Title	勾配系,歪勾配系における安定性解析(応用解析チュートリアル,講義ノート)
Author(s)	柳田, 英二
Citation	物性研究 (2002), 78(2): 126-143
Issue Date	2002-05-20
URL	http://hdl.handle.net/2433/97208
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

勾配系，歪勾配系における安定性解析

柳田 英二（東北大・理・数学）

いわゆる activator-inhibitor[1] 型の反応拡散系においては，安定な空間パターン，進行波，時間的振動，過渡的な時空間パターンの形成など，きわめて興味深い解の振る舞いが観測される．しかしながら，activator-inhibitor 型の反応拡散系は順序保存系[2] ではないこと，解の周りの線形化作用素が自己随伴[3] ではないこと，従って固有値は実数とは限らずまた変分原理が成り立たないなど，一般的な解析にはいろいろな困難がともなう．そこで，意味のある解析を行うために系に特殊な構造を仮定する必要がある．たとえば，系に微小パラメータを導入して摂動論的手法を用いて解析したり，あるいはパラメータの変化に伴う分岐構造から解全体の構造を把握するなどの方法をとる．

本稿では，このような方向とは異なり，各種の反応拡散系の一般的に取り扱うために歪勾配構造と呼ばれる特殊な構造を導入し，その枠組みの中で空間パターンの安定性に関する解析を行うことを試みる．この歪勾配構造と呼ばれる構造はいわゆる勾配構造とは非線形項の符号が多少変わるだけであるが，その定性的振る舞いはまったく異なる一方で，数学的にはス少類似した構造を持っている．本稿では主に [16] の内容に基づき，歪勾配構造と勾配構造を対比させながら歪勾配反応拡散系の安定性解析について解説していく．

[1] activator: 活性化因子, inhibitor: 抑制因子. 2種類の因子 (生物, 化学物質など) が, 一方が他を活性化させ, 他方がもう一方を抑制するという相互関係になっている. 自然界における様々な時空間パターンは, このような関係にある2種類の因子の相互作用によって形作られていることが多い. 例えば, (1.5) 参照.

[2] なんらかの意味において, 方程式の解の間に順序関係をつけることができ, その関係が時間発展しても保存される系をいう. 実数値をとる単独の反応拡散方程式は順序保存系であるが, 一般の反応拡散系 (システム) は順序保存系ではない. 例えば, [12] を参照.

[3] 自己共役ともいう. 対称行列を一般化したもので, 量子力学におけるポテンシャル項のついたシュレディンガー作用素 $-\Delta + q(x)$ などが例としてあげられる.

1 勾配系と歪勾配系

次の $(m+n)$ 成分反応拡散系を考えよう．

$$(1.1) \qquad \begin{cases} Su_t = C\Delta u + f(u,v) & \text{in } \Omega \\ Tv_t = D\Delta v + g(u,v) & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial}{\partial \nu}u = 0 = \dfrac{\partial}{\partial \nu}v & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

ただし $m,n>0$, $u(x,t)=(u_1,\dots,u_m)^t$, $v(x,t)=(v_1,\dots,v_n)^t$ とし，また Ω は十分滑らかな境界 $\partial\Omega$ を持つ $\mathbf{R}^N$ の有界領域，$\partial/\partial\nu$ は境界における法線微分を表すものとする．また S と C は m 次の正定値対称行列，T と D は n 次の正定値対称行列とする．

ある滑らかな関数 $W(u,v):\mathbf{R}^{m+n}\to\mathbf{R}$ に対し，非線形項 $f=(f_1,\dots,f_m)^t:\mathbf{R}^{m+n}\to\mathbf{R}^m$ および $g=(g_1,\dots,g_n)^t:\mathbf{R}^{m+n}\to\mathbf{R}^n$ が

$$(1.2) \qquad f(u,v) = -\nabla_u W(u,v), \qquad g(u,v) = -\nabla_v W(u,v)$$

と表されるとき，系 (1.1) は勾配構造を持つという．ただし，∇_u と ∇_v は u と v に関する勾配作用素，すなわち

$$\nabla_u := \Big(\frac{\partial}{\partial u_1},\dots,\frac{\partial}{\partial u_m}\Big)^t, \qquad \nabla_v := \Big(\frac{\partial}{\partial v_1},\dots,\frac{\partial}{\partial v_n}\Big)^t$$

