## 講義ノート

# 「超流動ヘリウムと量子渦」

講師：大阪市立大学大学院理学研究科　数物系専攻
坪田　誠　助教授

日時：２０００年１０月２５日、２６日、２７日
於：京都大学大学院理学研究科　物理学・宇宙物理学専攻　物理学第一分野

京都大学大学院理学研究科　物理学・宇宙物理学専攻
低温物理学研究室　山下　穣

（2002 年 1 月 10 日受理）

目次

坪田　誠

## 1．量子凝縮と超流動

全体を通しての話の中で、主な登場人物は３人である。超流体、常流体、そして超流体の成す量子渦。主に量子渦を中心とした、この三つの織り成す現象がこのノートの主題である。この章では最初の２つについてみることにする。量子渦については二章で議論される。

### １－１．量子凝縮

右の図がヘリウム４の相図である。通常の物質と異なり、固液気の３重点を持たず、絶対零度でもその量子性の強さのため液体のままである。このため、通常の物質が低温で固体という秩序相を持つ代わりに、ヘリウムは転移温度 $T_\lambda = 2.172\,[\mathrm{K}]$ 以下で、超流動転移することによって、液体のまま秩序相を実現する。区別のため、通常の液体ヘリウムを HeⅠ、超流動転移した液体ヘリウムを HeⅡと以下記述する。

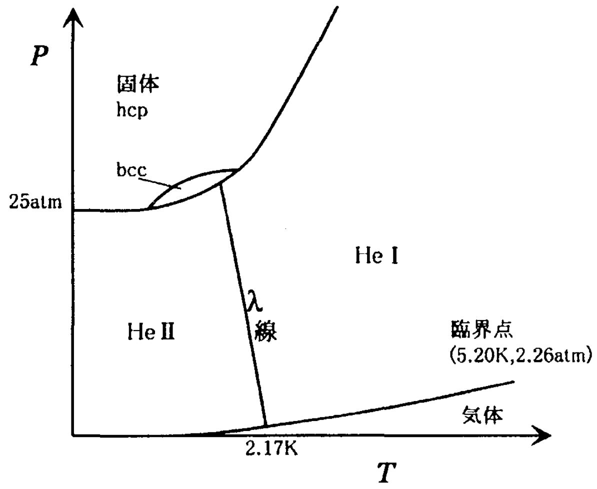



図１－１：ヘリウム４の相図

この秩序相は Bose 粒子であるヘリウム４の Bose 凝縮であると理解することが出来る。即ち、理想 Bose 気体の Bose 凝縮転移温度、

$$T_B = \frac{2\pi\hbar^2}{mk_B}\left(\frac{N}{\zeta(3/2)V}\right)^{2/3} \tag{1.1.1}$$

に液体ヘリウムの値 $N/V = 2.1\times10^{28}\,[\mathrm{m}^{-3}]$、$m_4 = 6.6\times10^{-27}\,[\mathrm{kg}]$ を代入すると、$T_B = 3.1\,[\mathrm{K}]$ と $T_\lambda = 2.172\,[\mathrm{K}]$ に近い値が得られる。

### １－２．二流体モデル

超流動相では通常の液体では起こりえないような不思議な現象がおこる。その詳細は、他所でも詳しく解説されているため、ここでは詳しく述べないが、粘性を失って常流体の通れないような毛細管中を流れる現象や、HeⅡ中に途中までしか入っていないビーカーの壁に Film Flow と呼ばれる流れが生まれてビーカーの中に液体ヘリウムが入っていく現象などがよく知られている。

こうした HeⅡでおきる種々の現象は「二流体モデル」と呼ばれる現象論的モデルにより基本的に理解することが出来る。

2 流体モデルとは、HeⅠが HeⅡに相転移した後も熱的に励起された粒子が常流体としての性質を担うため一気に常流体の性質を失うことはなく、温度が下がると共に徐々に超流動としての性質を得ていくと考える理論である。

具体的には転移温度 $T_\lambda$ 以下の HeⅡが粘性を持つ常流体（密度 $\rho_n$，速度 $\vec{v}_n$）と、粘性を持た

ない超流体（密度 $\rho_s$，速度 $\vec{v}_s$ ）という二つの独立な成分の重ねあわせで記述されると考える。即ち、全密度 $\rho$ と流速密度 $\vec{j}$ は、

$$\rho = \rho_n + \rho_s \tag{1.2.1}$$

$$\vec{j} = \rho_n \vec{v}_n + \rho_s \vec{v}_s \tag{1.2.2}$$

とかかれ、$T = T_\lambda$ で $\rho = \rho_n$、$T = 0$ で、$\rho = \rho_s$ となると考える。常流体成分 $\rho_n$ は粘性を持ち、エントロピーを運ぶ。また、超流体成分 $\rho_s$ は粘性を持たずエントロピーを運ばない。

右の図がその温度変化の様子を示している。縦軸を全密度で規格化してある。全密度は温度に対してほとんど変化せず、常流体密度と超流体密度は相補的に温度変化する。

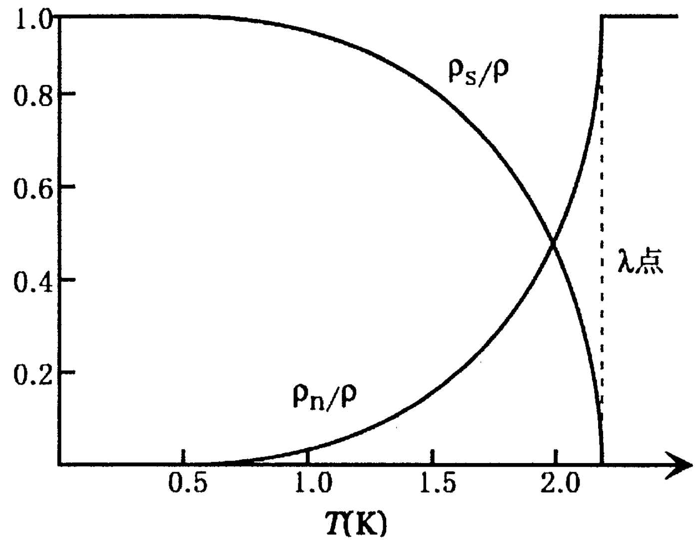


図１－２：$\rho_s$、$\rho_n$ の温度変化の様子

つぎに、二流体力学を構成する基礎方程式について考える。

He II の状態を表わす波動関数は，Bose 凝縮して位相にマクロなコヒーレントが現れることから、$\Phi(r,t) = \sqrt{n_0(r,t)}e^{i\varphi(r,t)}$ と表わされる。

これを、Gross-Pitaevski 方程式、

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\Phi(r,t) = -\left(\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \mu\right)\Phi(r,t) + g\left|\Phi(r,t)\right|^2\Phi(r,t) \tag{1.2.3}$$

に代入して、実部と虚部に分けると，

$$\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{n_0} = -\frac{\hbar}{2m}\left(2\nabla\sqrt{n_0}\nabla\varphi + \sqrt{n_0}\nabla^2\varphi\right) \tag{1.2.4}$$

$$\hbar\frac{\partial}{\partial t}\varphi = -\frac{\hbar^2}{2m}\left((\nabla\varphi)^2 - \frac{\nabla^2\sqrt{n_0}}{\sqrt{n_0}}\right) + \mu - gn_0 \tag{1.2.5}$$

となる。

また，確率流れ密度の式に波動関数を代入することより、

$$\vec{j} = -\frac{i\hbar}{2m}\left(\Phi^*\nabla\Phi - \Phi\nabla\Phi^*\right) = n_0\frac{\hbar}{m}\nabla\varphi \tag{1.2.6}$$

となることから、

$$\vec{v}_s = \frac{\hbar}{m}\nabla\varphi \tag{1.2.7}$$

となることがわかる。これから超流動速度場は渦なし（$\nabla\times v_s = 0$）のポテンシャル流であることがわかる。

(1.2.5)の$\nabla$をとって、密度の空間変化を小さいと仮定して、$\nabla^2 n_0$　の項を無視すると、

$$\frac{\partial \vec{v}_s}{\partial t} = -\nabla\left(\frac{v_s^{\ 2}}{2} + \frac{\mu(r,t)}{m}\right) \qquad \text{ここで、} \mu(r,t) \equiv g n_0(r,t) - \mu \tag{1.2.8}$$

が得られる。これに、$\nabla\left(v_s^{\ 2}/2\right) = (v_s\cdot\nabla)v_s$　と Gibbs-Duhem の関係式 $\nabla\mu = (V/N)\nabla P - (S/N)\nabla T$ をもちいると、超流動速度の運動方程式

$$\rho_s\left(\frac{\partial v_s}{\partial t} + (v_s\cdot\nabla)v_s\right) = -\frac{\rho_s}{\rho}\nabla P + \rho_s\sigma\nabla T \tag{1.2.9}$$

がえられる。$\sigma$ はエントロピー密度である。

常流体の運動方程式は運動量保存則

$$\rho_s\left(\frac{\partial v_s}{\partial t} + (v_s\cdot\nabla)v_s\right) + \rho_n\left(\frac{\partial v_n}{\partial t} + (v_n\cdot\nabla)v_n\right) = -\nabla P + \eta_n\nabla^2 v_n$$

(1.2.10)

から、(1.2.9)を差し引いて,

$$\rho_n\left(\frac{\partial v_n}{\partial t} + (v_n\cdot\nabla)v_n\right) = -\frac{\rho_n}{\rho}\nabla P - \rho_s\sigma\nabla T + \eta_n\nabla^2 v_n$$

(1.2.11)

となる。

(1.2.9)、(1.2.11)に質量保存則

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho_n v_n + \rho_s v_s) = 0 \tag{1.2.12}$$

と、エントロピー保存則

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\sigma) + \nabla\cdot(\rho\sigma v_n) = 0 \tag{1.2.13}$$

を加えた四つの式が二流体力学の基礎方程式となる。

### １－３．素励起

超流体の実体が基底状態への凝縮成分であるとみなせるのに対して、常流体の実体は系が有限温度であることによって熱揺らぎによる励起状態が存在することにある。

励起状態は量子化された準粒子として扱うのが便利である。この量子化された準粒子を「素励起」と呼ぶ。素励起描像では励起状態をある特定の波数$\boldsymbol{q}$を持つ準粒子であると考え、応答関数

などの種々の物理量を計算する。

この素励起の平均的な流れが常流体である。

素励起描像が有効であるためには、素励起同士の相互作用が弱く，素励起の寿命が十分長いことが必要である。すなわち，温度が十分低く素励起の密度が希薄な系に有効である。

He II の素励起のスペクトルは中性子散乱の実験から以下の様になることが知られている。

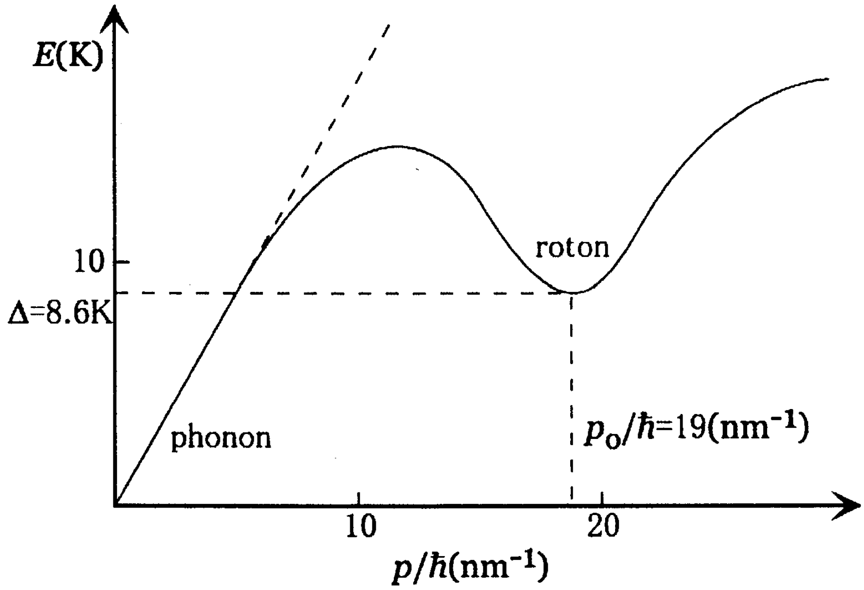



図１－３：超流動ヘリウム４の素励起のスペクトル

このスペクトルの特徴は主に以下の二点である。

1. 波数 $q$ の小さい所ではフォノンのような振る舞いを示す。エネルギー $\varepsilon$ と波数 $q$ の関係は

$$\varepsilon_{\text{phonon}} = cq \qquad , c = 239\ [\text{m/s}]$$

となる。

2. スペクトルに極小値が存在する。極小値付近での素励起は「ロトン」と呼ばれ、その付近のエネルギースペクトルは

$$\varepsilon_{\text{roton}}(p) = \Delta + \frac{(p-p_0)^2}{2\mu} \quad , \quad \Delta / k_B = 8.65\ \ [\text{K}] \quad , \quad p_0 / \hbar = 19.2 [\text{nm}^{-1}]$$

