma^*\circ\Xi^*) = S\left(\tilde{\Xi}^*\circ\Gamma^*\sigma\right) - \int f(\lambda) S\left(\tilde{\Xi}^*\circ\Gamma^*\sigma(\lambda)\right) d\lambda \\
&\le I(\rho;\Gamma^*\circ\Xi^*) = S\left(\Gamma^*\sigma\right) - \int f(\lambda) S\left(\Gamma^*\sigma(\lambda)\right) d\lambda
\end{aligned}
$$

となる．上の不等式の最後の項がホレボー限界と呼ばれるものであり，それぞれの通信過程でこの右辺を計算することによって様々な限界が得られている［19,25］．前述の３つの伝送容量$C^{P_0}, C_c^{P_0}, C_{cd}^{P_0}$は次の不等式を満たす．

$$
0 \le C^{P_0}\left(\tilde{\Xi}^*\circ\Gamma^*\circ\Xi^*\right) \le C_c^{P_0}\left(\tilde{\Xi}^*\circ\Gamma^*\right) \le C_{cd}^{P_0}\left(\Gamma^*\right) \le \sup\left\{S(\rho)\,;\,\rho\in P_0\right\}
$$

ここでの$S(\rho)$とはフォン・ノイマンの量子エントロピーではなく，シャノンのエントロピー：$-\sum_k \lambda_k \log\lambda_k$である．

以上のように，これらの伝送容量は一般に異なり，どのチャネルの伝送容量を考えているのかによって使い分けなければならない．量子チャネル自身の伝送容量なのか，それともC-Q-Cチャネルの伝送容量なのか，あるいは符号化フリーの伝送容量なのかをはっきりさせておく必要があるのである．量子チャネル自体の伝送容量の計算は文献［3,20］などでなされている．

文献

[1] L.Accardi and M.Ohya, Teleportation of general quantum states, quant-ph/9912087, 1999.

[2] H.Araki, Relative entropy of states of von Neumann algebras, RIMS, Kyoto University, Vol.11, pp.809-833, 1976.

[3] S.Furuichi, M.Ohya and H.Suyari, Computation of mutual entropy in quantum amplifier processes, Quantum Communications and Measurements, Vol.3, pp.147-155, 1997.

[4] K-H.Fichtner and M.Ohya, Quantum teleportation with entangled states given by beam splittings, Commun. Math. Phys, Commun. Math. Phys., Vol.222, 229-247, 2001.

[5] K-H.Fichtner and M.Ohya, Quantum teleportation and beam splitting, to appear in Commun. Math. Phys.

[6] A.S.Holevo, Some estimates for the amount of information transmittable by a

quantum communication channels (in Russian), Problemy Predachi Informacii, Vol.9, pp.3-11, 1973.

[7] R.S.Ingarden, A.Kossakowski and M.Ohya, Information Dynamics and Open Systems, Kluwer, 1997.

[8] R.S.Ingarden and K.Urbanik, Quantum information thermodynamics, Acta Physica Polon, Vol.21, pp.281-304, 1962.

[9] K.Inoue, M.Ohya and H.Suyari, Characterization of quantum teleportation by nonlinear quantum channel and quantum mutual entropy, Physica D, 120, 117-124, 1998.

[10] L.B.Levitin, Physical information theory for 30 years: Basic concepts and results , Springer-Lect. Note in Phy., No.378, pp.101-110, 1991.

[11] N.Muraki, M.Ohya and D.Petz, Entropies of general quantum states, Open Systems and Information Dynamics, Vol.1, No.1, pp.43-56, 1992.

[12] M.Ohya, On compound state and mutual information in quantum information theory, IEEE Information Theory, Vol.29, pp.770-774, 1983.

[13] M.Ohya, Note on quantum probability, IL Nuovo Cimento, Vol.38, pp.402-404, 1983.

[14] M.Ohya, Some aspects of quantum information theory and their applications to irreversible processes, Reports on Mathematical Physics, Vol.27, pp.19-47, 1989.

[15] M.Ohya, Complexity and fractal dimension for quantum states, Open systems and Information Dynamics, Vol.4, pp.141-157, 1997.

[16] M.Ohya, Fundamentals of quantum mutual entropy and capacity, Open System and Information Dynamics, Vol.6, No.1, pp.69-78, 1999.

[17] 大矢雅則、量子コンピュータの数理、丸善株式会社、1999.

[18] M.Ohya and D.Petz, Quantum Entropy and its Use, Springer-Verlag, 1993.

[19] M.Ohya, D.Petz and N.Watanabe, On capacity of quantum channels, Probability and Mathematical Statistics, Vol.17, pp.179-196, 1997.

[20] M.Ohya, D.Petz and N.Watanabe, Numerical computation of quantum capacity, International Journal of Theoretical Physics, Vol.37, No.1, pp.507-510, 1998.

[21] M.Ohya and I.V.Volovich, Quantum computer, Teleportation and Cryptography, to be published, Springer-Verlag, 2002.

[22] M.Ohya and I.V.Volovich, Quantum computing, NP-complete problems and chaotic dynamics, quant-ph/9912100, 1999.

[23] A.Uhlmann, Relative entropy and the Wigner-Yanase-Dyson-Lieb concavity in interpolation theory, Communication in Mathemrical Physics, Vol.54, pp.21-32, 1977.

[24] H.Umegaki, Conditional expectations in an operator algebra, IV, Kodai Mathematical Seminar Reports, Vol.44, pp.59-85, 1962.

[25] H.P. Yuen and M.Ozawa, Ultimate inforation carrying limit of quantum systems, Phy. Rev. Lett., Vol.70, pp.363-366, 1993.