量子分解法によるスペクトル解析

東北大学大学院情報科学研究科
尾 畑 伸 明[*1]

1 はじめに

大きな行列の固有値分布や確率変数のある種のスケーリング和から得られる確率分布を漸近的に求めることは様々な研究分野において必要とされる. この問題の解決を量子確率論 (あるいは代数的確率論 [4]) の立場から図るのは興味深い試みではなかろうか. 最近, 大きなグラフのラプラシアンのスペクトル解析がこの観点から議論され, 量子分解と量子中心極限定理を骨子とする新しい方法論が形成されてきた [8], [9], [10]. 本稿の目的は, このアイデアの概略をいくつかの例とともに説明することにある.

量子確率論は, 量子力学とともに登場してきたとも言えるが, 数学的な定式化と言う意味では, J. von Neumann の有名な著書「量子力学の数学的基礎」(原著 1932 年) が一つの起源である. その後, 作用素環論などの文脈で非可換確率論の名の下で議論されてきたが, 1980 年代初頭に L. Accardi が, 量子系の統計を基礎づける確率論という意図をもって量子確率論という名称を積極的に用い始めた。最近では, 数学的な枠組みとしてより一般であり, 量子系の統計のための確率論という狭い範疇を抜け出していることから代数的確率論[*2]という名称を使うことが多くなっている.

よく知られているように, 測度論的確率論[*3]は確率空間と呼ばれる三つ組 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を基礎に展開されるのに対して, 代数的確率論は $*$-代数と状態の組 $(\mathcal{A}, \phi)$ を基にしている. 測度論的確率論は, 標準的な方法で代数的確率論の特別なものとして取り扱われる. 与えられた測度論的確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ に対して, Hilbert 空間 $\mathcal{H} = L^2(\Omega, P)$ を考え, その上の (有界, または適当な定義域の条件の下で非有界でもよい) 作用素のなす $*$-代数を $\mathcal{A}$ とする. $\mathbf{1} \in \mathcal{H}$ を 1 のみを値として取る定数関数として, ベクトル状態 ϕ を $\phi(a) = \langle \mathbf{1}, a\mathbf{1} \rangle$, $a \in \mathcal{A}$, で定義すると $(\mathcal{A}, \phi)$ は代数的確率空間になる. 古典確率変数 X は Ω 上の可測関

---

*1 E-mail: obata@math.is.tohoku.ac.jp

*2 algebraic probability theory. 局所コンパクト群などある種の代数構造をもった空間上の確率測度の研究を代数的確率論と称する人々もいるが, これは古典確率論の範疇であり我々のものとは意を異にする.

*3 古典確率論, あるいは Kolmogorov 流確率論とも呼ばれる.

数であるから, $\mathcal{H}$ にかけ算作用素 $\tilde{X}$ として作用することができる. この意味で $\tilde{X} \in \mathcal{A}$ であって,

$$\phi(\tilde{X}^m) = \langle \mathbf{1}, \tilde{X}^m \mathbf{1} \rangle = \int_\Omega X^m(\omega)\, P(d\omega) = \mathbf{E}(X^m), \qquad m = 1, 2, \ldots,$$

が成り立つ. つまり, X のもつ確率的な情報 (確率分布) は代数的確率変数 $\tilde{X}$ に移植されたことになる. この対応 $X \leftrightarrow \tilde{X}$ が確率論における「量子=古典対応」である. 厳密な主張をするには解析的な条件を要するが, 大雑把には, $*$-代数 $\mathcal{A}$ が可換であることと確率空間が古典に帰着することが同等である. したがって, Hilbert 空間上の自己共役作用素一つを単独で考えることは, 古典=量子対応の観点から見れば, 古典確率論を議論することと同等と考えられる.

量子=古典対応によって, 古典確率変数を量子確率論の文脈で考察する利点は何であろうか? 一つには, タイトルにある量子分解によって, 古典論では見えなかった構造が現れてくるからである. 例えば, Hudson–Parthasarathy [12] による量子伊藤解析において, Brown 運動 $\{B_t\}$ は,

$$B_t = A_t + A_t^* \tag{1.1}$$

のように消滅過程と生成過程の和に分解する. これらは, 互いに非可換な量子確率過程であり, 交換関係 $A_t A_s^* - A_s^* A_t = \min\{s, t\}$ が成り立つ. Hudson–Parthasarathy の量子確率解析は $\{A_t\}$, $\{A_t^*\}$ を別々に扱うことから出発する. 一方で, Brown 運動が各時点で独立なホワイトノイズ $\{W_t\}$ の和であるという観点からホワイトノイズ解析が発展した. ホワイトノイズを量子確率論の観点からとらえれば,

$$W_t = a_t + a_t^* \tag{1.2}$$

のように, 各時点における消滅作用素と生成作用素の和に分解する. これらを量子ホワイトノイズと呼ぶ. したがって, 量子確率論においては, 古典ホワイトノイズは「素」な確率過程ではなく, 量子ホワイトノイズがより本源的な役割を演ずる. 例えば, ホワイトノイズの高次巾などの従来の伊藤理論を越えた特異なノイズを含む確率微分方程式の研究が発展している (例えば, [5], [13], 及びそこに引用されている文献).

実は, 上に述べた分解 (1.1) (1.2) は量子分解の一例である. 別の例として, コイン投げのモデルである Bernoulli 型確率変数 X の量子分解は,

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \sigma^+ + \sigma^- \tag{1.3}$$

で与えられる．右辺の表示はしばしば量子コイン投げと呼ばれるものである．Fermion 交換関係 $\sigma^-\sigma^+ + \sigma^+\sigma^- = 1$ に注意しよう．

このように，量子分解はこれまでも具体例を通して議論されてきたが，一般論のためには，古典=量子対応によって古典確率変数を代数的確率変数とみなすだけでは不十分である．代数的確率変数としてとらえ直した自己共役作用素も含めて，一般の確率変数に対して量子分解という概念を初めて明示的に導入したのは Hashimoto [8] である．そこでは，量子分解が Accardi–Bożejko [1] による「確率測度のガウス化」のアイデアに基づくことが明らかにされ，応用として，[2], [7] に端を発する Cayley グラフに付随する量子中心極限定理によるスペクトル解析に新しい方向が与えられた．それと前後して，共同研究 [9], [10] によって距離正則グラフのスペクトル解析において量子分解法の有効性が示され，新しいスペクトル解析法として，さらに多くの応用が期待されるところとなった．

2 相互作用フォック確率空間

2.1 相互作用フォック空間

Boson や Fermion Fock 空間を特殊なものとして含む，より一般の「相互作用 Fock 空間」が Accardi–Lu–Volovich [3] によって導入された．もともと，量子物理の Hamilton 模型の確率極限を記述するために導入されたが，確率測度のガウス化 [1] の観点からも重要性が認識されている．本稿で必要とするものは，基礎となる Hilbert 空間が 1 次元，つまり 1 モードの場合だけである．*4