であたえられる。

● Landau の臨界速度

素励起の考えを使うと，そのエネルギースペクトルから超流動の安定性について議論することができる。ここから He II の臨界速度や，三次元理想 Bose 気体が超流動にならないことなどが分かる。

まず，細管の中を超流動成分が速度 $\vec{v}_s$ で流れていて、常流動成分は止まっている状況を考える。

超流動成分がとまっている系で考えると，壁が逆に速度（$-\vec{v}_s$）で動いているのであるが，こ

の壁との相互作用により，エネルギー$\varepsilon(p)$、運動量$\vec{p}$を持つ素励起が生まれたとする。

静止系にガリレイ変換すると，静止系のエネルギーは$\varepsilon'(p)=\varepsilon(p)+\vec{p}\cdot\vec{v}_s$　だけ増える。

$\varepsilon'(p)<0$のとき，素励起ができた方がエネルギーは下がるわけだから，次から次へと素励起ができ，基底状態のエネルギーを励起状態へ奪っていくので，超流動は不安定になって壊れる。

$\varepsilon'(p)<0$となる速度

$$v_c=\mathrm{Min}\left(\frac{\varepsilon(p)}{p}\right)$$

をLandauの臨界速度と呼び，HeⅡでは$v_c\approx\Delta/p_0\approx60\,[\mathrm{m/s}]$であり、理想Bose気体では容易に分かるように$v_c=0$である。

ただ、HeⅡの実験では、ここで求められた$v_c$よりも一桁小さい速度で，超流動状態は破壊される。これはHeⅡの作る量子渦の効果であると考えられる。

## ２．量子渦

ここでは、超流動速度場が作る循環が量子化された渦、量子渦の特徴について述べる。

### ２－１．循環の量子化

超流動速度場の作る渦度$\vec{\omega}=\nabla\times\vec{v}_s$は$\vec{v}_s=\dfrac{\hbar}{m_4}\nabla\varphi$より$\vec{\omega}=0$の渦なし流となる。したがってその循環は単連結領域ではゼロとなるが、トーラス容器中や、導線が入っている場合などの多重連結領域では循環は有限の値をとりうる。すなわち、

$$\int\vec{\omega}\cdot d\vec{S}=\oint\frac{\hbar}{m_4}\nabla\varphi\cdot d\vec{l}=\frac{\hbar}{m_4}2\pi n=\kappa n\quad(n\text{は整数})\tag{2.1.1}$$

$$\kappa=h/m_4=0.998\times10^{-3}\,[\mathrm{cm^2/s}]\tag{2.1.2}$$

となる。

波動関数の一価性から循環は$\kappa$の整数倍で書かれる。これからＨｅⅡ中の渦は循環の量子化された量子渦となる。

渦の循環が量子化されることを最初に実験で検証したのはW.F.Vinenで、回転円筒容器中のＨｅⅡに入れられた弦の振動を測ることで、循環量子が$\kappa=h/m_4$のまわりに高い頻度で現れることをみた[1]。

### ２－２．渦糸

渦度$\vec{\omega}$がある直線状に集中して存在しているのが渦糸である。渦糸周りの速度場は$\vec{\omega}=\nabla\times\vec{v}_s$で与えられる。これは、電流$\vec{i}$周りにできる磁束密度$\vec{B}$と数学的に同値である。すなわち、直線状の渦糸が作る速度場はBiot-Savartの法則から円柱座標を用いて、

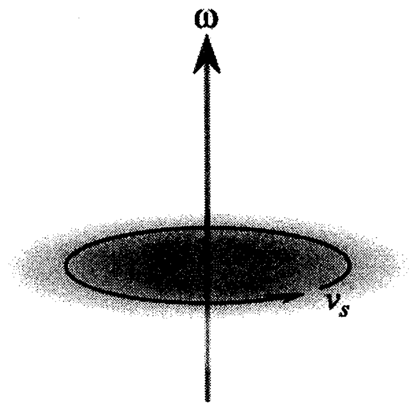


図２－１：直線渦糸

$$\vec{v}_s = \frac{\kappa n}{2\pi r}\hat{\varphi} \tag{2.2.1}$$

で与えられる。容易に分かるように$r=0$以外の領域では渦なしのポテンシャル流であるが、渦度の集中している原点では$\vec{v}_s$は発散している。

現実の量子渦の中心は、無限大の速度が存在するというのは非現実的であるから、ある有限の大きさ$a_0$をもった渦芯が存在していると考えられている。$a_0$の大きさは理論的にも、実験的にも数Åの大きさであることが知られている。これについては後で述べる。

渦糸の単位長さあたりのエネルギー$E$は系の大きさを$R$とするとき、

$$E = \frac{\rho_s}{2}\int \vec{v}_s{}^2 dS = \frac{\rho_s}{2}\int \frac{\kappa^2 n^2}{4\pi^2 r^2} 2\pi r dr = \frac{\rho_s \kappa^2 n^2}{4\pi}\ln\left(\frac{R}{a_0}\right) \propto n^2 \tag{2.2.2}$$

となり、循環量子$n$の二乗に比例する。

ここから、トータルの循環量子が与えられたとき、$n$の大きな渦ができるより、$n=1$の渦がたくさんできるほうが安定であることが分かる。

また、循環量子$n_1$、$n_2$の二本の平行な渦糸が距離$d$だけ離れているときのエネルギーは同様に

$$E = \frac{\rho_s \kappa^2}{4\pi}\left( (n_1+n_2)^2 \ln\frac{R}{a_0} - 2n_1 n_2 \ln\frac{d}{a_0} \right) \tag{2.2.3}$$

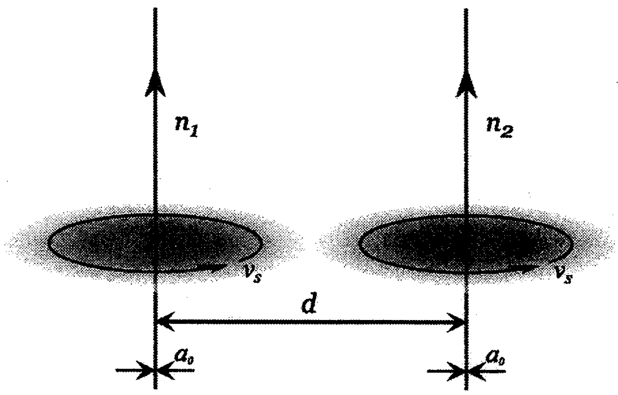



図２－２：平行な二本の渦糸

で与えられ、同符号の循環量子を持つ渦どうしには斥力が、異符号の循環量子を持つ渦どうしには引力が働くことがわかる。

## ２－３．循環の保存

ＨｅⅡ中の量子渦の最大の特徴は粘性による渦度の散逸がなく、ほかのどのような渦よりも明確に定義される渦であるということである。すなわち、粘性$\nu$があるときのNavier-Stokes方程式

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot \mathrm{grad})\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}p + \nu\nabla^2\vec{v} \tag{2.3.1}$$

の両辺の rot をとった式、

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{\omega} = \mathrm{rot}(\vec{v}\times\vec{\omega}) + \nu\nabla^2\vec{\omega} \tag{2.3.2}$$

から、通常の粘性液体では渦度は粘性により拡散し、循環は連続の値をとることになるが、粘性のない超流体中では渦度および循環は保存される。

## ２－４．渦環（Vortex ring）

渦環とはその名の通り渦糸が環状になってつながっている渦のことである。流体力学でよく知られているように、環の各部分が作る速度場がほかの環の部分に影響を及ぼすため、渦環それ自身が環に垂直な方向に速度を持つこととなる。半径$R$の円形の渦環のエネルギー$E$および自己誘導速度$v$、インパルス$P$はそれぞれ、

$$E=\frac{1}{2}\rho_s\kappa^2R\left(\ln\frac{8R}{a_0}-\frac{7}{4}\right) \tag{2.4.1}$$

$$v=\frac{\kappa}{4\pi R}\left(\ln\frac{8R}{a_0}-\frac{1}{4}\right) \tag{2.4.2}$$

$$P=\pi\rho_s\kappa R^2 \tag{2.4.3}$$

と与えられる。

(2.4.1)、(2.4.2)から$E\propto v^{-1}$となるので、$E$と$v$の関係を調べることにより、$\kappa$及び、$a_0$を決定することができる。

このことを用いて、液体ヘリウムに電圧$V$で加速した電荷$q$のイオン（$E=qV$となる）を注入しその周りにできた渦環の飛行時間を観測することによって、$\kappa$と、$a_0$を測ったのがG.W.Rayfield と F.Reif である[2)]。（図２－３参照）

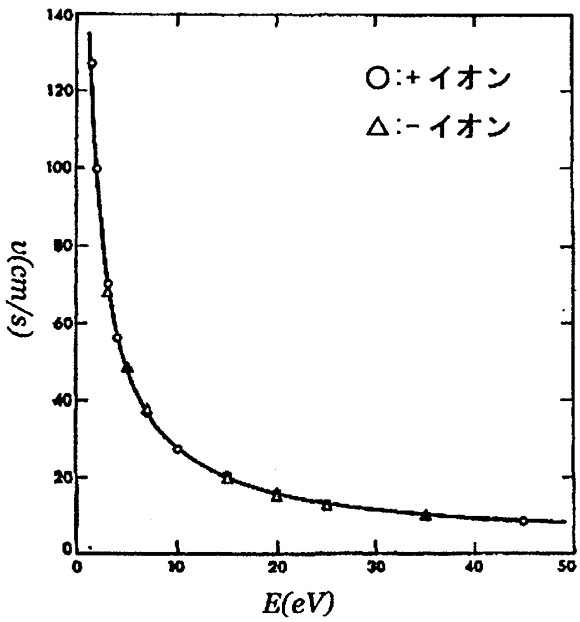



図２－３：He II 中に打ち込まれたイオンのエネルギーと速度の様子

この実験によると、

$$\kappa = (1.00 \pm 0.03) \times 10^{-3}\ \mathrm{cm^2/s} \quad 、\quad a_0 = (1.28 \pm 0.13)\ \text{Å} \tag{2.4.4}$$