である．一方，(1.2) を

$$(1.3) \qquad f(u,v) = -\nabla_u W(u,v), \qquad g(u,v) = +\nabla_v W(u,v)$$

で置き換えたとき，系 (1.1) は歪勾配構造を持つということにする．

勾配系の例としては，超伝導のモデルである Ginzburg-Landau 方程式

$$(1.4) \qquad \begin{cases} u_t = u_{xx} + u(1-u^2-v^2) \\ v_t = v_{xx} + v(1-u^2-v^2) \end{cases}$$

をあげておこう．実際

$$W(u,v) = \frac{1}{4}(1-u^2-v^2)^2$$

と置くと, この方程式は

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - \dfrac{\partial W}{\partial u} \\ v_t = v_{xx} - \dfrac{\partial W}{\partial v} \end{cases}$$

と表され，勾配系であることが分かる．一方，歪勾配系の典型例としては神経軸索のモデルである FitzHugh-Nagumo 方程式

$$
(1.5)\qquad \begin{cases} u_t = \Delta u + f(u) - v \\ \tau v_t = d\Delta v + \varepsilon(u - \gamma v) \end{cases}
$$

があげられる．ただし $\tau, d, \varepsilon > 0$, $\gamma \geq 0$ は定数である．実際

$$
W(u,v) := -\int f(u)du + uv - \frac{1}{2}\gamma v^2
$$

と置くと，(1.5) は

$$
\begin{cases} u_t = \Delta u - \dfrac{\partial W}{\partial u} \\ \dfrac{\tau}{\varepsilon} v_t = \dfrac{d}{\varepsilon}\Delta v + \dfrac{\partial W}{\partial v} \end{cases}
$$

と表され，歪勾配系であることが分かる．

系 (1.1) が勾配構造または歪勾配構造を持つとき，汎関数

$$
(1.6)\qquad E[u,v] := \int_\Omega \left\{ \frac{1}{2} \langle\, C\nabla u, \nabla u \,\rangle \pm \frac{1}{2} \langle\, D\nabla v, \nabla v \,\rangle + W(u,v) \right\} dx
$$

を導入しよう（$\pm$ は勾配系に対しては $+$ を，歪勾配系に対しては $-$ をとるものとする）．ただし ∇ は x についての勾配作用素で，$C = (\,c_{ij}\,)$, $D = (\,d_{ij}\,)$ および

$$
\langle\, C\nabla u, \nabla u \,\rangle := \sum_{i,j=1}^{m} c_{ij} \nabla u_i \cdot \nabla u_j, \quad \langle\, D\nabla v, \nabla v \,\rangle := \sum_{i,j=1}^{n} d_{ij} \nabla v_i \cdot \nabla v_j
$$

とする．(u,v) が (1.1) の解であれば，

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} E[u(x,t), v(x,t)] \\
&\quad = \int_\Omega \Big\{ \langle\, C\nabla u, \nabla u_t \,\rangle \pm \langle\, D\nabla v, \nabla v_t \,\rangle - f(u,v)\cdot u_t \mp g(u,v)\cdot v_t \Big\} dx \\
&\quad = \int_\Omega \Big\{ - \langle\, C\Delta u, u_t \,\rangle \mp \langle\, D\Delta v, v_t \,\rangle - f(u,v)\cdot u_t \mp g(u,v)\cdot v_t \Big\} dx \\
&\quad = -\int_\Omega \{ Su_t \cdot u_t \pm Tv_t \cdot v_t \}\, dx
\end{aligned}
$$

となる．従って，勾配系では $E[u,v]$ は時間的に常に非増加であり，系はエネルギー $E[u,v]$ が低くなる方向に発展していく．これは勾配系には時間周期解は存在せず，また安定な平衡状態は $E[u,v]$ の極小となる状態として特徴づけられることを表している．一方，歪勾配系では $E[u,v]$ は時間的に非増加あるいは非減少とは限らず，その振る舞いは勾配系よりも複雑なものになり得ることが予想される．