相互作用 Fock 空間は，非負数列 $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ に付随して定義される．ただし，$\lambda_0 = 1$ と，ある m で $\lambda_m = 0$ であれば，その先のすべての $n \geq m$ で $\lambda_n = 0$ と仮定する．すべての m で $\lambda_m > 0$ か，そうでなければ $\lambda_m > 0$ となっている最後の番号 m_0 をとって，1 次元空間の直和 Hilbert 空間

$$\Gamma = \sum_{n=0}^{\infty} \oplus \mathbb{C}\Phi_n, \qquad \Gamma = \sum_{n=0}^{m_0} \oplus \mathbb{C}\Phi_n$$

を用意する．ここに $\{\Phi_n\}$ は完全正規直交基底である: $\langle \Phi_m, \Phi_n \rangle = \delta_{mn}$．次に Γ 上の線

*4 したがって，相互作用 Fock 空間という名称はいささか大げさに聞こえる．無限モードの場合に定義した (例えば [5]) 荷重付 Fock 空間 (weighted Fock space) の特殊なものである．もっとも，数学的には，荷重付 Fock 空間は相互作用 Fock 空間の特殊なものであるし，その上，Boson Fock 空間など相互作用がなくても定義上は相互作用 Fock 空間となる．

形作用素 $a^{\pm}$ を

$$a^{+}\Phi_n = \sqrt{\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}}\,\Phi_{n+1}, \quad n \geq 0, \tag{2.1}$$

$$a^{-}\Phi_n = \sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}}\,\Phi_{n-1}, \quad n \geq 1, \quad a^{-}\Phi_0 = 0, \tag{2.2}$$

によって定義する (必要なら $0/0 = 0$ とする). 自然な定義域を考えれば, $a^{\pm}$ は互いに共役な閉作用素になる. こうして定義された $\Gamma(\mathbb{C}, \{\lambda_n\}) = (\Gamma, \{\lambda_n\}, a^{+}, a^{-})$ を $\{\lambda_n\}$ に付随した相互作用 Fock 空間と呼ぶ.

すぐにわかる関係式として

$$a^{+}a^{-}\Phi_n = \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}\,\Phi_n, \quad n \geq 1; \quad a^{+}a^{-}\Phi_0 = 0, \tag{2.3}$$

$$a^{-}a^{+}\Phi_n = \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}\,\Phi_n, \quad n \geq 0, \tag{2.4}$$

$$a^{+n}\Phi_0 = \sqrt{\lambda_n}\,\Phi_n, \quad n \geq 0. \tag{2.5}$$

したがって, 有名な交換関係は次のようにして実現される:

例 2.1 Boson 交換関係: $a^{-}a^{+} - a^{+}a^{-} = 1$. $\lambda_n = n!$ と取ればよい.

例 2.2 Fermion 交換関係: $a^{-}a^{+} + a^{+}a^{-} = 1$. $\lambda_0 = \lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = 0$.

例 2.3 自由 (free) 交換関係: $a^{-}a^{+} = 0$. すべての n に対して $\lambda_n = 1$.

これらは q-パラメータで補間される.

例 2.4 q-交換関係: $a^{-}a^{+} - qa^{+}a^{-} = 1$, $-1 \leq q \leq 1$. これは

$$\lambda_n = [n]_q! = [n]_q[n-1]_q \cdots [1]_q, \quad [n]_q = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1},$$

ととればよい.

2.2 直交多項式

数直線 $\mathbb{R}$ 上の確率測度 μ ですべての次数のモーメントが有限であるもの

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^m \mu(dx) < \infty, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

を考えよう．単項式の列 $1, x, x^2, \ldots$ に Gram–Schmidt の直交化を施して直交多項式 $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ が得られる．ただし，$P_n(x) = x^n + \ldots$ のように最高次の係数は 1 となるように正規化しておく．このとき，$\{P_n\}$ は有名な 3 項間漸化式をみたす:

$$P_0(x) = 1, \tag{2.6}$$

$$P_1(x) = x - \alpha_1, \tag{2.7}$$

$$(x - \alpha_{n+1})P_n(x) = P_{n+1}(x) + \omega_n P_{n-1}(x). \tag{2.8}$$

ここに現れる 2 つの定数列 $\alpha_n \in \mathbb{R}$ と $\omega_n \geq 0$ は直交多項式を特徴づける．合わせて Szegö–Jacobi パラメータと呼ぶ．

Gram–Schmidt の直交化が有限で終わる場合 (つまり，ある n で x^{n+1} が低次の多項式と一次従属になる場合) は，$\{P_n\}$ は有限の n で終わり，Szegö–Jacobi パラメータも有限数列の対ということになる．この場合，必要なら，先は 0 として Szegö–Jacobi パラメータを無限数列の対と考えてもよい．このような退化した現象は，はじめの確率測度 μ が有限集合に集中しているとき，つまり，デルタ測度の有限和のときに限って起こる．以下では，このような退化した場合をいちいち注意しないが，一般の場合と殆ど並行した議論が通用する．

定 理 2.1 (Accardi–Bożejko [1]) 確率測度 μ に付随する直交多項式を $\{P_n\}$ とし，その Szegö–Jacobi パラメータを $\{\alpha_n\}$ と $\{\omega_n\}$ とする．数列 $\{\lambda_n\}$ を

$$\lambda_0 = 1, \qquad \lambda_1 = \omega_1, \qquad \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = \omega_{n+1},$$

で定義し，付随する相互作用 Fock 空間を $\Gamma(\mathbb{C}, \{\lambda_n\})$ とする．このとき，$\Gamma(\mathbb{C}, \{\lambda_n\})$ から $L^2(\mathbb{R}, \mu)$ への等距離写像 U で次の性質をもったものが一意的に存在する：

$$U\Phi_0 = P_0, \qquad Ua^+U^*P_n = P_{n+1}, \qquad Q = U(a^+ + a^- + \alpha_N)U^*,$$

ここで Q は x によるかけ算作用素であり，$L^2(\mathbb{R}, \mu)$ に稠密な定義域をもつ．

実際，$U : \sqrt{\omega_1 \ldots \omega_n}\,\Phi_n \mapsto P_n$ が求めるものとなる．

注 意 次は同値な条件である:

(i) U がユニタリ．

(ii) U は $L^2(\mathbb{R}, \mu)$ の上への写像．

(iii) 多項式全体が $L^2(\mathbb{R}, \mu)$ の稠密な部分空間となっている．

これらが一般に成り立たないことは, Stieltjes の例から知られる:

$$\mu(dx) = \begin{cases} x^{-\log x}\,dx, & x \in [0,\infty) \\ 0, & \text{その他}. \end{cases}$$

実際, μ は有限測度であり, すべての次数のモーメントをもつが, $\sin(2\pi \log x)$ がすべての多項式と直交することは容易にわかる.[*5]

2.3 確率変数の量子分解

確率変数 X の確率分布を μ とし, 前と同様に, すべての次数のモーメントは有限であると仮定する. 明らかに,

$$\mathbf{E}(X^m) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m \mu(dx) = \langle P_0, Q^m P_0 \rangle_{L^2(\mu)}, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots.$$

ここで定理 2.1 を用いると, 等距離写像 U によって X は 3 つの成分に分解される :

$$X = a^+ + a^- + \alpha_N. \tag{2.9}$$

これを確率変数 X の量子分解という. ただし, α_N は $\alpha_N \Phi_n = \alpha_n \Phi_n$ で定義される対角型作用素である. 明らかに,

$$\mathbf{E}(X^m) = \langle \Phi_0, (a^+ + a^- + \alpha_N)^m \Phi_0 \rangle, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2.10}$$

もう少しきちんと定式化するには代数的確率空間 (または量子確率空間) を導入して述べるのがよい.