となり、$\kappa$ 理論値(2.1.2)と一致し、$a_0$ も理論と整合する。

## 3．超流動乱流

二流体モデルでは超流体と常流体は独立であるとしたが、実際はそうではない。超流体が量子渦を構成すると、それに素励起が散乱され、量子渦を媒介とした相互作用が働く。

このことにより、力学の二体問題が三体問題になるように、系は複雑で多様な振る舞いを示すようになる。

この章では、He II をある流速以上で流すと量子渦糸タングルが形成され、それと常流動成分との間の相互作用（mutual friction）が現れることによる物理量の変化、その取り扱い及び実験的観測について説明し、渦糸タングルの時間発展に対して現象論的理解を与える Vinen 方程式について説明する。

### 3－1．Thermal Counter Flow

一端を閉じた管内でヒーターをたいて He II に熱量 $W$ を加えると温度差が生じて常流動成分がヒーターからバスに向かって流れるのに対し、流体全体の質量流は保存するので超流動成分は常流動と逆に流れることになる。これを Thermal counter flow（熱対向流）と呼ぶ。

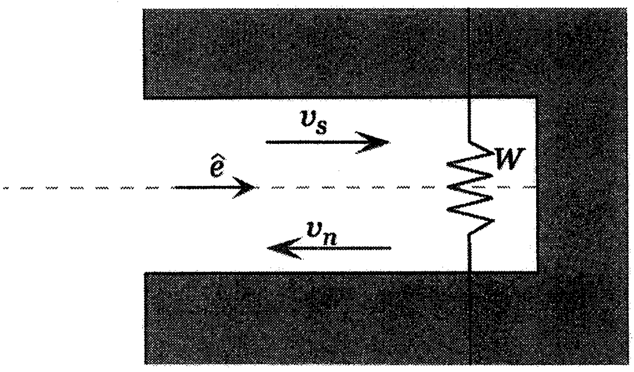



図３－１：熱対向流の模式図

管の断面積を $A$ とすると、エントロピー流れ密度は

$j_S = \dot{S}/A = \rho\sigma v_n$ （$\sigma$ はエントロピー密度[entropy/kg]）で与えられるから、加えた熱量 $W$ と流れの関係は

$$W = \frac{1}{A}\frac{dQ}{dt} = T\frac{\dot{S}}{A} = Tj_S = T\rho\sigma|v_n| \tag{3.1.1}$$

となる。ここで、$v_n$ は管断面にわたって平均化された量である。

(3.1.1)より、バスからヒーターの方向を正に取って、単位ベクトルを $\hat{e}$ ととると、

$$v_n = -\frac{W}{T\rho\sigma}\hat{e} \tag{3.1.2}$$

管内の質量流は保存するので、$j = \rho_n v_n + \rho_s v_s = 0$ より、

$$v_s = -\frac{\rho_n}{\rho_s}v_n = \frac{W\rho_n}{T\rho\rho_s\sigma}\hat{e} \tag{3.1.3}$$

$v_s$ も管断面にわたって平均化されている量であることに注意。以上の二式によりヒーターは超流動と常流動の対向流を駆動することが分かる。即ち、

$$v_{ns} = v_n - v_s = -\frac{W}{T\rho_s\sigma}\hat{e} \tag{3.1.4}$$

となる。

超流動、常流動成分の運動方程式は

$$\rho_s\left(\frac{\partial v_s}{\partial t} + (v_s \cdot \nabla)v_s\right) = -\frac{\rho_s}{\rho}\nabla P + \rho_s\sigma\nabla T \tag{3.1.5}$$

$$\rho_n\left(\frac{\partial v_n}{\partial t} + (v_n \cdot \nabla)v_n\right) = -\frac{\rho_n}{\rho}\nabla P - \rho_s\sigma\nabla T + \eta_n\nabla^2 v_n \tag{3.1.6}$$

ここで、管内の超流動が層流で定常流状態にあるとすると、(3.1.5)から、

$$\nabla P = \rho\sigma\nabla T \tag{3.1.7}$$

これを(3.1.6)に代入すると、

$$\rho_n\left(\frac{\partial v_n}{\partial t} + (v_n \cdot \nabla)v_n\right) = -\nabla P + \eta_n\nabla^2 v_n \tag{3.1.8}$$

と、通常の流体力学の Navier-Stokes 方程式となる。半径 R の円筒内の中心からの位置$r$での速度場の厳密解は$v_n(r) = -\frac{1}{4\eta_n}\nabla P(R^2 - r^2)$となることが知られているので、管断面に対して平均を取って、(3.1.7)を用いると、

$$v_n = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R v_n(r)2\pi r dr = -\frac{R^2}{8\eta_n}\nabla P = -\frac{R^2}{8\eta_n}\rho\sigma\nabla T \tag{3.1.9}$$

となる。この式と(3.1.2)から、

$$\nabla T_L = \frac{8\eta_n W}{T\sigma^2\rho^2 R^2}\hat{e} \tag{3.1.10}$$

$$\nabla P_L = \frac{8\eta_n W}{T\rho\sigma R^2}\hat{e} \tag{3.1.11}$$

となって、ヒーターによって作られた熱対向流が層流、定常流ならば、ヒーターとバスの間の温度差、圧力差は$W/T$に比例する形で与えられることがわかる。

この熱対向流による、温度差と圧力差をヒーターから加えられる熱量の関数として測定したのが、図３－２である。

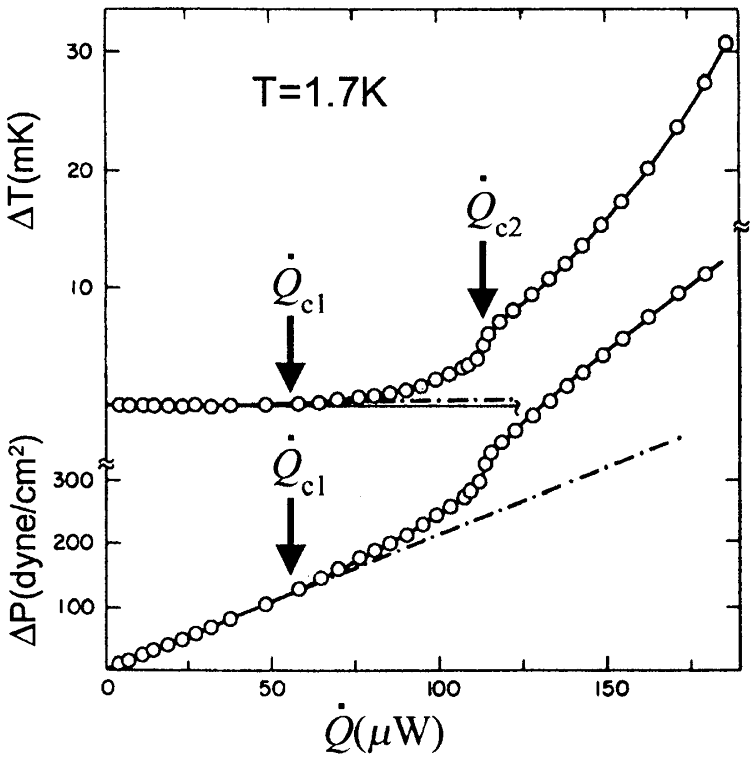



図３－２：熱対向流の実験で、加えられた熱量と生まれた温度差、圧力差の関係[3)]

この図から見られるように$\dot{Q} < \dot{Q}_{c1}$では層流が実現していることが見られるが、$\dot{Q} > \dot{Q}_{c1}$では余分の圧力差、温度差が生じていることがみえ、層流状態から乱流状態へ移行していることが見える。さらに$\dot{Q} > \dot{Q}_{c2}$で第二の乱流状態に転移している。

層流状態から乱流状態に入って超流体の中に渦糸が生じると素励起との衝突により、超流体と常流体の間に渦糸を介した相互作用が入ることになる。

この相互作用を導入することにより、これらの乱流状態における温度差と圧力差の振る舞いを説明できるであろうか？

これを見るために運動方程式(3.1.5)、(3.1.6)に単純に超流体と常流体の間の相互摩擦力$F_{sn}$とその反作用を加えて、

$$\rho_s\left(\frac{\partial v_s}{\partial t} + (v_s \cdot \nabla)v_s\right) = -\frac{\rho_s}{\rho}\nabla P + \rho_s \sigma \nabla T + F_{sn} \tag{3.1.12}$$

$$\rho_n\left(\frac{\partial v_n}{\partial t} + (v_n \cdot \nabla)v_n\right) = -\frac{\rho_n}{\rho}\nabla P - \rho_s \sigma \nabla T - F_{sn} + \eta_n \nabla^2 v_n \tag{3.1.13}$$

として同様に解くと、

$$\nabla P = \frac{8\eta_n W}{T\rho\sigma R^2}\hat{e} = \nabla P_L \tag{3.1.14}$$

$$\nabla T=\frac{8\eta_n W}{T\sigma^2\rho^2R^2}\hat{e}+\frac{F_{sn}}{\rho_s\sigma}=\nabla T_L+\frac{F_{sn}}{\rho_s\sigma} \tag{3.1.15}$$

となって、温度差の式の中には入ってくるが、圧力差には寄与しない。

従って、この余分の圧力差を説明する物としては相互摩擦力以外のものを考えなければならない。超流体と常流体の相互作用は相互摩擦力だけで表されるような単純な物ではないようである。

相互摩擦力以外に今までに超流体と常流体の間に新たな渦粘性（Eddy viscosity）が現れること [4]や、管の壁に渦がピン止めされることにより新たな相互作用が現れるなどの可能性が議論 [5]されているが結論は出ていない。

また、管断面の形によって $\dot{Q}_{c1}$、$\dot{Q}_{c2}$ が現れなくなったり、$\dot{Q}_{c1}$ だけが現れたりするなど、熱対向流状態の転移には不明な点も多い。

温度差の式の中には相互摩擦力が現れているが、この相互摩擦力による乱流状態での温度差の理解が、スケーリング理論と数値シミュレーションにより得られることを後に見ることにする(4章参照)。

### ３－２．相互摩擦力 $F_{sn}$

ここでは前節で導入した相互摩擦力の表式とその存在を検証した実験についてみる。

相互摩擦力 $F_{sn}$ は現象論的に以下のように表現できると考えられている。

$$F_{sn}=-\frac{\rho_s\rho_n}{2\rho}\Big[B\omega\times\{\hat{\omega}\times(v_n-v_s-\beta\nabla\times\hat{\omega})\}$$
$$+B'\omega\times(v_n-v_s-\beta\nabla\times\hat{\omega})\Big] \tag{3.2.1}$$

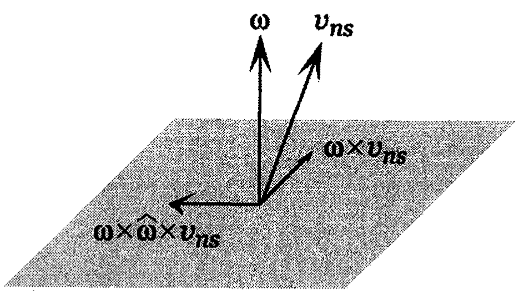



図３－３：相互摩擦力の方向。渦糸に垂直な方向の力だけを考える。

ここで、

$$\beta=\frac{\kappa}{4\pi}\log\frac{b}{a}\quad,\quad\hat{\omega}=\frac{\omega}{|\omega|} \tag{3.2.2}$$

である。$b$ 　は渦糸の平均間隔であり、それに合わして $v_n$、$v_s$ および $\omega$ は $b$ より十分大きい距離で平均化された量になっている。

(3.2.1)式中の $\beta\nabla\times\hat{\omega}$ は渦糸が有限の極率を持つことによる自己誘導速度であって、小括弧内の表式は常流動速度場と超流動速度場の相対速度を表している。

これは $\hat{\omega}$ と $v_{ns}$ があった時に $\hat{\omega}$ に垂直な面内で $v_{ns}$ の大きさに比例する二成分について、無次元の未定の定数を付けて表わしたものである。$\hat{\omega}$ に平行な成分は実験的に小さいことが分かっているので省略してある。