歪勾配系のダイナミクスがどのようなものかを多少理解するために以下のように考えてみる．まず (1.1) の第 1 式において v が $\psi(x)$ に固定されているとすると，u に関する方程式

$$
\begin{cases} Su_t = C\Delta u + f(u,\psi) & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial}{\partial\nu}u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.7}
$$

を得る．この方程式の解 $u(x,t)$ に対して

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E[u(x,t),\psi(x)] &= \int_\Omega \Big\{ \langle\, C\nabla u, \nabla u_t \,\rangle \; - f(u,\psi)\cdot u_t \Big\} dx \\
&= \int_\Omega \Big\{ -C\Delta u \cdot u_t - f(u,\psi)\cdot u_t \Big\} dx \\
&= -\int_\Omega Su_t \cdot u_t dx \le 0
\end{aligned}
$$

が成り立つから (1.7) は $E[u,\psi]$ に関する勾配系となっている．従って，$u=\varphi$ が (1.7) の定常解であれば $u=\varphi$ はまた $E[u,\psi]$ の停留点であり，その逆も成り立つ．さらには定常解 $u=\varphi$ が (1.7) の解として安定であるということと，それが $E[u,\psi(x)]$ の local minimizer であることは等価である．

同様に，(1.1) の第 2 式において u が $\varphi(x)$ に固定されているとすると，v に関する方程式

$$
\begin{cases} Tv_t = D\Delta v + g(\varphi,v) & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial}{\partial\nu}v = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.8}
$$

を得る．この方程式の解に対し，

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E[\varphi(x),v(x,t)] &= \int_\Omega \{-\langle\, D\nabla v, \nabla v_t \,\rangle \; + g(\varphi,v)\cdot v_t\}\, dx \\
&= \int_\Omega \{D\Delta v \cdot v_t + g(\varphi,v)\cdot v_t\}\, dx \\
&= \int_\Omega Tv_t \cdot v_t dx \ge 0
\end{aligned}
$$

となるから，(1.8) は $-E[\varphi,v]$ に関する勾配系である．従って，$v=\psi$ が (1.7) の定常解であれば $v=\psi$ はまた $E[\varphi,v]$ の停留点であり，その逆も成り立つ．さらには定常解 $v=\psi$ が安定であるということと，それが $E[\varphi,v]$ の local maximizer であることは等価である．

一方，(1.3) より

$$
f_v := \nabla_v f = \left(\frac{\partial f_i}{\partial v_j}\right) = \left(-\frac{\partial^2 W}{\partial u_i \partial v_j}\right)
$$

および

$$
g_u := \nabla_u g = \left(\frac{\partial g_i}{\partial u_j}\right) = \left(+\frac{\partial^2 W}{\partial u_j \partial v_i}\right)
$$

となるから

$$f_v = -g_u^t$$

が成り立つ．以上のことから，おおざっぱには，歪勾配構造を持つ反応拡散系とは，二つの勾配系を歪対称にカップリングさせた activator-inhibitor 型の系のことであると言える．

系 (1.1) の定常状態 $(u,v) = (\varphi(x), \psi(x))$ について考えよう．これは楕円型境界値問題

$$\text{(1.9)} \qquad \begin{cases} C\Delta\varphi + f(\varphi,\psi) = 0 & \text{in } \Omega \\ D\Delta\psi + g(\varphi,\psi) = 0 & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial}{\partial\nu}\varphi = 0 = \dfrac{\partial}{\partial\nu}\psi & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

を満たす．定常解は，この汎関数 $E[u,v]$ の停留点 (critical point) に対応することに注意しよう．実際，(1.9) は $E[u,v]$ のオイラー・ラグランジュ方程式に他ならない．上で述べたように，勾配系の定常解の安定性は $E[u,v]$ の local minimizer であるかどうかで判定でき，時定数 S, T の選び方に依らない．歪勾配系では事情はそう単純ではないので，安定性解析の標準的な手法の一つである固有値解析をおこなう．よく知られているように [5], (1.1) の定常解としての $(u,v) = (\varphi,\psi)$ フ安定性は固有値問題

$$\text{(1.10)} \qquad \begin{cases} \lambda SU = C\Delta U + f_u U + f_v V \\ \lambda TV = D\Delta V + g_u U + g_v V \end{cases}$$