定 義 2.2 $*$-代数 $\mathcal{A}$ とその上の状態 ϕ の組 $(\mathcal{A}, \phi)$ を代数的確率空間という. 代数的確率空間は, $\mathcal{A}$ が可換代数のとき古典的, そうでないとき量子的と呼ばれる.

定 義 2.3 代数的確率空間 $(\mathcal{A}, \phi)$ において $a \in \mathcal{A}$ を代数的確率変数という.[*6] 2 つの代数的確率変数 $a \in (\mathcal{A}, \phi)$, $b \in (\mathcal{B}, \psi)$ が確率同値であるとは, すべての次数の混合モーメントが一致するときにいう:

$$\phi(a^{\epsilon_1} \ldots a^{\epsilon_m}) = \psi(b^{\epsilon_1} \ldots b^{\epsilon_m}),$$

ここで $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_m \in \{+1, *\}$, $m = 1, 2, \ldots$.

[*5] 拙著 [4, 定理 2.6.6] の記述は誤りを含んでいる. ご指摘いただいた洞彰人氏 (岡山大学) に感謝する.

[*6] 場合によっては, 状態代数を考えて合わせた定義 (例えば, [4] を参照) がより適切であるが, ここでは深入りしない.

相互作用 Fock 空間 $\Gamma(\mathbb{C}, \{\lambda_n\})$ が与えられたとき, 生成・消滅作用素 $a^{\pm}$ で生成される $*$-代数と真空ベクトル Φ_0 に対応するベクトル状態の組から代数的確率空間が自然に得られる. これを相互作用 Fock 確率空間と呼ぼう. そうすると, (2.9) の意味するところは, 与えられた古典確率変数 X に対して, 相互作用 Fock 確率空間に確率同値な代数的確率変数 $a^+ + a^- + \alpha_N$ が存在し, その代数的確率変数は 3 つの成分に標準的に分解 (量子分解) される, ということである. この分解によって, 古典確率変数を代数的に調べる道が拓かれる.

2.4 自己共役作用素 (オブザーバブル) の量子分解

Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上に自己共役作用素 A が与えられたとして, そのスペクトル分解を

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda E(d\lambda)$$

とおこう. A をある状態 ϕ で観測するとき, 観測値の確率分布 $\mu(d\lambda) = \phi(E(d\lambda))$ が重要になる. ここで, A は有界作用素とは限らないが, $\phi(A^m)$ は確定しているものとする. 言い替えれば, μ のすべての次数のモーメントが有限であるとする. この確率測度 μ に付随する相互作用フォック確率空間を構成すると, A の量子分解

$$A = a^+ + a^- + \alpha_N$$

が得られる. この観点から, 代数的確率論を経由して A のスペクトル問題にアプローチ可能となる.

ここに述べたことは, 前節と裏腹のことに過ぎない. 実際, 単独の自己共役作用素 A と状態 ϕ が与えられたとき, ϕ の下で A のもつ統計的な性質は, 古典確率空間 $(\mathbb{R}, \mu)$ 上の確率変数 $X(x) = x$ にすべて移される.

3 問題と方法

3.1 グラフ上のランダムウォークと隣接作用素

一般に, 点の集合 V とその 2 点部分集合からなる集合 $E \subset \{\{x, y\}\,;\, x, y \in V, x \neq y\}$ が与えられたとき, (V, E) をグラフ (無向グラフ) という. E の元をそのグラフの枝 (または辺) という. $\{x, y\} \in E$ であるとき, x, y は隣接しているといい, $x \sim y$ という記号も用いる. グラフ (V, E) が与えられたとき,

$$A_{xy} = \begin{cases} 1, & x \sim y, \\ 0, & \text{その他}, \end{cases} \tag{3.1}$$

で定まる対称行列 A を隣接行列という．すぐにわかるように，$n \geq 1$ に対して A^n の (x,y)-成分は x と y を結ぶ長さ n の道[*7]の個数である．

隣接行列は $\mathcal{H} = \ell^2(V)$ に作用する:

$$Af(x) = \sum_{y \in V} A_{xy} f(y) = \sum_{y \sim x} f(y), \qquad f \in \mathcal{H}.$$

$x \in V$ に対して，隣接している点の個数

$$\kappa(x) = |\{y \in V\,;\, y \sim x\}|$$

を x の次数という．A を少し変形した

$$\Delta f(x) = \kappa(x) f(x) - \sum_{y \sim x} f(y)$$

がグラフのラプラシアン[*8]であり，そのスペクトル解析は基本的な問題である．

グラフ (V,E) で $\kappa(x) = \kappa < \infty$ が x によらず定数であるようなものは正則グラフと呼ばれる．正則グラフでは，ラプラシアンを考えても隣接行列を考えても同じであり，そこにはグラフ (V,E) 上の等方的なランダムウォークの情報がすべて反映されている．例えば，このランダムウォークに関する定常状態はラプラシアンの 0-固有状態で与えられる．以下では，正則グラフのうちでも，特に興味深い対称性をもつものを考察する．

3.2 方法の概略

正則グラフ (V,E) が与えられたとき，Hilbert 空間 $\mathcal{H} = \ell^2(V)$ と隣接作用素 A の生成する $*$-代数を考える．$\mathcal{A}$ 上の状態は問題に応じて選ばれるが，例えば，$x_0 \in V$ を固定して考えたベクトル状態

$$\phi(a) = \langle \delta_{x_0}, a\delta_{x_0} \rangle, \qquad a \in \mathcal{A},$$

などが重要である．

一般に，グラフが与えられると 2 点間の距離 $\partial(x,y)$ が x,y を結ぶ最短道の長さとして定義される．今，原点 $x_0 \in V$ を固定して，

$$|x| = \partial(x, x_0), \qquad x \in V,$$

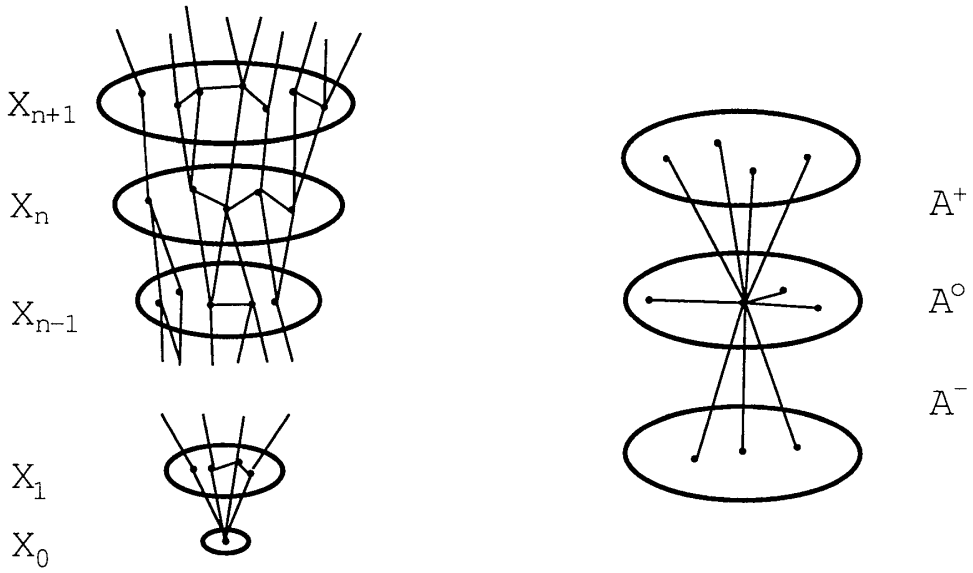
[*7] 枝を辿ることで道が定義される．$x, y \in V$ を端点とする長さ n の道とは，$(x_0, x_1, \cdots, x_n) \in V^n$ であって，$x = x_0 \sim x_1$, $x_1 \sim x_2$, ..., $x_{n-1} \sim x_n = y$ となっているものをいう．同じ枝を行き来するものも含まれる．