相互摩擦力の存在を検証する実験としては回転 He II 中の第二音波の減衰を測定した実験があ

る[6]（図３－４、図３－５参照)。

超流動ヘリウムを回転させて渦糸を作り、それに平行な方向と垂直な方向に第二音波をいれると平行な方向には減衰は起きないが、垂直な方向に入れた時に減衰することが観測された。

この実験を解釈する為、$F_{sn}$ の表式を二流体の方程式中に入れて、渦糸が垂直にまっすぐ立っていて、系がほぼ剛体回転している等の仮定のもとに線形化した二流体方程式を解いて第二音波の表式を求めると、その減衰率 $\alpha$ と振動数のずれ $\Delta\nu$ が

$$\alpha = B\Omega/2c_2 \quad , \quad \Delta\nu = (2-B')\Omega/2\pi \tag{3.2.3}$$

で与えられることが分かる。

このことから実験により相互摩擦力の係数 $B$ 、$B'$ 、およびその温度依存性が決められている。(図３－５参照)

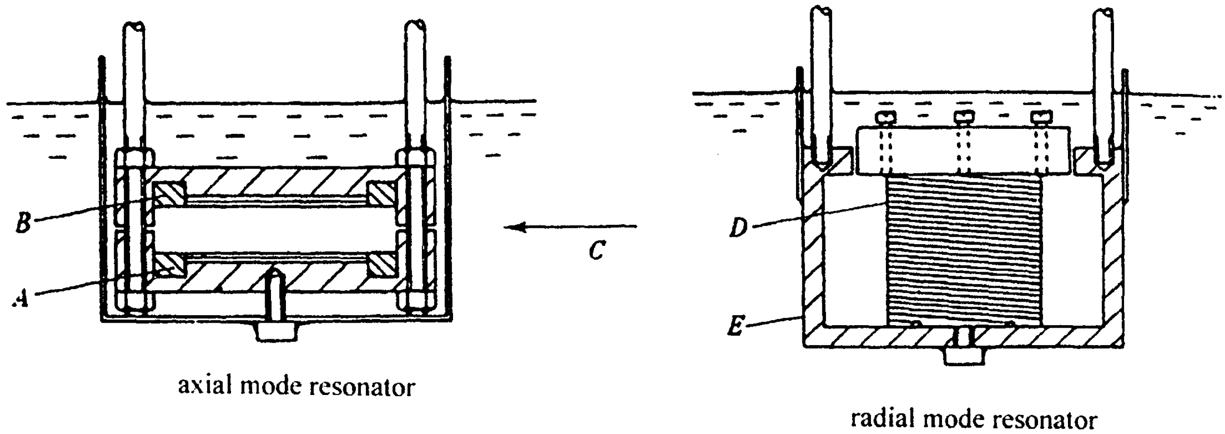



図３－４：相互摩擦力の検証の実験[6]。鉛直方向を軸にまわして渦を立てる。左の装置では渦に平行に音波を当て、右の装置では渦に垂直に音波を当てる。

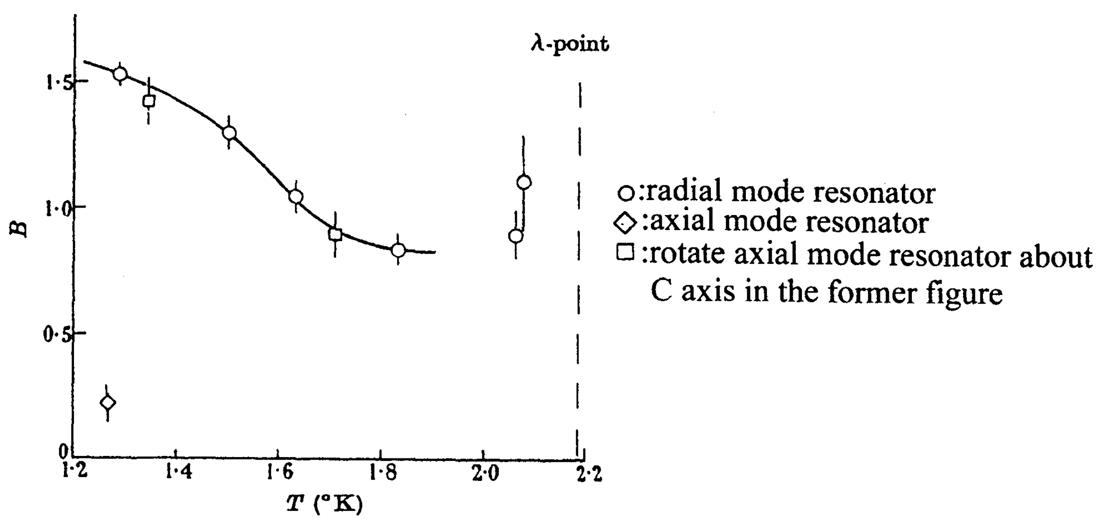



図３－５：上の実験の結果。□印は渦に平行に音波を当てる装置の回転軸を図３－４のＣの方向に変えて、渦に垂直に音波があたるようにしたデータ。

### ３－３．Vinen 方程式[7)]

３．１節で熱カウンター流がある程度以上になると渦糸が生じて乱流状態になる事を見たが、その渦糸の時間発展はどのように与えられるのであろうか？ここでは渦糸長密度という量を考え、その時間発展を次元解析を用いて現象論的に表現した Vinen 方程式について解説する。

渦糸長密度 $L$ とは単位体積あたり、どれだけの長さの渦糸が入っているかという量で、その次元は長さの(－２)乗で与えられる。

壁の影響のない一様な系でその時間発展は生成項と減衰項をもちいて、

$$\frac{dL}{dt} = \left(\frac{dL}{dt}\right)_{generate} - \left(\frac{dL}{dt}\right)_{decay} \tag{3.3.1}$$

と書くことが出来るであろう。

生成項について、ここで登場する物理量は渦糸長密度 $L\left[1/m^2\right]$、渦糸の単位長さあたりの相互摩擦力 $f\left[N/m\right]$、超流動密度 $\rho_s\left[kg/m^3\right]$、渦量子 $\kappa\left[m^2/s\right]$、であると考えられるから、$\dfrac{dL}{dt}\left[\dfrac{1}{m^2 s}\right]$ となるようにそれぞれの乗数を決めて、

$$\left(\frac{dL}{dt}\right)_{gen.} = \chi_1 \frac{L^{2-a/2} f^a}{\rho_s^a \kappa^{2a-1}} \tag{3.3.2}$$

となる。ここで、$\chi_1$ は比例定数である。実験との対応から $a=1$ が最も実験と一致する結果になることが分かっている。

$f$ を(3.2.1)を用いて書き換えれば、

$$\begin{aligned}\left(\frac{dL}{dt}\right)_{gen.} &= \chi_1 \frac{1}{\rho_s \kappa} \frac{B}{2} \frac{\rho_s \rho_n}{\rho} \frac{h}{m} (v_n - v_s) L^{3/2} \\ &= \alpha (v_n - v_s) L^{3/2} \quad , \alpha \equiv \chi_1 \frac{B \rho_n h}{2 \kappa \rho m}\end{aligned} \tag{3.3.3}$$

減衰項は平均渦間距離 $\ell = L^{-1/2}$ を用いて、特徴的な超流動速度が $v_s = \dfrac{\hbar}{m\ell}$ と書け、その変化の時定数が $\ell / v_s$ で書けると考えられることから、エネルギーの散逸の式

$$\frac{d}{dt} v_s^2 = -\chi_2 \frac{v_s}{l / v_s} = -\chi_2 \frac{{v_s}^2}{l} \tag{3.3.4}$$

を、$L$ で書き直して、

$$\left(\frac{dL}{dt}\right)_{decay} = -\chi_2 \frac{\hbar}{m} L^2 \tag{3.3.5}$$

となる。

以上より、現象論的な渦糸長密度の時間発展方程式（Vinen 方程式）、

$$\frac{dL}{dt} = \alpha v_{ns} L^{3/2} - \chi_2 \frac{\hbar}{m} L^2 \tag{3.3.6}$$

が導ける。

この式から、$L^{1/2} = \frac{\alpha m}{\chi_2 \hbar}(v_n - v_s)$ の時 $\frac{dL}{dt} = 0$ の平衡状態を満たす事がわかる。ただし、$L = 0$ も平衡状態となってしまうことから Vinen 方程式は最初にどうやって渦糸が入るかということにかんしては何の情報も与えないこともわかる。

## 4．量子渦の三次元ダイナミクス

ここでは、量子渦の運動を記述する方法及び、その運動方程式と、それを解く為の数値解析について述べる。

### 4－1．渦糸近似と Gross-Pitaevski 方程式による解析

量子渦の運動を記述する方法には渦糸近似という方法と Gross-Pitaevski 方程式(1.2.3)式参照、以下 GP 方程式と略）を用いる二つの方法がある。

渦糸近似とは渦芯の内部構造を無視して、渦を糸とみなす近似である。これは超流動ヘリウムの渦芯が数Åと細く、また粘性拡散がないため渦として安定であることから良い近似となる。また、糸と捉えることで容易に点の配置に置き換えられることから数値計算にとっても都合が良い。

しかし、渦芯の内部構造を無視している為その生成、消滅、再結合など、渦芯の直接関係する現象は見えない。

一方ＧＰ方程式を用いる方法では連続体として波動関数で表わすため、渦の内部構造を捉えることができる。この方法による渦の再結合を６章で見る。

しかし、原子間距離程度の物理を連続体とみなすことや、ＧＰ方程式はＨｅⅡのロトンスペクトルを記述できないことなど、渦芯の構造を GP 方程式で解析することには問題もある(６章参照)。また、渦糸近似のように渦を点に置き換えるわけにはいかず、空間にメッシュを切って数値解析しないといけないため大きなメモリーを必要とするなど、数値解析はこちらの方が厄介である。

この章では、渦芯から見て十分離れた位置から、渦芯の外の超流動速度場による渦の運動を見るので、以下渦糸近似による解析を行う。

## ４－２．渦糸上の超流動速度場

渦糸近似を用いて、渦を太さのない曲線として扱うのだから、渦糸を微分幾何により表現する。

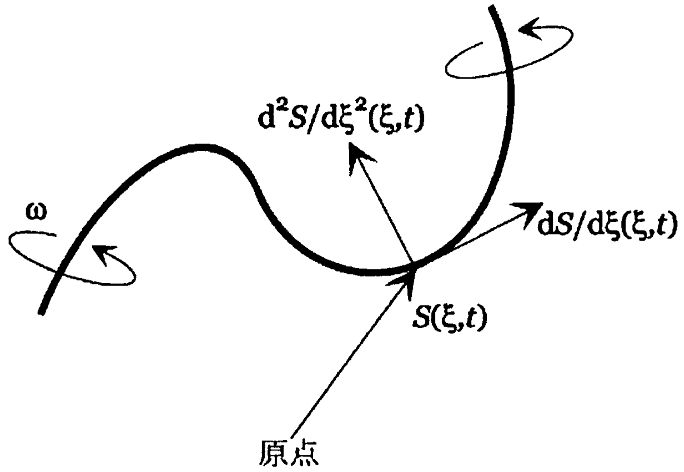



図４－１：微分幾何により渦糸を表現する

渦糸に沿って測った長さのパラメーターを$\xi$とし、渦糸状の点を$s(\xi,t)$であらわす。

$s' = ds/d\xi$は接線方向の単位ベクトルで、$s'' = d^2s/d\xi^2$　は法線方向のベクトルで、曲率半径を$R$とするとき$|s''| = 1/R$である。