(f_u, f_v, g_u g_v は (φ,ψ) における f, g の u, v に関する微分を表す）をノイマン境界条件のもとで調べることによって判定できる．ある $\delta > 0$ に対して (1.10) のすべての固有値が $Re\{\lambda\} < -\delta$ を満たすとき，$(u,v) = (\varphi,\psi)$ は (1.1) の定常解として線形安定であるという．逆に実部が正の固有値が存在するとき，線形不安定であるという．よく知られているように [5]，線形安定（不安定）であればリアプノフの意味でも安定（不安定）となる．

勾配系に対してはこれは自己随伴な固有値問題となり，すべての固有値が実数であって最大固有値が変分原理によって特徴付けられるなど，比較的扱いやすい性質を備えている．ところが歪勾配構造に対しては自己随伴固有値問題とはならず，従って複素固有値が存在するなどいろいろ技術的な問題が生じ，固有値の位置を特定することは一般に容易ではない．しかしながら，第3節で示すように，歪勾配系に特有の歪対称なカップリングにより，ある程度は固有値の実部に関する情報を引き出すことが可能となる．このためのキーとなるアイディアは，定常解が $E[u,v]$ の停留点であることに着目し，その mini-maximizing property を考察することにある．歪勾配系に対し，もし $u=\varphi$ が $E[u,\psi]$ の minimizer で $v=\psi$ が $E[\varphi,v]$ の maximizer となるとき，$(u,v) = (\varphi,\psi)$ は $E[u,v]$ の mini-maximizer という．(より精密な定義は第2節で与える.) 以下では特に，(1.1) の定常解としての $(u,v) = (\varphi,\psi)$ の安定性と，$E[u,v]$ の停留点としての mini-maximizing property との関わりについて調べていく．

安定性と mini-maximizing property の同様の関わりは，いわゆる Turing の拡散不安定性についても観察される．第 4 節では，空間一様な定常解の Turing の拡散不安定性と，$W(u, v)$ の mini-maximizing property の関わりについて考察する．

第 5 節では，歪勾配系の mini-maximizer の注目すべき性質として，凸領域における mini-maximizer は空間一様なものに限ることを示す．この種の結果はスカラー反応拡散方程式に関する Casten-Holland [1] や Matano [8]，勾配系に関する Jimbo-Morita [3] や Lopes [7] の結果の類似が歪勾配系に対しても成り立つことを表している．この性質と，mini-maximizer の安定性に関する一般的な結果からいろいろな性質を引き出すことが可能となる．

2 定義と準備

この節では主に歪勾配系について考え，$E[u, v]$ の停留点に関する精密な定義とその基本的な性質について述べる．

$u = \varphi$ が $E[u, \psi]$ の local minimizer であり，$v = \psi$ が $E[\varphi, v]$ の local maximizer となるとき，$(u, v) = (\varphi, \psi)$ は $E[u, v]$ の mini-maximizer であるという．より精密には，$(u, v) = (\varphi, \psi)$ が $E[u, v]$ の mini-maximizer であるとは，$H^1(\Omega; \mathrm{R}^m)$ （おおざっぱには，下の脚注を参照）における φ フある近傍内のすべての U に対して

$$E[U, \psi] \geq E[\varphi, \psi]$$

が成り立ち，また $H^1(\Omega; \mathrm{R}^n)$ における ψ のある近傍内のすべての V に対して

$$E[\varphi, V] \leq E[\varphi, \psi]$$

が成り立つことをいう．$E[u, \psi]$ の停留点 $u = \varphi$ が非退化であるとは，線形化作用素

$$\mathcal{A} := C\Delta + f_u \tag{2.1}$$

に有界な逆作用素が存在することをいう．ただし，$f_u = f_u(\varphi, \psi)$ は

$$f_u := \nabla_u f = \left(\frac{\partial f_i}{\partial u_j}\right) = \left(-\frac{\partial^2 W}{\partial u_i \partial u_j}\right)$$