[*8] 組合せ的 (combinatorial) ラプラシアンとも呼ばれる．

とおく．これによって，グラフに階層構造がはいる:

$$V = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n, \qquad X_n = \{x \in V\,;\, |x| = n\}.$$

三角不等式から，$x \in X_n$ かつ $\partial(x,y) = 1$ であれば $y \in X_{n-1} \cup X_n \cup X_{n+1}$ である．すなわち，階層を飛び越える枝は存在しない．これに応じて，隣接作用素 A が，上昇部分 A^+，下降部分 A^-，及び保存部分 A° に分解される: $A = A^+ + A^\circ + A^-$.



さて，我々の関心は大きなグラフに対する A のスペクトルの性質である．そこで単独のグラフではなく，グラフの成長列:

$$V^{(1)} \subset V^{(2)} \subset V^{(3)} \subset \cdots, \qquad E^{(1)} \subset E^{(2)} \subset E^{(3)} \subset \cdots,$$

を考える．付随する隣接作用素を A_N とする．目的は，Z_N を正規化定数として，

$$\lim_{N\to\infty} \frac{A_N}{Z_N} \tag{3.2}$$

のスペクトルを調べることである．ところで，グラフが成長してゆくとき，新たに頂点と枝が増えてゆくことから，曖昧な言い方であるが，A_N は成長の各段階で「独立増分」が付け加わって大きくなってゆくと考えられる．そうすると，(3.2) の解析を中心極限定理の応用ととらえることが可能となる．実際には，隣接作用素の量子分解

$$A_N = A_N^+ + A_N^\circ + A_N^- \tag{3.3}$$

に対して

$$\lim_{N\to\infty}\frac{A_N^{\epsilon}}{Z_N},\qquad \epsilon=+,\circ,-$$

を相互作用 Fock 確率空間上に構成 (量子中心極限定理) し, 系として (3.2) に解答を与える. 分解(3.3) における保存部分 A_N° を $A_N^{\pm}$ に振り分けて論ずる場合もある.

我々の議論では, 量子中心極限定理そのものへの興味に加えて, 有限の A_N に対する組み合わせ的な議論を経由せずに極限 A のスペクトルの性質が導かれる点に注目して欲しい.

4 Cayley グラフ

4.1 定義と例

離散群 G を考えよう. その単位元は e で表す. さて, 生成系 $\Sigma\subset G$ で,

(i) $\sigma\in\Sigma\Longrightarrow\sigma^{-1}\in\Sigma$, つまり $\Sigma^{-1}=\Sigma$;
(ii) $e\notin\Sigma$.

をみたすものが与えられたとすると, G 自身を点の集合, $yx^{-1}\in\Sigma$ をみたす 2 点を枝 $(x\sim y)$ として, グラフ構造が導入される. これを (G,Σ) で表し, Cayley グラフと呼ぶ. Cayley グラフでは, 各点 $x\in G$ の次数 $\kappa(x)=|\Sigma|$ が一定なので正則グラフである.

例 4.1 加法群 $\mathbb{Z}^n$ に標準基底 $e_1,\ldots,e_n$ をとり, $\Sigma=\{e_{\pm1},\ldots,e_{\pm n}\}$ とおく. ただし, $e_{-i}=-e_i$ と記している. このとき, $(\mathbb{Z}^n,\Sigma)$ は正方格子である.

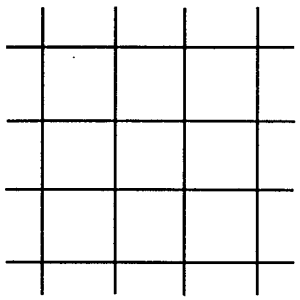
例 4.2 n 個の文字 $g_1,\ldots,g_n$ から生成される自由群を F_n とする. 記号の簡便さのために, $g_{-i}=g_i^{-1}$ と記して $\Sigma=\{g_{\pm1},\ldots,g_{\pm n}\}$ とおく. このとき, (F_n,Σ) は等質樹木である.

上記の 2 つの Cayley グラフでは, グラフの局所的な性質として各点の次数は同じであるが, 大域的には著しく異なる.

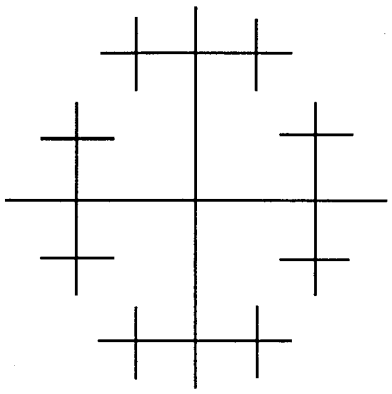
生成元 $\sigma\in\Sigma$ が $\sigma=\sigma^{-1}$ をみたす (つまり次数 2) 典型例として,

例 4.3 $\{1,2,\ldots,n\}$ の置換全体のなす群, つまり n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ を考える. 隣同士の互換

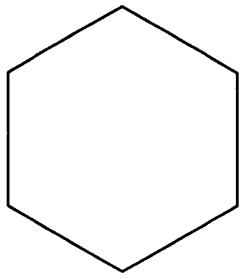
$$g_1=(1\,2),\quad g_2=(2\,3),\ldots,\quad g_{n-1}=(n-1\,n),$$



例 4.1: $\mathbb{Z}^2$



例 4.2: F_2



例 4.3: $\mathfrak{S}_3$

からなる生成系 Σ を考えることができる.

例 4.4 位数 2 の巡回群を 2 つ用意し, $\mathbb{Z}_2 \cong \langle a \rangle$, $\mathbb{Z}_2 \cong \langle b \rangle$ とする. この 2 つの群の自由積を $G = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 \cong \langle a, b\,;\, a^2 = b^2 = e \rangle$ とする. $\Sigma = \{a, b\}$ としてケーリーグラフ (G, Σ) を考えると, グラフとして $(\mathbb{Z}, \{e_{\pm 1}\})$ と同型である. 同様に, $(G = \langle a, b, c, d\,;\, a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = e \rangle, \Sigma = \{a, b, c, d\})$ は $(F_2, \{g_{\pm 1}, g_{\pm 2}\})$ と同型なグラフである.