これらの変数を用いると渦糸による渦度$\omega(r,t)$は、

$$\omega(r,t) = \kappa \int s'(\xi,t)\delta(r - s(\xi,t))d\xi \tag{4.2.1}$$

と表される。

この渦の周りの流動速度場$v_s(r,t)$は、$\omega = \nabla \times v_s$により、電流の周りの磁場と同様にBiot-Savart則により表されるから、

$$\begin{aligned} v_s(r,t) &= \frac{1}{4\pi}\int dr' \frac{\omega(r',t)\times(r-r')}{|r-r'|^3} + v_{sa} \\ &= \frac{\kappa}{4\pi}\int d\xi' \frac{s'(\xi',t)\times(r-s(\xi',t))}{|r-s(\xi',t)|^3} + v_{sa} \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

ここで、$v_{sa}$　は外部から駆動された超流動速度場である。

渦糸上の速度場を求める際にはその場所での曲率半径$R$を用いて$|\xi - \xi'| < R$の部分とそれ以外に積分をわける。

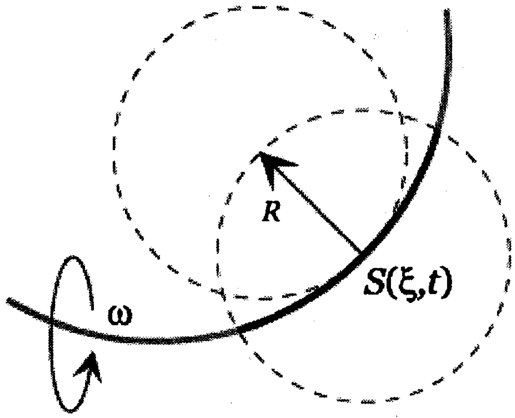



図４－２：渦糸上の自己誘導速度場の寄与を、
その点での曲率半径以内の渦糸の
作る速度場に限定する

$|\xi-\xi'|<R$ では $s(\xi')=s(\xi)+(\xi'-\xi)s'(\xi)+\frac{(\xi'-\xi)^2}{2}s''(\xi)$ と二次までの Taylor 展開を取って(4.2.2)式に代入し、積分変数を $\xi''=\xi'-\xi$ でとれば、この部分からの寄与 $v_i(\xi,t)$ は

$$v_i(\xi,t)=\frac{\kappa}{4\pi}\int_a^R\frac{d\xi''}{\xi''}s'(\xi)\times s''(\xi)=\beta s'(\xi)\times s''(\xi) \tag{4.2.3}$$

となる。ここで、$\beta=\frac{\kappa}{4\pi}\ln R/a$ である。

(4.2.2)式は $r(\xi,t)=s(\xi',t)$ で発散するから、積分の下限は渦芯半径 $a$ でとる。$v_i(\xi,t)$ は渦糸上に周りの渦糸が作る速度場で、渦環と同様、自己誘導速度と呼ばれる。

$|\xi-\xi'|\geq R$ の部分からの寄与は非局所的寄与 $v_i^{nol}$ と呼ばれる。周りの渦の配置に依存し他の渦が近づいてきた時に大きくなる。$|v_i|=|v_i^{nol}|$ となる距離 $\Delta$ は $|v_i^{nol}|=\frac{\kappa}{2\pi\Delta}$ と見積もれて、$|v_i|=\beta/R$ であるから、$\Delta=\frac{2R}{\ln(R/a)}$ となる。$v_i^{nol}$ は周りの渦が $\Delta$ 程度に近づいた時には重要な量となるが、それ以外の状況では無視してしまっても構わない。$v_i^{nol}$ を無視して局所的な自己誘導速度だけを超流動速度場として取り入れることを局所誘導近似（Localized Induction Approximation）と呼ぶ。

他に超流動速度場に寄与するものとしては境界の効果 $v_{sb}$ がある。超流動速度場は非粘性であることから法線成分がないので、境界の単位法線ベクトルを $\hat{n}$ とすると境界条件は $v_s\cdot\hat{n}=0$ となる。これを解析する際には電磁気学の場合と同様に鏡像法を用いる。即ち、境界の代わりにそれに対して対称な位置に反対の渦度を持つ仮想渦を置く。

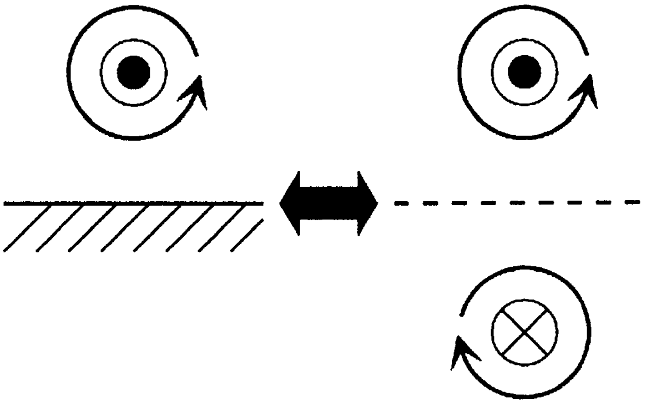


図４－３：渦における境界の取り扱い

以上により、渦糸上の超流動速度場はＬＩＡを取り入れて、

$$v_s = v_{sa} + v_{sb} + v_i \tag{4.2.4}$$

と表される。以下、$v_{sb}$ と $v_{sa}$ を区別はせずまとめて、外部からの超流動速度場ということで $v_{sa}$ と表示する。

### ４－３．渦糸に働く力と運動方程式

渦糸に働く力はマグナス力 $f_M$ と、前章で述べた相互摩擦力 $f_D$ の二種類が考えられる。

マグナス力 $f_M$ とは、カーブが曲がるのと同じで超流動速度場中の渦がベルヌーイの定理により受ける力であり、渦度 $\omega = \kappa s'$ をもつ渦が受ける単位長さ当りの力は

$$f_M = \rho_s \kappa s' \times (\dot{s} - v_s) \tag{4.3.1}$$

である。式中の $\dot{s} - v_s$ は渦糸と超流動速度の相対速度を意味する。$v_s$ は(4.2.4)式のそれである。

相互摩擦力 $f_D$ を $s$ を用いて書くと、単位長さ当りで、

$$f_D = \gamma_0 s' \times (s' \times (\dot{s} - v_n)) - \gamma_0' s' \times (\dot{s} - v_n) \tag{4.3.2}$$

となる。ここで係数にした $\gamma_0$ と前章で使った $B$ の関係は後で書く事にする。((4.3.5)、(4.3.6)参照。)

以上より渦糸の運動方程式は

$$f_M + f_D = \rho_s \pi a^2 \frac{d^2 s}{dt^2} \tag{4.3.3}$$

となるが、右辺の慣性項は渦糸の半径 $a$ が数Åサイズの量なので無視できるであろう。よって、$f_M + f_D = 0$ を $\dot{s}$ について解くと、

$$\underline{\dot{s} = v_{sa} + v_i + \alpha s' \times v_{ns} - \alpha' s' \times (s' \times v_{ns})} \tag{4.3.4}$$

となる。ここで、$v_{ns} = v_n - v_s$ すなわち常流動と超流動の相対速度である。相互摩擦力の係数 $\alpha$、$\gamma_0$、$B$ の関係は

$$\alpha = \frac{\rho_s \kappa \gamma_0}{\gamma_0^2 + (\rho_s \kappa - \gamma_0')^2} = \frac{\rho_n}{2\rho} B \tag{4.3.5}$$

$$\alpha' = \frac{\gamma_0^2 - \gamma_0'(\rho_s\kappa - \gamma_0')}{\gamma_0^2 + (\rho_s\kappa - \gamma_0')^2} = \frac{\rho_n}{2\rho} B' \tag{4.3.6}$$

となる。

下線をつけて強調して書いた、(4.3.4)式は渦糸の運動を数値シュミレーションする際の基本方程式となる。

3．2節で述べたように相互摩擦力の係数の $B$、$B'$ が実験的に知られているので、$\alpha$、$\alpha'$ の値も知ることが出来る。

## 4－4．運動方程式の例

転移温度近傍以外では $\alpha$ の方が $\alpha'$ よりも大きい事が実験的に知れている。即ち、$\hat{\omega}$ に垂直な面内で $v_{sa}$ に反対向きに働く力が支配的である。ここで、例として $\alpha'$ を無視した渦糸の運動方程式を用いて直線渦糸と渦環の時間発展をみてみよう。

1.　直線渦糸

直線渦糸が平行と反平行に並んでいる状況を考える。渦糸が直線だから自己誘導速度 $v_i = \beta s' \times s'' = 0$　である。簡単のため $v_n = 0$ とすると、運動方程式は、

$$\dot{s} = v_{sa} - \alpha\hat{\varphi} \times v_{sa} \tag{4.4.1}$$

となる。今の場合、$v_{sa}$ は隣の渦が自分のところに作る速度場だから、平行な場合、隣の渦の作る速度場によって互いに回りながら相互摩擦力によって離れていく。反平行な場合は、隣の渦の作る速度場によって並進しながら相互摩擦力によって近づくことになる。

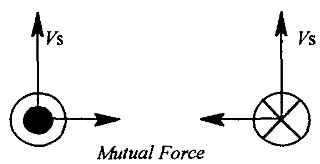



図４－４：反平行な直線渦糸は互いの速度場によって並進しながら、相互摩擦力により近づく。

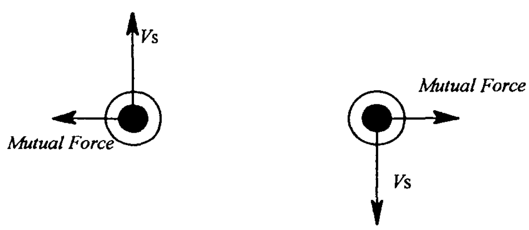



図４－５：平行な直線渦糸は互いの速度場によって回りながら、相互摩擦力により離れる。

2.　渦環

半径 $R$ の円形の渦環を考える。円柱座標 $(\hat{r}, \hat{\varphi}, \hat{z})$ を取ると長さパラメーター $\xi = a\varphi$ とできるから、$s = R\hat{r}$、$s' = \hat{\varphi}$、$s'' = -\hat{r}/R$ である。これと、(4.3.4)から境界の効果を無視して書くと、$v_i = \beta s' \times s''$ なので、

$$\dot{s} = v_{sa} + \beta s' \times s'' + \alpha s' \times (v_n - v_{sa} - \beta s' \times s'') \\ = v_{sa} + \frac{\beta}{R}\hat{z} + \alpha\hat{\varphi} \times \left( v_n - v_{sa} - \frac{\beta}{R}\hat{z} \right) \tag{4.4.2}$$

となる。

外部から起動される流れ$v_{sa}$は一様な流れであるから、最初の二項は並進運動を表しているだけで、形の変化には寄与しない。すなわち、渦環の形の変化は相互摩擦力の項が決めていることが分かる。

変化の方向は$v_n - v_{sa}$の$z$成分$(v_n - v_{sa})_z$の大きさで決まり、$\alpha > 0$であるから、$(v_n - v_{sa})_z - \beta / R > 0$なら$\dot{s} = +\alpha |(v_n - v_{sa})_z - \beta / R| \hat{r}$となってどんどん渦環は大きくなる。

逆に$(v_n - v_{sa})_z - \beta / R < 0$なら$\dot{s} = -\alpha |(v_n - v_{sa})_z - \beta / R| \hat{r}$となって渦環はどんどん小さくなる。