で与えられる m 次の対称行列である．同様に，$E[\varphi, v]$ の停留点 $v = \psi$ が非退化であるとは，œl'化作用素

$$\mathcal{B} := D\Delta + g_v \tag{2.2}$$

Ω 上で定義された R^ℓ に値をもつ実数値ベクトル関数で、1 階導関数までが 2 乗可積分であるもの，すなわち，$\sum_{j=1}^{\ell}(\int_\Omega u_j(x)^2 dx + \int_\Omega u_j'(x)^2 dx) < \infty$ をみたす関数 $u(x) = (u_1(x), ..., u_\ell(x))$ の集まりを $H^1(\Omega; \mathrm{R}^\ell)$ と表す．

に有界な逆作用素が存在することをいう．ただし，$g_v = g_v(\varphi, \psi)$ は

$$g_v := \nabla_v g = \left(\frac{\partial g_i}{\partial v_j}\right) = \left(+\frac{\partial^2 W}{\partial v_i \partial v_j}\right)$$

で与えられる m 次の対称行列である．最後に，$E[u, v]$ の停留点 $(u, v) = (\varphi, \psi)$ が非退化であるとは，$u = \varphi$ と $v = \psi$ がそれぞれ $E[u, \psi]$ と $E[\varphi, v]$ の非退化な停留点であることをいう．

さて，$\mathcal{A}$ を (2.1) で定義された作用素とし，固有値問題

$$\begin{cases} \lambda SU = \mathcal{A}U & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial}{\partial \nu} U = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.3}$$

の基本的な性質について考えよう．

補題 2.1 (2.3) のすべての 固有値は実数である．さらに，有限の多重度を持つ最大固有値 λ^u が存在し，

$$\lambda^u = \sup_{U \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^m)} \frac{\displaystyle\int_\Omega \{-\langle C\nabla U, \nabla U \rangle + f_u U \cdot U\}\, dx}{\displaystyle\int_\Omega SU \cdot U dx}$$

によって特徴付けられる．またこの上限は λ^u に対応する (2.3) の固有関数によって達成される．

証明 f_u が対称行列であることから，標準的な議論によって $\mathcal{A}$ は自己随伴であり従って (2.3) のすべての固有値は実数であることがわかる．さらに，自己随伴固有値問題に対する変分原理により，有限の多重度を持つ最大固有値が存在して上のように特徴付けられる． □

この補題より，最大固有値 λ^u の値は S に依存するが，その符号は S と無関係であることが分かる．$\lambda^u < 0$ のとき $u = \varphi$ は (1.7) の定常解として線形安定であるといい，$\lambda^u > 0$ のとき線形不安定であるという．

補題 2.2 (φ, ψ) を (1.9) の解とすると以下が成り立つ．

(i) $u = \varphi$ が (1.7) の線形安定な定常解となるのは，それが $E[u, \psi]$ の非退化な local minimizer となるとき，またそのときに限る．

(ii) もし $u = \varphi$ が線形不安定であれば，それは $E[u, \psi]$ の local minimizer とはならない．

証明 $U \in H^1(\Omega; \mathrm{R}^m)$ を固定し，$\varepsilon > 0$ を微小なパラメータとする．φ は $E[u,\psi]$ の停留点であるから，

$$
\begin{aligned}
&E[\varphi+\varepsilon U,\psi]-E[\varphi,\psi]\\
&\quad=\int_\Omega\Big\{\frac{1}{2}\,\langle\, C\nabla(\varphi+\varepsilon U),\nabla(\varphi+\varepsilon U)\,\rangle\;-\frac{1}{2}\,\langle\, C\nabla\varphi,\nabla\varphi\,\rangle\\
&\qquad\qquad\qquad+W(\varphi+\varepsilon U,\psi)-W(\varphi,\psi)\Big\}dx\\
&\quad=\varepsilon^2\int_\Omega\Big\{\,\langle\, C\nabla U,\nabla U\,\rangle\;-f_uU\cdot U\Big\}dx+O(\varepsilon^3)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．もし φ が local minimizer であれば，すべての $U \in H^1(\Omega; \mathrm{R}^m)$ に対して

$$\int_\Omega\Big\{\,\langle\, C\nabla U,\nabla U\,\rangle\;-f_uU\cdot U\Big\}dx\geq 0$$