4.2 Cayley グラフ上の量子分解

(G, Σ) を Cayley グラフとし, $\Sigma = \{g_{\pm 1}, g_{\pm 2}, \ldots, g_{\pm N}\}$ とおく. いつも通り, $g_\alpha^{-1} = g_{-\alpha}$ と記した. 生成元が $g_\alpha \neq g_{-\alpha}$ をみたすかどうかによって記法や定数の変更が必要であるが, 殆ど並行した議論ですむので, すべての生成元は $g_\alpha \neq g_{-\alpha}$ をみたすと仮定して話を進める. 隣接行列を正則表現で表示しておく. $\mathcal{H} = \ell^2(G)$ として $(\pi, \mathcal{H})$ を G の左正則表現とする. つまり,

$$\pi(g)f(x) = f(g^{-1}x), \qquad g, x \in G, \quad f \in \mathcal{H}.$$

このとき, 隣接行列は,

$$A = \sum_{\alpha=1}^{N} (\pi(g_\alpha) + \pi(g_{-\alpha})) \tag{4.1}$$

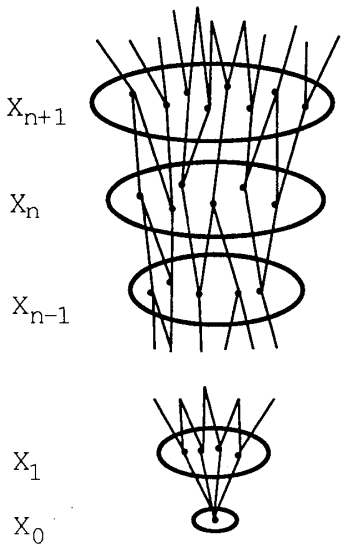
となる.

さて, 単位元でない $g \in G$ は, 定義から有限個の生成元の積で表示できる. そのような積表示のうち最短であるとき, その長さを $|g|$ で表そう. 単位元に対しては $|e| = 0$ と

おく．明らかに，$|g| = 1$ と $g \in \Sigma$ は同値であり，$\partial(x, y) = |yx^{-1}|$ が成り立つ．特に，$|g| - 1 \leq |g_\alpha g| \leq |g| + 1$ が任意の $g \in G$ と $g_\alpha \in \Sigma$ で成り立つ．ここでは，

(A1) 任意の $g_\alpha \in \Sigma$ と $g \in G$ に対して，$|g_\alpha g| = |g| \pm 1$,

を仮定として設ける．そうすると，Cayley グラフに階層構造を導入したとき，隣り同士の階層の 2 点のみに枝が存在し，同じ階層の 2 点が枝で結ばれることはない．



隣接行列 A の量子分解のためには，$\pi(g_\alpha)$ を量子分解すればよい．各 $g \in G$ に対して $\delta_g \in \mathcal{H}$ を 1 点集合 $\{g\}$ に付随する特性関数とすれば，$\{\delta_g\,;\, g \in G\}$ は $\mathcal{H}$ の完全正規直交基底になる．これを利用して，$\pi(g_\alpha^\pm)$ を

$$\pi(g_\alpha^+)\delta_g = \begin{cases} \delta_{g_\alpha g}, & |g_\alpha g| = |g| + 1 \text{ のとき}, \\ 0, & \text{その他}, \end{cases} \tag{4.2}$$

$$\pi(g_\alpha^-)\delta_g = \begin{cases} \delta_{g_\alpha g}, & |g_\alpha g| = |g| - 1 \text{ のとき}, \\ 0, & \text{その他}, \end{cases} \tag{4.3}$$

のように定義する．明らかに，$\pi(g_\alpha^\pm) \in \mathbf{B}(\mathcal{H})$, $\|\pi(g_\alpha^\pm)\| = 1$ かつ

$$\pi(g_\alpha) = \pi(g_\alpha^+) + \pi(g_\alpha^-), \qquad \pi(g_\alpha^+)^* = \pi(g_{-\alpha}^-), \qquad \pi(g_\alpha^-)^* = \pi(g_{-\alpha}^+).$$

これに応じて，

$$A^+ = \pi(g_1^+) + \pi(g_{-1}^+) + \cdots + \pi(g_N^+) + \pi(g_{-N}^+) \tag{4.4}$$

$$A^- = \pi(g_1^-) + \pi(g_{-1}^-) + \cdots + \pi(g_N^-) + \pi(g_{-N}^-) \tag{4.5}$$

とおくと, 量子分解

$$A = \sum_{\alpha=1}^{N} (\pi(g_\alpha) + \pi(g_{-\alpha})) = A^+ + A^- \tag{4.6}$$

が得られる.

4.3 Cayley グラフの隣接行列の漸近的スペクトル解析

各 $N = 1, 2, \ldots$ に対して Cayley グラフ $(G^{(N)}, \Sigma^{(N)})$ が与えられていて, $\Sigma^{(N)} = \{g_{\pm 1}, \ldots, g_{\pm N}\}$ となっていると仮定する. つまり, N が増えるにしたがって, 新しい生成元が付け加わって, グラフが成長してゆくことになる. 各 $(G^{(N)}, \Sigma^{(N)})$ の隣接行列 A_N の $N \to \infty$ におけるスペクトルの様子を調べることが目的である. 極限のグラフでは, 各頂点の次数は ∞ であるから, 等方的なランダムウォークを考えることはできない. このことは, A_N/Z_N のように正規化して極限をとらないと意味のある値が出てこないことと関係する.

グラフの大きくなり方に関して仮定をおく. まず,

$$\omega_+^{(N)}(g) = \{(g_\alpha, x) \in \Sigma^{(N)} \times G^{(N)}\,;\, \pi(g_\alpha^+)\delta_x = \delta_g\}, \tag{4.7}$$

$$\omega_-^{(N)}(g) = \{(g_\alpha, x) \in \Sigma^{(N)} \times G^{(N)}\,;\, \pi(g_\alpha^-)\delta_x = \delta_g\}, \tag{4.8}$$

とおく. もし $(g_\alpha, x) \in \omega_\pm^{(N)}(g)$ であれば, $|g| = |x| \pm 1$ かつ

$$|\omega_+^{(N)}(g)| + |\omega_-^{(N)}(g)| = 2N$$

が成り立つ. さて, 仮定は次の 2 つである:

(A2) 各 n に対して 整数 $\omega_n \geq 1$ と定数 $C_n \geq 0$ が存在して

$$\left|\left\{g \in G^{(N)}\,;\, |g| = n, |\omega_+^{(N)}(g)| \neq \omega_n\right\}\right| \leq C_n (2N)^{n-1}; \tag{4.9}$$

(A3) 各 n に対して,

$$\sup_N \sup \left\{|\omega_+^{(N)}(g)|\,;\, g \in G^{(N)}, |g| = n\right\} \equiv W_n < \infty$$

かつ $\limsup_{n\to\infty} W_n^{1/n} < \infty$;

条件 (A2) は, 大ざっぱに言えば, 階層 n にある $g \in G^{(N)}$ のうち「大多数」に対しては, 枝で結ばれる下の階層 $n-1$ の元が丁度 ω_n 個あるということを意味する.