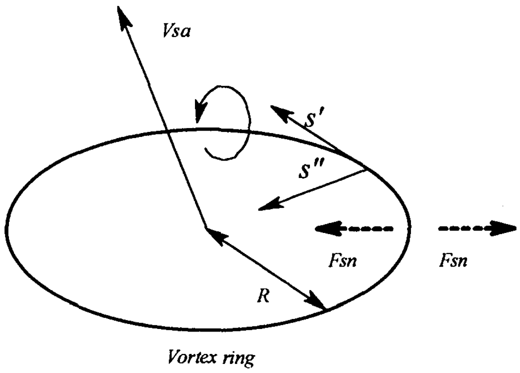



図４－６：渦環は輪に垂直な方向への相対速度場と自己誘導速度場の相対関係によって大きくなったり小さくなったりする。

このように渦糸は、自己誘導速度と外部からの速度場に乗りながら並進運動し、相互摩擦力によって自らの形を変えていくという振る舞いをする。

### ４－５．渦糸乱流のダイナミクス

さてここで再び熱対向流の問題に立ち返り、渦糸の運動方程式を用いて乱流を数値計算によりシミュレートすることでその実験結果を考察してみることにしよう。その前にまず数値計算シミュレーションを行う際に重要となる渦の再結合の問題とスケーリングについて述べる。

1.　渦の再結合

渦糸近似により乱流をシミュレーションする際の問題として渦の Reconnection の問題がある。渦同士が非常に接近した場合、元となる運動方程式では無視した非局所的効果の項$v_i^{nol}$が大きくなって渦同士が繋ぎ換えを起こすことが期待されるが、渦芯を点として捉えている渦糸近似ではこのような効果は取り入れられていないため、運動方程式とは別に手でこの操作を入れなくてはいけない。

この操作を入れる正当性は量子力学的考察からも支持される。すなわち、さまざまな角度で近づく渦の Gross-Pitaevski 方程式の数値計算により二つの渦が切り違えることが示されている（6章参照）。

実際数値計算に取り入れる際には、例えば以下で取り上げる Schwarz の計算ではＬＩＡが成り立たなくなる距離Δ程度に渦が近づけば確率 1 で再結合するという処理を行っている。しかし、Δは直線渦では発散する量のため、Tsubota、Sumnels らはΔとして空間分解能を取っている。

2.　スケーリング

非圧縮粘性流体の運動方程式を適当なスケーリング変換によって無次元化すると、レイノルズ数によって特徴付けられた式が得られ、同じレイノルズ数を持つ系について相似な結果を与える。

同様に、渦糸の運動方程式も $\beta = \frac{\kappa}{4\pi}\ln R/a$ を用いて、$t_0 = \beta t, v_0 = v/\beta$

と無次元化することにより(スケール変換を受けた量は添え字 0 を付けて示す)、

$$\frac{ds}{dt_0} = v_{sa,0} + s' \times s'' + \alpha s' \times v_{ns,0} - \alpha' s' \times \left(s' \times v_{ns,0}\right) \qquad (4.5.1)$$

と表される。ここで、$\beta$ 中の平均曲率 $R$ と渦芯半径 $a$ もスケール変換を受けるべき量であるが、系によらない量と仮定し、スケール変換を受けないと近似している。

このスケーリングによって、距離を $\lambda$ 倍、時間を $\lambda^2$ 倍、速度を $\lambda^{-1}$ 倍した系はもとの系と相似の関係になるから、物理量は全てその次元によって決まる $\lambda$ 依存性を示す。

すなわち、このスケーリングにより $\lambda$ を通じて異なる二つの物理量の間の依存性を知ることができる。

これによって、前述の熱対向流の実験において、温度差とヒーター $W$ の間の関係を求めることができるので、後は異なる $W$ に対する温度差を数値シミュレーションによって求めてやれば係数を決定できるようになる。

例えば、外部から駆動される常流体と超流体の相対速度場として

$$w = v_n - v_{sa} \qquad (4.5.2)$$

を定義する。この $w$ がヒーター $W$ でかけることは前に見た通りである。$\lambda$ 倍した系を添え字＊を使って表わすと、

$$w_{ns,0} = w^*_{ns,0} / \lambda \qquad (4.5.3)$$

となる。

又、渦糸タングルの密度をあらわす量として渦糸長密度

$$L = \frac{1}{\Omega}\int d\xi \qquad \text{（ここで}\Omega\text{は系の体積、}\xi\text{は渦糸に沿って取ったパラメーター）} \qquad (4.5.4)$$

を導入すると面積の二乗に逆比例する次元を持つ量だから、

$$L = L^* / \lambda^2 \qquad (4.5.5)$$

となる。

ここで、系が一様ならば渦糸タングルの密度は相対速度にのみ依存していると考えられる。即ち、

$$L = L^*\left(\frac{w_{ns,0}}{w^*_{ns,0}}\right)^2 = \left(\frac{L^*}{w^{*\,2}_{ns,0}}\right)\frac{w_{ns}^2}{\beta^2} = \frac{c_L^2}{\beta^2}w_{ns}^2 \tag{4.5.6}$$

即ち、$L$ は $\lambda$ を通じて相対速度 $w$ の二乗に依存することが分かる。

次に相互摩擦力が相対速度にどのように依存するか考察する。相互摩擦力の平均は、

$$F_{sn} = -\frac{\rho_s\kappa\alpha}{\Omega}\int s'\times(s'\times w)d\xi \tag{4.5.7}$$

となる。ここで、渦糸の分布は系の対称性から $w$ に平行な単位ベクトル $\hat{w}_{//}$ に対して軸対称だとしている。すなわち、系の対称性は $w$ の方向に破れていて、$(-w)$ の方向に働く $\alpha$ の項は残り、垂直な平面内に働く $\alpha'$ の項は対称性から消える。

異方性パラメーター

$$I_{//} = \frac{1}{\Omega L}\int d\xi\left[1-(s'\times\hat{w}_{//})^2\right] \tag{4.5.8}$$

$$I_{\perp} = \frac{1}{\Omega L}\int d\xi\left[1-(s'\times\hat{w}_{\perp})^2\right] \tag{4.5.9}$$

$$I_\ell\hat{w}_{//} = \frac{1}{\Omega L^{3/2}}\int d\xi(s'\times s'') \tag{4.5.10}$$

を導入して相互摩擦力をあらわすと、

$$F_{sn} = \rho_s\kappa\alpha\left(I_{//}Lw - I_\ell\beta L^{3/2}\right) = \rho_s\kappa\alpha c_L^2(I_{//}-c_LI_\ell)w^3/\beta^2 \tag{4.5.11}$$

と $L$ の $w$ 依存性から相互摩擦力の $w$ 依存性が求まる。また、ここに現れている、異方性パラメーター等の、未知の係数は渦糸のダイナミクスを与えられた $w$ に対して行い、渦糸の配置から求まる係数である。

以上で、数値計算に入る前の道具立ては揃った。すなわち、相互摩擦力を数値計算によって求めることのできる係数に置き換えることができた。ここで、熱対向流の実験の話に戻ると、熱対向流で乱流が生まれたことによる温度差 $\nabla T$ は、式(3.1.15)にあるように層流による温度差 $\nabla T_L$ と相互摩擦力を用いて、$\nabla T = \nabla T_L + \dfrac{F_{sn}}{\rho_s\sigma}$ と表された。乱流状態で相互摩擦力により生まれた第二項を $\nabla T_T$ と表わすと、相互摩擦力の $w$ 依存性から、乱流による温度差 $\nabla T_T$ の $w$ 依存性は

$$\nabla T_T = \frac{\kappa\alpha}{\sigma}c_L^2(I_{//}-c_LI_\ell)w^3/\beta^2 \tag{4.5.12}$$

となる。相対速度 $w$ をヒーター $W$ の関係は $|w| = \dfrac{W}{T\rho_s\sigma}$ となるので、後は数値計算から与えられた $w$ に対する $c_L$、$I_{//}$ 等の数値を求めてやれば、これから実験結果と比較することができる。

Schwarz による数値計算[8]の様子を図４－７に示す。

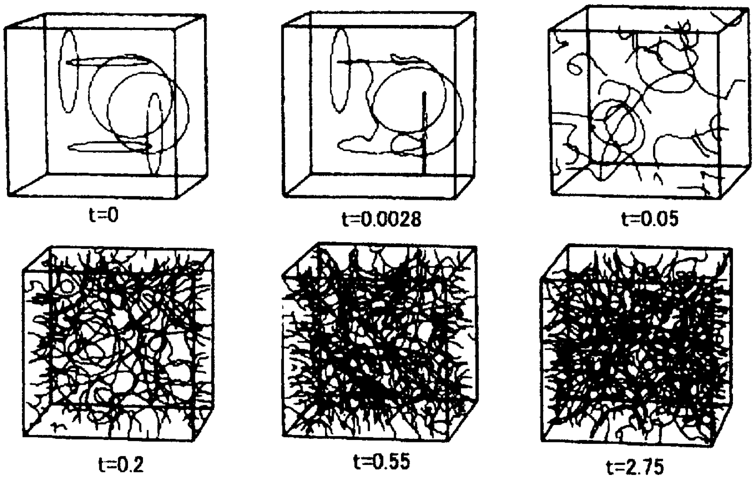



図４－７：Schwarz による数値解析の様子。T=1.6K での計算

この数値計算により求められた係数を使って実験の結果を解析しなおした[9]のが図４－８である。経験則に基づく解析が●印で示され、スケーリングによる結果が▲で示されている。
後者のほうが原点を含む直線に乗っていて、スケーリング理論の正当性を示している。

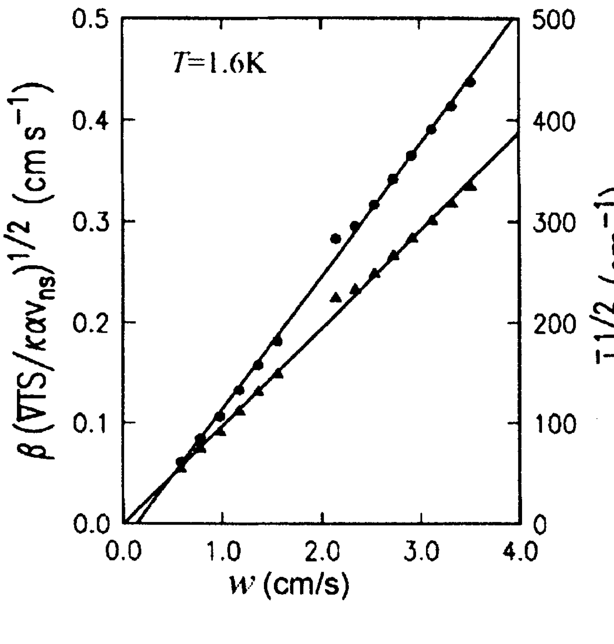



図４－８：:熱対向流の実験における、対向流と温度差のデータの解析

また、前述の相互摩擦力の温度変化を調べた数値解析の結果[8]が図４－９である。これもよい一致を示す。

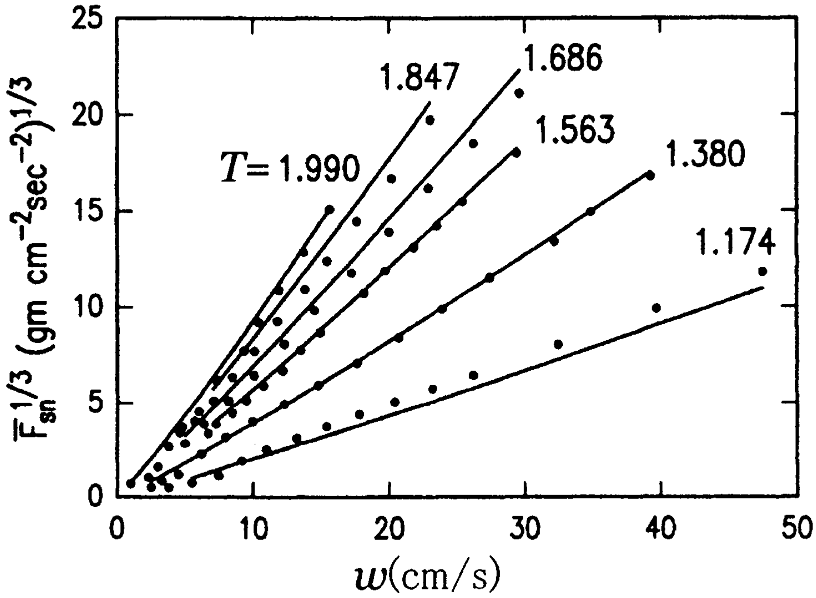



図４－９：:熱対向流の実験における、対向流と相互摩擦力のデータの解析。図中の線が式(4.5.12)の数値計算の結果。良い一致を示す。

## 5.　回転超流体

### 5－1．Landauの予言

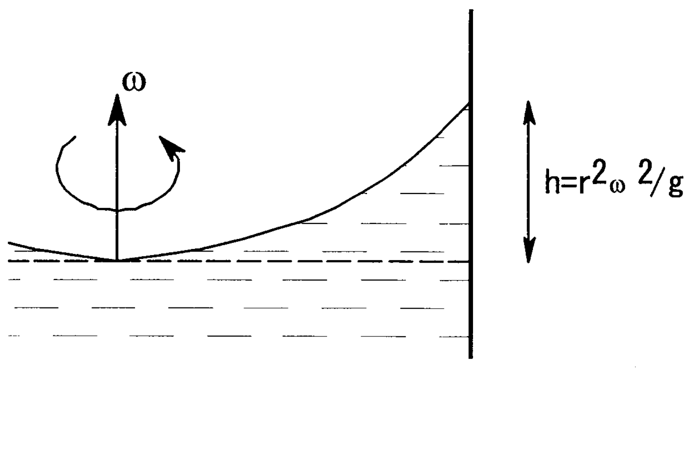
1941年Landauは超流動ヘリウム4を回転させた状況について以下のような考察を行った。