さて, 各 $(G^{(N)}, \Sigma^{(N)})$ に対して, 前節のように,

$$\mathcal{H}^{(N)} = \ell^2(G^{(N)}), \qquad \pi = \pi_N, \qquad A_N, \qquad A_N^{\pm},$$

が定義される. $G^{(N)}$ の階層構造に対応して,

$$\Phi_n^{(N)} = \sqrt{\frac{\omega_1 \cdots \omega_n}{(2N)^n}} \sum_{g \in G^{(N)}, |g|=n} \delta_g$$

とおく. $\Phi_n^{(N)}$ は厳密には正規化されてはいないが,

$$\|\Phi_n^{(N)}\|^2 = 1 + O(N^{-1})$$

が成り立つ. 一方, n が異なれば互いに直交することは明らかである. こうして, $\mathcal{H}^{(N)}$ の部分空間

$$\Gamma^{(N)} = \sum_{n=0}^{\infty} \oplus \mathbb{C}\Phi_n^{(N)}$$

は Fock 空間に準ずる性質を持つ. 実際,

$$\frac{A_N^+}{\sqrt{2N}} \Phi_n^{(N)} = \sqrt{\omega_{n+1}}\, \Phi_{n+1}^{(N)} + O(N^{-1/2}), \tag{4.10}$$

$$\frac{A_N^-}{\sqrt{2N}} \Phi_{n+1}^{(N)} = \sqrt{\omega_{n+1}}\, \Phi_n^{(N)} + O(N^{-1}), \tag{4.11}$$

が示される. これより, $\lambda_n = \omega_1 \ldots \omega_n$ として相互作用 Fock 空間 $(\Gamma, \{\lambda_n\}, a^+, a^-)$ を考える. 形式的には,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{A_N^{\pm}}{\sqrt{2N}} = a^{\pm} \tag{4.12}$$

となっていることは明白である. 言い替えれば, 極限を記述するであろう相互作用 Fock 空間は Cayley グラフの構造定数の一つとでもいうべき $\{\omega_n\}$ によって完全に決定されているのである. 数学としては, (4.12) の収束を量子中心極限定理として証明する必要がある. 実は, もう少し強く, コヒーレント状態も含めたかなり一般の行列成分の収束が示されている.

定 理 4.1 (Hashimoto [8]) $(G^{(N)}, \Sigma^{(N)})$ をこれまでの仮定をみたす Cayley グラフの列とし, $\{\omega_n\}$ に対応する相互作用 Fock 空間を $(\Gamma, \{\lambda_n\}, a^+, a^-)$ とする. このとき, $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \Phi_n \in \Gamma$ に対して, $u^{(N)} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \Phi_n^{(N)} \in \Gamma^{(N)}$ である限り,

$$\lim_{N\to\infty} \left\langle u^{(N)}, \left(\frac{A_N^{\epsilon_1}}{\sqrt{2N}}\right) \cdots \left(\frac{A_N^{\epsilon_m}}{\sqrt{2N}}\right) \Phi_n^{(N)} \right\rangle = \langle u, a^{\epsilon_1} \ldots a^{\epsilon_m} \Phi_n \rangle$$

が, 任意の $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_m \in \{\pm\}$, $m \geq 1$, に対して成り立つ.

注 意 Hashimoto [8] では, 長さ関数 $|\cdot|$ が必ずしも $g \in G$ の生成系 Σ に関する最短表示の長さとは限らないとして, より一般的な場合を証明している.

例 4.5 正方格子 $(\mathbb{Z}^N, \{e_{\pm 1}, \ldots, e_{\pm N}\})$ において, $\omega_n = n$ である. 実際, $g \in \mathbb{Z}^N$ が第 n 階層にあれば,

$$g = p_1 e_1 + \cdots + p_N e_N, \qquad |p_1| + \cdots + |p_N| = n$$

と表示される. このとき, 階層 $n-1$ にあって g と隣接している元は, $p_i > 0$ ならそれを $p_i - 1$ でおきかえるか, $p_i < 0$ ならそれを $p_i + 1$ でおきかえるかして得られる. したがって, $1 \leq |\omega_+^{(N)}(g)| \leq n$ であり, $N > n$ であれば, 大多数の g に対して $|\omega_+^{(N)}(g)| = n$ であることが容易にわかる. したがって, $\omega_n = n$, $\lambda_n = n!$ である. さらに, $W_n = n$ もすぐわかる. よって, 量子分解された隣接行列は Boson Fock 空間上の生成・消滅作用素 $a^{\pm}$ に代数的確率変数の意味で収束する:

$$\lim_{N \to \infty} \frac{A_N^{\pm}}{\sqrt{2N}} = a^{\pm}.$$

特に, A_N の真空における分布は漸近的に標準正規分布である. なお, 例 2.1 を参照.

例 4.6 等質樹木 $(F_N, \{g_{\pm 1}, \ldots, g_{\pm N}\})$ を考えよう. 階層 n にある $g \in F_N$ と隣接し, 階層 $n-1$ にある元は 1 個だけであることは明らか. よって $\omega_n = 1$, したがって, すべての n で $\lambda_n = 1$. また, $W_n = 1$ も明らか. したがって, 量子分解された隣接行列は漸近的に自由 Fock 空間上の生成・消滅作用素に収束し, 真空における分布は Wigner 半円則である. すなわち,

$$\lim_{N \to \infty} \left\langle \Phi_0^{(N)}, \left(\frac{A_N}{\sqrt{2N}} \right)^m \Phi_0 \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^{+2} x^m \sqrt{4 - x^2}\, dx.$$

なお, 例 2.3 を参照.

例 4.7 Σ を可算無限集合, $m : \Sigma \times \Sigma \to \{1, 2, \cdots, \infty\}$ を Coxeter 行列とする. つまり, $m(s,s) = 1$ かつ, 異なる $s, t \in \Sigma$ に対しては $m(s,t) = m(t,s) \geq 2$ を仮定する. Σ を生成系とし, 関係式

$$(st)^{m(s,t)} = 1, \qquad s, t \in \Sigma, \tag{4.13}$$

で定まる群を Coxeter 群という．なお, $m(s,t)=\infty$ のときは関係式はないものとする．また, 任意の $s\in\Sigma$ に対して $s^2=e$ が成り立つ．$\Sigma^{(N)}=\{s_1,\ldots,s_N\}$ から生成される部分群を $G^{(N)}$ とすると, $G^{(N)}$ は $\Sigma^{(N)}$ を生成系としてそこに制限した Coxeter 行列 $m|_{\Sigma^{(N)}\times\Sigma^{(N)}}$ から定まる関係式によって定義される群 (Coxeter 群) と同型になる．今, 異なる $s,t\in\Sigma$ に対していつでも $m(s,t)\geq 3$ となっているとき, $\omega_n=1$ が示される．なお, $W_n=2$ も知られている [14]．よって, 隣接行列の漸近的な性質は例 4.6 と同じである．なお, 隣接行列の漸近的な固有値分布は, 別の方法でも得られている [6].

5 距離正則グラフ

5.1 一般論

定 義 5.1 有限グラフ (V,E) が距離正則グラフとは, 任意の $i,j,h\in\{0,1,2,\ldots,d\}$ と $\partial(x,y)=h$ をみたす任意の $x,y\in V$ に対して

$$p_{ij}^h=|\{z\in X\,;\,\partial(x,z)=i,\partial(z,y)=j\}|$$

が x,y の取り方によらない定数になるときにいう．ここで $d=\max\{\partial(x,y)\,;\,x,y\in V\}$ とおいた．

この場合, 隣接行列 A の生成する可換 $*$-代数 $\mathcal{A}$ は Bose–Mesner 代数とも呼ばれる．$\mathcal{A}$ は Hilbert 空間 $\mathcal{H}=\ell^2(V)$ に作用する (§3)．次に, $\mathcal{A}$ 上の状態 ϕ を

$$\phi(a)=\frac{1}{|V|}\mathrm{Tr}\,(a)=\langle\delta_x,a\delta_x\rangle,\qquad x\in V. \tag{5.1}$$

で定める．トレース状態が, 任意の $\delta_x\in\mathcal{H}$ に付随するベクトル状態に一致するのは距離正則グラフの特性である．

では, A の量子分解を定義しよう．まず, A_i を第 i 隣接行列 $(i=0,1,2,\ldots,d)$ とする．すなわち,

$$(A_i)_{xy}=\begin{cases}1, & \partial(x,y)=i,\\ 0, & \text{その他}.\end{cases} \tag{5.2}$$

このとき,

$$A_iA_j=\sum_{h=0}^{d}p_{ij}^hA_h,\qquad i,j=0,1,\ldots,d, \tag{5.3}$$

が成り立つので, 線形空間として, $\mathcal{A}$ は $\{I = A_0, A = A_1, \ldots, A_d\}$ で生成されている. 状態 ϕ によって $\mathcal{A}$ に内積が $\langle a, b\rangle = \phi(a^*b)$ として定義され, それ自身が Hilbert 空間 Γ となる. そこで,

$$\Phi_n = \frac{1}{\sqrt{\kappa_n}} A_n, \quad \kappa_n \equiv p^0_{nn} = |X_n|, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, d,$$

とおくと, $\{\Phi_n\}$ は Γ の完全正規直交基底となる:

$$\Gamma = \sum_{n=1}^{d} \oplus \mathbb{C}\Phi_n.$$

これは V の階層構造 $V = \bigcup X_n$ に対応している. 隣接行列 A は次のように作用する.

$$A\Phi_n = \begin{cases} \sqrt{\kappa_1}\,\Phi_1, & n = 0 \\ p^{n+1}_{1n}\sqrt{\dfrac{\kappa_{n+1}}{\kappa_n}}\,\Phi_{n+1} + p^{n-1}_{1n}\sqrt{\dfrac{\kappa_{n-1}}{\kappa_n}}\,\Phi_{n-1} + p^n_{1n}\Phi_n, & 1 \le n \le d-1, \\ p^{d-1}_{1d}\sqrt{\dfrac{\kappa_{d-1}}{\kappa_d}}\,\Phi_{d-1} + p^d_{1d}\Phi_d, & n = d. \end{cases}$$

一般に, A は保存部分を含むことに注意しておく. そこで,

$$A^+\Phi_n = \begin{cases} p^{n+1}_{1n}\sqrt{\dfrac{\kappa_{n+1}}{\kappa_n}}\,\Phi_{n+1} + \frac{1}{2}\,p^n_{1n}\Phi_n, & 0 \le n \le d-1, \\ \dfrac{1}{2}\,p^d_{1d}\Phi_d, & n = d, \end{cases} \tag{5.4}$$

$$A^-\Phi_n = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ p^{n-1}_{1n}\sqrt{\dfrac{\kappa_{n-1}}{\kappa_n}}\,\Phi_{n-1} + \dfrac{1}{2}\,p^n_{1n}\Phi_n, & 1 \le n \le d, \end{cases} \tag{5.5}$$

と定義すると, 量子分解 $A = A^+ + A^-$ が得られる.

興味は, グラフが成長するとき, 正規化変数 $A^{\pm}/\sqrt{\kappa_1}$ の極限をとらえることである. グラフの成長を表すパラメータを N として, (5.4), (5.5) に現れる量に N を付けて明示す

ることにする．そこで，係数が

$$\lim_{N\to\infty} p_{1n}^{n+1}(N)\sqrt{\frac{\kappa_{n+1}(N)}{\kappa_n(N)}}\Big/\sqrt{\kappa_1(N)} = p_n, \tag{5.6}$$

$$\lim_{N\to\infty} p_{1n}^{n-1}(N)\sqrt{\frac{\kappa_{n-1}(N)}{\kappa_n(N)}}\Big/\sqrt{\kappa_1(N)} = q_n, \tag{5.7}$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2}p_{1n}^{n}(N)\Big/\sqrt{\kappa_1(N)} = r_n, \tag{5.8}$$

のように収束していると仮定する．このとき，形式的に

$$\lim_{N\to\infty} \frac{A_N^{\pm}}{\sqrt{\kappa_1(N)}} = a^{\pm} \tag{5.9}$$

とすれば，(5.4), (5.5) から極限において期待される関係式は

$$a^{+}\Phi_n = p_n\Phi_{n+1} + r_n\Phi_n \tag{5.10}$$

$$a^{-}\Phi_n = q_n\Phi_{n-1} + r_n\Phi_n \tag{5.11}$$

である．これから，相互作用 Fock 空間と対応する直交多項式や確率測度を再構成することは容易である．したがって，形式的には，係数の極限 (5.6), (5.7), (5.8) が判れば，A_N の漸近的固有値分布が求められる．ただし，(5.9) の収束を代数的確率変数としてきちんと示すことは数学的問題として重要である．

5.2 Hamming グラフ $H(d, n+1)$

F を $n+1$ 個の元からなる有限集合とし，直積集合 F^d に距離を

$$\partial(x,y) = |\{i\,;\,\xi \neq \eta_i\}|, \qquad x = (\xi_i),\ y = (\eta_i) \in F^d,$$

として定義する．いわゆる Hamming 距離である．$\partial(x,y) = 1$ である 2 点を枝で結んでできるグラフを Hamming グラフと呼び $H(d, n+1)$ で表す．前節 §5.1 に従って，隣接行列の量子分解を

$$A_{d,n+1} = A_{d,n+1}^{+} + A_{d,n+1}^{-}$$

とする. Hamming グラフの構造定数 p_{ij}^h は容易にわかるので, $n, d \to \infty$, $n/d \to \tau \geq 0$ における (5.10) と (5.11) が直ちに計算される:

$$a^+\Phi_n = \sqrt{n+1}\,\Phi_{n+1} + \frac{\sqrt{\tau}}{2}\,\Phi_n,$$
$$a^-\Phi_n = \sqrt{n}\,\Phi_{n-1} + \frac{\sqrt{\tau}}{2}\,\Phi_n.$$

これが Boson Fock 空間上で実現されることは明らかである. 収束についても証明ができていて, 次の結論が導かれる.

定 理 5.2 (Hashimoto–Obata–Tabei [10], Tabei [15]) $\tau \geq 0$ とする. 代数的確率変数として,

$$\lim_{n,d\to\infty, n/d\to\tau} \frac{A^{\pm}_{(d,n+1)}}{\sqrt{nd}} = b^{\pm} + \frac{\sqrt{\tau}}{2} b^+ b^-.$$

ただし, $b^{\pm}$ は Boson Fock 空間の生成・消滅作用素である.