2流体モデルに立脚して回転超流体を考えると、常流体は粘性により通常の液体のように周りの容器といっしょにまわるが、中の超流体は粘性が無いのだから周りが回っていることなど知らず回転しないはずである。

よって、半径$R$の円筒容器を角速度$\omega$で回したときに出来る放物面上の、遠心力と重力のつりあいの式から

$$\rho_n r\omega^2 \cos\theta = (\rho_s + \rho_n) g \sin\theta \tag{5.1.1}$$

となるはずである。すなわち、超流体は遠心力に寄与しない。



これから、円筒容器の壁での高さ $h$ は

$$\frac{dh}{dr} = \tan\theta = \frac{\rho_n \omega^2}{\rho g} r \qquad \Longrightarrow \qquad h = \frac{\rho_n}{\rho} \frac{R^2 \omega^2}{2g} \tag{5.1.2}$$

となり、$h$ の温度変化から常流体の密度の温度変化が分かると予言した。

この考察に基づきさまざまな実験家が $h$ の温度変化の観測を試みたが、あらゆる実験結果は、$h$ は温度によらず、

$$h = \frac{R^2 \omega^2}{2g} \tag{5.1.3}$$

と与えられることを示した。すなわち、超流体も回転に参加しているということである。

### 5－2．剛体回転する超流体

さて、超流体はどのように回転に参加しているのであろうか。これは回転により生まれた超流体の渦が高密度かつ、一様に分布しているとすると理解できる。

位置 $r$ での速度場は、位置 $r_i$ にある渦の作る速度場の重ね合わせで書けるから、

$$v_s(r) = \frac{\kappa}{2\pi} \sum_i \frac{\hat{z} \times (\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \tag{5.2.1}$$

となる。渦密度 $n_v$ が十分大きいとして連続体近似をし、分布が一様だとすると、

$$\begin{aligned} v_s(r) &= \frac{\kappa}{2\pi} \int n_v(r') \frac{\hat{z} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} d\vec{r}' = \frac{\kappa}{2\pi} n_v \int \frac{\hat{z} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} d\vec{r}' \\ &= \kappa n_v \hat{z} \times \frac{\vec{r}}{r^2} \int_0^r r' dr' = \Omega_v \hat{z} \times \vec{r} \end{aligned} \tag{5.2.2}$$

となる。ここで、$\Omega_v = n_v \kappa / 2$ である。

この $\Omega_v$ が系の角速度 $\Omega$ に等しくなることはエネルギー最小の条件から分かる。すなわち、$\Omega$ で回転する系のエネルギー $E$ は

$$\begin{aligned} E &= \frac{\rho_s v_s^2}{2} - \vec{\Omega} \cdot (\vec{r} \times \rho_s \vec{v}_s) = \frac{\rho_s}{2} \left( (\vec{\Omega}_v \times r)^2 - 2(\vec{\Omega}_v \times \vec{r}) \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \right) \\ &= \frac{\rho_s}{2} (\vec{\Omega}_v \times r) \cdot \left( (\vec{\Omega}_v - 2\vec{\Omega}) \times \vec{r} \right) \end{aligned} \tag{5.2.3}$$

となって、$\Omega_v = \Omega$ となって、超流体は系の角速度と同じ速度で剛体回転していることが分かる。

しかし、上の結論にたどり着く前の我々は二つの仮定をした。すなわち渦の分布に関する連続体近似と、超流体の渦はもともと入っていたという二つである。

ともに剛体回転の結果からセルフコンシステントな結果が得られる。

$v_s = \vec{\Omega} \times \vec{r}$ から、$\nabla \times v_s = 2\vec{\Omega}$ となるから、渦密度 $n_v$ に関して、$n_v = 2\Omega / \kappa$ が得られる。典型的な実験条件として $\Omega = 1$ [rad/s] とすると、$n_v \approx 2000$ [1/cm$^2$] となって、$R = 1$[cm] 程度の、普通の大きさの円筒容器なら連続体近似と矛盾しない。

同様に渦があるほうが安定な必要条件は、渦が入ったほうがエネルギーが負になる関係式から、$\Omega > \Omega_{c1} = \dfrac{\kappa}{2\pi R^2} \ln\left(\dfrac{R}{a}\right) \approx 10^{-3}$ [1/s] と求まるので、通常の実験条件では超流体になった途端に渦が入ると考えられるから、前述の考察とは矛盾しないことが分かる。

ところで、ここでランダウの予言が別に間違いではないことを注意しておく。ここで言っているのはあくまで、超流体は十分密な渦糸分布を作って初めて剛体回転の速度場に参加するのであって、渦のない状態では当然超流体は止まったままである。このことは 67 年に G. B. Hess らによる超流体の角運動量の観測により確認されている [10]。

## ５－３．回転円筒容器中の渦のダイナミクス

次に回転する円筒容器中で渦がどのように運動するか考察することにする。

バルク中の渦糸の運動方程式はマグナス力 $f_M$ と相互摩擦力 $f_D$ を用いて、$f_D + f_M = 0$ とかけたが、回転円筒容器中では境界と回転によるポテンシャルエネルギーによる力も感じて動くはずである。

4.3 節で与えたマグナス力 $f_M$ と相互摩擦力 $f_D$ について再掲しておくと、

$$f_M = \rho_s \kappa s' \times (\dot{s} - v_s) \tag{5.3.1}$$

$$f_D = \gamma_0 s' \times (s' \times (\dot{s} - v_n)) - \gamma_0' s' \times (\dot{s} - v_n) \tag{5.3.2}$$

簡単のため容器中に渦は一本とし、渦糸は常に回転軸に平行に存在するならば、半径 $R$ の円筒容器中の中心からの $r$ 距離に存在する渦のエネルギーと角運動量は、image vortex を $R^2 / r$ の距離において考えて、

$$E = \frac{\rho_s \kappa^2}{4\pi}\left[\ln\left(\frac{R}{a}\right) + \ln\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)\right] \tag{5.3.3}$$

$$\vec{L} = \frac{\rho_s \kappa}{2}\left(R^2 - r^2\right)\hat{z} \tag{5.3.4}$$

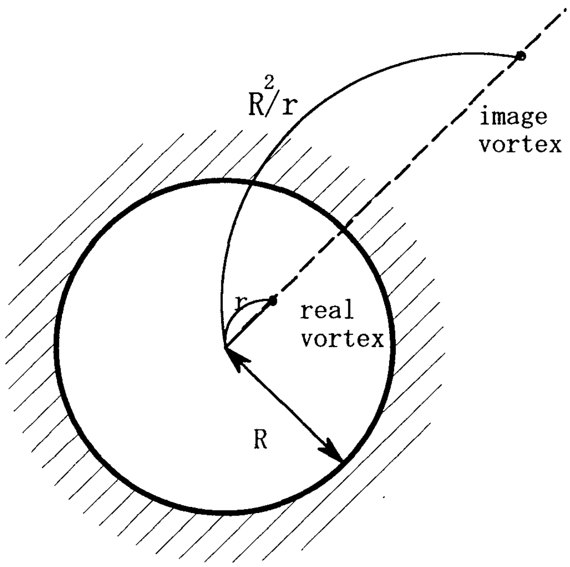



図５－２：回転円筒容器中の渦と、容器の壁による仮想渦。

となるから、静止系で $E' = E - \vec{\Omega} \cdot \vec{L}$ だけのポテンシャルエネルギーを渦は感じることになる。したがってそれによるポテンシャル力は

$$f_p = -\nabla\left(E - \vec{\Omega}\cdot\vec{L}\right) = \frac{\rho_s \kappa^2}{4\pi R} 2u\left(\omega - \frac{1}{1-u^2}\right)\hat{r} \tag{5.3.5}$$

となる。ここで、簡便のため無次元化した距離 $u = r/R$ と、角速度 $\omega = \dfrac{2\pi R^2}{\kappa}\Omega$ を導入している。

よって、回転中での運動方程式は $f_D + f_M + f_p = 0$ となるから、これを渦糸の移動する速度 $\dot{s}$ についてとけばよい。

計算は煩雑なので結果だけ書くと、(4.3.5)で与えられた $\alpha$ を用いると、

$$\dot{s}_r = 2\alpha u\left(\frac{1}{1-u^2} - \omega\right) \tag{5.3.6}$$

となって、$\omega > 1$ の時に、$r_c = R\sqrt{1 - \frac{1}{\omega}}$ より内側の渦は中に入ってくるが、$r_c$ より外側の渦は壁に向かって消えてしまうことが分かる。

また、ポテンシャルが中心からの距離によりどのように変化するかを考えても、同様の結果が得られる。

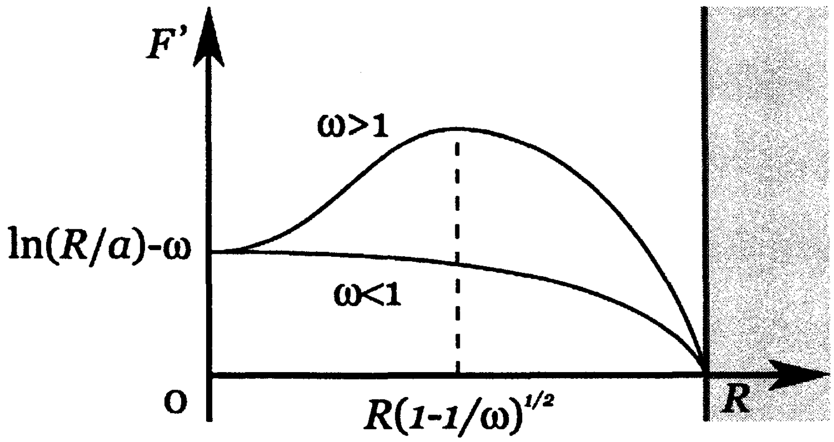



図５－３：回転によるポテンシャルの変化。縦軸は $E'$ を規格化したエネルギー。

このことは、$E$ と $-\Omega L$ の間の力関係から、回転速度の遅い場合は壁に向かって渦が消えた方がエネルギーを得するが、回転速度が速くなると、渦を中心において $L$ を稼いだほうが得であると考えると分りやすい。