したがって,

$$\lim_{n,d\to\infty, n/d\to\tau} \frac{A_{(d,n+1)}}{\sqrt{nd}} = \sqrt{\tau}\, b^+ b^- + b^+ + b^-.$$

$\tau = 0$ のときの極限は $b^+ + b^-$ であるから, その真空における分布はよく知られているように標準正規分布である. $\tau > 0$ の場合の極限 $\sqrt{\tau}\, b^+ b^- + b^+ + b^-$ は量子ポワソン型確率変数と呼ばれるもの*9である [12]. 実際, $\mathbb{R}$ 上の確率分布 ν_τ を

$$\nu_\tau(\{\sqrt{\tau}\,k - 1/\sqrt{\tau}\}) = \frac{e^{-1/\tau}}{k!\tau^k}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

と定義すると,

$$\langle \Phi_0, (\sqrt{\tau}\, b^+ b^- + b^+ + b^-)^m \Phi_0 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m \nu_\tau(dx), \qquad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

が成り立つ. 本節で考えている状態はトレース状態であったから, 以上の議論から $A_{d,n+1}$ の漸近的な固有値分布が求められた. すなわち, $n, d \to \infty$, $n/d \to \tau \geq 0$ のとき,

$$\frac{A_{(d,n+1)}}{\sqrt{nd}} \text{ の固有値分布} \approx \begin{cases} \text{標準正規分布}, & \tau = 0, \\ \nu_\tau, & \tau > 0. \end{cases}$$

*9 標準的なものの平行移動になっている.

注 意 Hashimoto–Obata–Tabei [10] では, 隣接作用素の量子分解を, グラフ $H(d, n+1)$ に向きを与えることによって直接導いている. その際, 保存部分 A° については, 各階層 X_n にできる部分グラフのマッチングと Euler の一筆書き定理を用いて議論している.

5.3 Johnson グラフ $J(v, d)$

S を v 個の元からなる有限集合とし, $1 \leq d \leq v/2$ とする.

$$J(v, d) = \{x \subset S\,;\, |x| = d\}$$

として, 2 点 $x, y \in J(v, d)$ が $|x \cap y| = d - 1$ をみたすとき枝で結ぶことにしてできるグラフを Johnson グラフという. その隣接作用素を $A_{v,d}$ とする. Hamming グラフの場合と同様に, $d \to \infty$, $2d/v \to p \in (0, 1]$ の極限で (5.10) と (5.11) が直ちに計算される:

$$a^+\Phi_n = (n+1)\Phi_{n+1} + \frac{n}{\sqrt{p(2-p)}}\,\Phi_n, \tag{5.12}$$

$$a^-\Phi_n = n\Phi_{n-1} + \frac{n}{\sqrt{p(2-p)}}\,\Phi_n. \tag{5.13}$$

ここで, $A_{v,d}$ の固有値分布がどうしてわかるかを述べておこう. 特に $p = 1$ としよう. 慣用とあわせるために $\phi_n = n!\Phi_n$ とおくと,

$$(a^+ + a^- + 1)\phi_n = \phi_{n+1} + n^2\phi_{n-1} + (2n+1)\phi_n$$

これは Laguerre 多項式 $\{P_n\}$ のみたす 3 項間漸化式

$$xP_n = P_{n+1} + n^2 P_{n-1} + (2n+1)P_n$$

と一致している. 相互作用 Fock 空間と直交多項式の標準対応 (定理 2.1) から $a^+ + a^- + 1$ の真空における確率分布は Laguerre 多項式を定めている確率分布に一致し, それは正の実軸 $[0, +\infty)$ に乗っている指数分布 $e^{-x}dx$ である. したがって, $d \to \infty$, $2d/v \to 1$ の極限で

$$\frac{A_{(v,d)}}{\sqrt{d}} \text{の固有値分布} \approx [-1, +\infty) \text{ 上で } e^{-(x+1)}dx \text{ を密度とする分布}$$

が直ちに導かれる. 一般の p のときは Laguerre 多項式の変形が現れる. 収束も含めた詳細は [9] において議論される.

注 意 Hora [11] は, 距離正則グラフのいくつかの例について, 極限移行する前の隣接作用素 A_N の固有値分布の具体的な表式をもとに, 分布のスケーリング極限を直接計算した. 本論文の量子分解法によれば, A_N の固有値分布は知らなくてもよいので, さらなる応用が見込まれるのである.

参考文献

[1] L. Accardi and M. Bożejko: *Interacting Fock spaces and Gaussianization of probability measures*, Infin. Dimen. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. **1** (1998), 663–670.

[2] L. Accardi, Y. Hashimoto and N. Obata: *Notions of independence related to the free group*, Infin. Dimen. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. **1** (1998), 201–220.

[3] L. Accardi, Y.-G. Lu and I. Volovich: *Non-linear extensions of classical and quantum stochastic calculus and essentially infinite dimensional analysis*, in "Probability Towards 2000 (L. Accardi and C. C. Heyde, Eds.)," pp. 1–33, Lect. Notes in Stat. Vol. 128, Springer–Verlag, 1998.

[4] アカルディルイジ・尾畑伸明: 代数的確率論入門, 多元数理講義録 Vol. 2, 名古屋大学, 1999.

[5] D. M. Chung, U. C. Ji and N. Obata: *Quantum stochastic analysis via white noise operators in weighted Fock space*, to appear in Rev. Math. Phys.

[6] G. Fendler: *Central limit theorems for Coxeter systems and Artin systems of extra large type*, preprint 2000.

[7] Y. Hashimoto: *Deformations of the semicircle law derived from random walks on free groups*, Prob. Math. Stat. **18** (1998), 399–410.

[8] Y. Hashimoto: *Quantum decomposition in discrete groups and interacting Fock spaces*, to appear in Infin. Dimen. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. (2001).

[9] Y. Hashimoto, A. Hora and N. Obata: in preparation.

[10] Y. Hashimoto, N. Obata and N. Tabei: A quantum aspect of asymptotic spectral analysis of large Hamming graphs, in "Quantum Information III (T. Hida and K. Saitô, Eds.)," World Scientific, in press.

[11] A. Hora: *Central limit theorems and asymptotic spectral analysis on large graphs*, Infin. Dimen. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. **1** (1998), 221–246.

[12] R. L. Hudson and K. R. Parthasarathy: *Quantum Itô's formula and stochastic evolutions*, Commun. Math. Phys. **93** (1984), 301–323.

[13] 尾畑伸明: ホワイトノイズによる量子確率解析, 物性研究 **62** (1994), 62–85; 量子ホワイトノイズの数学的基礎, 物性研究 **66** (1996), 76–94; ホワイトノイズ超関数と量子確率微分方程式, 物性研究 **69** (1997), 19–38; ホワイトノイズと量子確率解析の非線形拡張, 物性研究 **72** (1999), 345–360.

[14] R. Szwarc: *Structure of geodesics in the Coxeter graph of infinite Coxeter groups*, preprint, 2000.

[15] N. Tabei: *Quantum decomposition on Hamming graphs and central limit theorem*, Master Thesis, Nagoya University, 2001. (in Japanese)