しかしいずれにせよ、渦は壁から生まれるとするとすぐに壁に向かって消えてしまうことになるので、どうして渦は回転体の中に入れるか疑問となる。

先に見たように渦のできる臨界角速度は非常に低いため、超流体になった時にできた渦のうち $r_c$ より内側にいた渦だけが残るということは言えるだろう。

## ６．Gross-Pitaevski 方程式の解析

ここでは Gross-Pitaevski 方程式（以下ＧＰ方程式）を用いた渦のダイナミクス、主として渦の再結合について述べる。

ＧＰ方程式とはよく知られているように，多体系のシュレーディンガー方程式にδ関数型の相

互作用を仮定して平均場近似をとったもので，化学ポテンシャル$\mu$と相互作用の強さ$g$を用いて，

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi-\mu\Psi+g|\Psi|^2\Psi \tag{6.1}$$

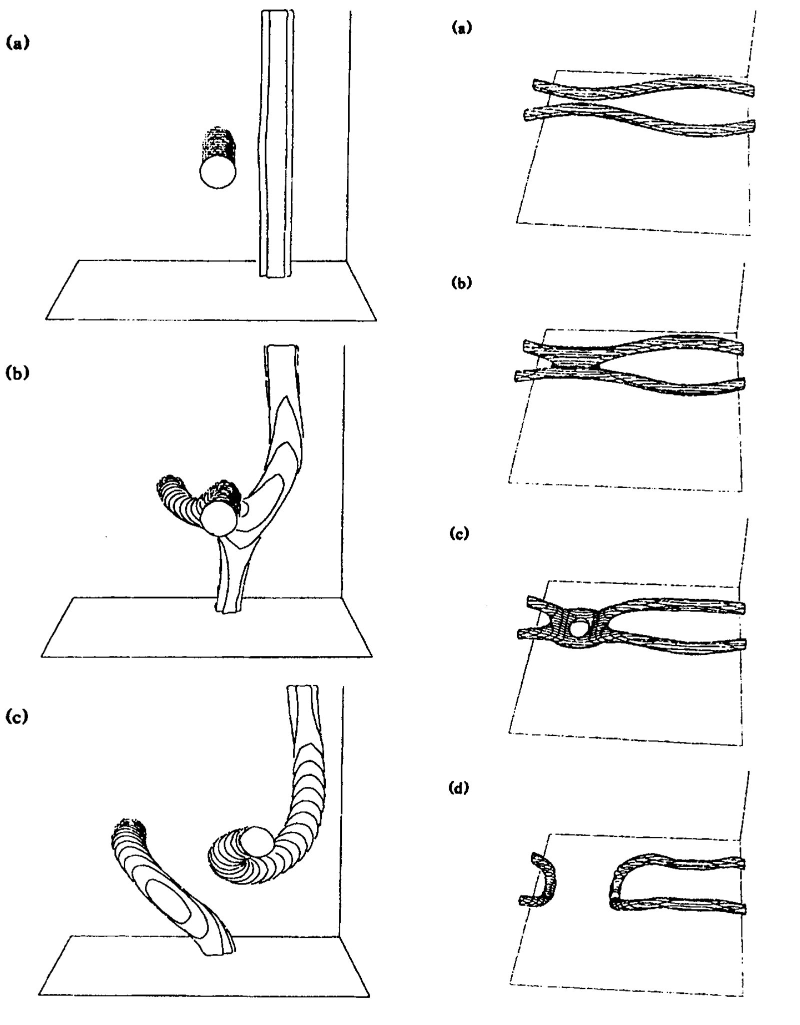
と書かれる。

ここでは一様な場合の解$|\Psi|^2=\mu/g=n_0$を用いて規格化された，

$$i\hbar\frac{\partial f}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 f-\mu f+g|f|^2 f \tag{6.2}$$

を用いる。

この式を用いて，量子渦の再結合のダイナミクスを数値計算したのが J.Koplik と H.Levine である[11]。




(i) 二つの渦が90度で近づく場合　(ii) 二つの渦が180度で近づく場合

図6－1：GP 方程式の数値解析による渦の切り違えの様子

彼らはさまざまな角度で近づく渦に対して数値計算を行い，二つの渦の角度が０度，すなわち平行な場合と４５度のケースでは交わるだけでつなぎ換えは起こらなかったが、９０度，１３５度、１８０度のケースについて渦が再結合を起こることを示した。

先に，Schwartz は渦糸近似を用いて渦糸乱流を解析する際に近づいた渦糸同士は再結合により繋ぎ換えが起こると仮定したが、この仮定の正しさをミクロな立場から指示するものといえる。

ただ、ヘリウムを単純な GP 方程式で解析することには問題もある。

規格化された式(6.2)を、原点で$f=0$、無限の遠方で$f=1$、$f'(x=\infty)=0$となる境

界条件、即ちバルクな空間中での渦という条件で解くと $f=\tanh\left(x/\sqrt{2}\,\xi\right)$ となる。ここで、

$\xi=\hbar/\sqrt{2mgn_0}$ が空間変化の特徴的距離、即ち渦の大きさを与えることになり、実際数値を入れると、2～3Å程度の原子スケールと同じぐらいの量となる。このような距離スケールの物理を連続体として取り扱ってよいか疑問である。

また、定常一様な解の周りの微小振動は

$$\hbar\omega=\sqrt{\frac{\hbar^2k^2}{2m}\left(\frac{\hbar^2k^2}{2m}+2gn_0\right)} \tag{6.3}$$

の形のエネルギースペクトルを持つ。ヘリウムのエネルギースペクトルは良く知られているようにロトンミニマムを持っているため、GP 方程式はロトンの現れる領域でヘリウムを正しく記述しない。

## 7. Vortex Nucleation

超流体が渦のない状態から渦のある状態へどのように移行するかという、量子渦の生成機構についての研究は、実験上、理論上もさまざまな困難があり、まだまだよく理解されているとはいえない。

渦生成に伴う超流動速度場の変化や、HeⅡ中のイオンの運動の研究などさまざまなものがあるが、ここでその全てを紹介することは差し控えさせていただく。

ここでは簡単なケースとして、渦生成のために越えなければならないエネルギー障壁の大きさの評価を行う。

### 壁から直線渦が生まれるケース

右の図のように壁と平行に速度場 $v_s$ のある状況で、壁から $z$ だけ離れた位置に壁と平行に直線渦が生まれたとする。壁は前述のように鏡像法のごとく扱えるから、反対向きの渦が距離 $2z$ だけ離れて存在するのと同じ状況として扱える。

この場合、渦の単位長さ辺りのエネルギー $E$ とインパルス $P$ はそれぞれ

$$E=\frac{\rho_s\kappa^2}{2\pi}\ln\left(\frac{2z}{\pi a}\right) \tag{7.1}$$

$$P=\rho_s\kappa\cdot 2z \tag{7.2}$$

となる。ここで $a$ は渦芯半径である。

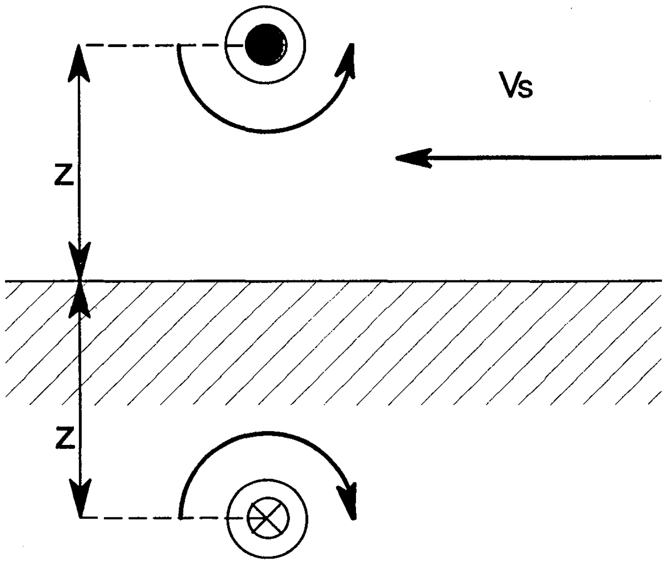


図７－１：壁の近くで直線渦が生まれるケース

これからガリレイ変換したエネルギー $F = E - P \cdot v_s$ を距離の関数として書いた時に、ある距離 $z_n$ から先で負になるために越えなければいけないエネルギー障壁として、

$$\Delta F \approx \rho_s \kappa^2 \approx 10^9 \text{ [K/cm]} \tag{7.3}$$

となることがわかる。

渦の長さを 10Å と見積もってもエネルギー障壁は１００Kのオーダーとなるため、熱的にも量子的にも直線渦が励起されるというのは非現実的だということが分かる。

**渦環の場合**

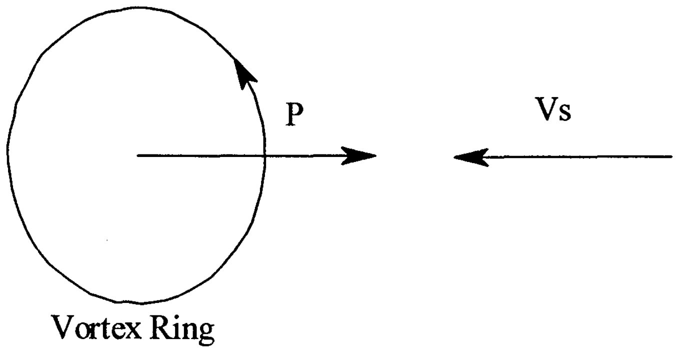



図７－２：渦環の場合

半径 $R$ の渦環に対して同様の考察を行うと、渦環のエネルギー $E$ とインパルス $P$ はそれぞれ、

$$E = \frac{\rho_s \kappa^2}{2} R\left(\ln\frac{8R}{a} - \frac{7}{4}\right) \tag{7.4}$$

$$P = \pi \rho_s \kappa R^2 \tag{7.5}$$

と与えられるから、典型的に $v_s = 50\text{[cm/s]}$ とした時のエネルギー障壁として

$\Delta F \approx 10^5 \text{[K/cm]}$、エネルギーが負になる渦環半径 $R_n \approx 10^{-5} \text{[cm]}$ が得られる。これからエネルギー障壁は数 K のオーダーであるから、渦環の生成については熱的に可能であることが分かる。

## 参考文献

全般にわたる参考文献として以下を上げる。

[1]藤田敏三・児玉隆夫・世良正文・坪田誠： 低温の物性物理（講談社サイエンティフィック、2000)
[2]山田一雄・大見哲巨： 超流動（培風館、1995)
[3]R.J.Donnely： Quantized vortices in Helium II (Cambridge University Press 1991)

1) W.F.Vinen： Proc. Roy. Soc. **A260** (1961) 218
2) G.W.Rayfield and F.Reif： Phys. Rev. **136** (1964) A1194
3) D.R.Ladner, R.K.Childers and J.T.Tough： Phys. Rev. **B13** (1976) 2918
4) J.T.Tough : Chapter 3 in *Prog. In Low Temp. Phys.* Vol.VIII, ed. by D.F.Brewer (North-Holland, 1982)
5) J.Yamauchi and K.Yamada： Physica **128B** (1985) 45
6) H.E.Hall and W.F.Vinen： Proc. Roy. Soc. **A238** (1956) 204
7) W.F.Vinen： Proc. Roy. Soc. **A242** (1957) 493
8) K.W.Schwarz： Phys. Rev. **B38** (1988) 2398
9) K.W.Schwarz： Phys. Rev. **B44** (1991) 7563
10) G.B.Hess and W.M.Fairbank： Phys. Rev. Lett. **19** (1967) 216
11) J.Koplik and H.Levine： Phys. Rev. Lett. **71** (1993) 1375