が成り立つ．補題 2.1 より，これは $\lambda^u \leq 0$ であることを意味する．さらに，もし φ が非退化であれば $\lambda^u \neq 0$ となる．従ってもし $u=\varphi$ が $E[u,\psi]$ の非退化な local minimizer であれば，$\lambda^u < 0$ となる．逆に，もし $\lambda^u < 0$ であれば，すべての $U \in H^1(\Omega; \mathrm{R}^m)$ $(U \not\equiv 0)$ に対して

$$\int_\Omega\{\,\langle\, C\nabla U,\nabla U\,\rangle\;-f_uU\cdot U\}\,dx> 0$$

となるから，$u=\varphi$ は非退化な local minimizer である．よって (i) が示された．

次に $\lambda^u > 0$ と仮定しよう．すると補題 2.1 より，ある $U \in H^1(\Omega; \mathrm{R}^m)$ $(U \not\equiv 0)$ に対して

$$\int_\Omega\Big\{\,\langle\, C\nabla U,\nabla U\,\rangle\;-f_uU\cdot U\Big\}dx< 0$$

となる．すると $\varepsilon > 0$ が十分小さければ

$$E[\varphi+\varepsilon U,\psi]-E[\varphi,\psi]<0$$

となる．よって $u=\varphi$ は local minimizer ではなく (ii) が示された． □

次に，$\mathcal{B}$ を (2.2) で定義された作用素とし，固有値問題

$$
\begin{cases}
\lambda TV=\mathcal{B}V & \text{in }\Omega\\
\dfrac{\partial}{\partial\nu}V=0 & \text{on }\partial\Omega
\end{cases}
\tag{2.4}
$$

について考えよう．以下の補題は固有値問題 (2.3) に対する補題と同様にして示される．

補題 2.3 (2.4) のすべての 固有値は実数である．さらに，有限の多重度を持つ最大固有値 λ^v が存在し，

$$\lambda^v=\sup_{V\in H^1(\Omega;\mathrm{R}^n)}\frac{\displaystyle\int_\Omega\Big\{-\,\langle\, D\nabla V,\nabla V\,\rangle\;+g_vV\cdot V\Big\}dx}{\displaystyle\int_\Omega TV\cdot V\,dx}$$

によって特徴付けられる．またこの上限は λ^v に対応する (2.4) の固有関数によって達成される．

これより，最大固有値 λ^v の値は T に依存するが，その符号は T と無関係である．$\lambda^v < 0$ のとき，$v = \psi$ は (1.8) の定常解として線形安定であるといい，$\lambda^v > 0$ のとき線形不安定であるという．

補題 2.4 (φ, ψ) を (1.9) の解とすると以下が成り立つ．

(i) $v = \psi$ が (1.8) の線形安定な定常解となるのはそれが $E[\varphi, v]$ の非退化な local maximizer となるとき，またそのときに限る．

(ii) もし $v = \psi$ が線形不安定であれば，それは $E[\varphi, v]$ の local maximizer とはならない．

以上の補題より，(φ, ψ) が $E[u, v]$ の非退化な mini-maximizer となるのは，$u = \varphi$ と $v = \psi$ が線形安定となるとき，またそのときに限ることが分かる．

3 定常状態の安定性

(φ, ψ) を (1.9) の解とする．(1.1) の定常解としての $(u, v) = (\varphi, \psi)$ の安定性を調べるために，固有値問題 (1.10) を

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda SU = \mathcal{A}U + f_v V \\ \lambda TV = \mathcal{B}V + g_u U \end{array} \right. \tag{3.1}$$

と書き直す．ただし $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ は (2.1) と (2.2) で定義される微分作用素とし，$f_v = f_v(\varphi, \psi)$, $g_u = g_u(\varphi, \psi)$ である．(3.1) の固有値 λ および固有関数 (U, V) は一般に複素数値であることに注意しよう．

まず，(φ, ψ) が $E[u, v]$ の非退化な mini-maximizer の場合について考えよう．

定理 3.1 $(u, v) = (\varphi, \psi)$ が $E[u, v]$ の非退化な mini-maximizer であるとする．このとき，任意の S と T に対し，$(u, v) = (\varphi, \psi)$ は (1.1) の定常解として線形安定である．

証明 まず，

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda SU = \mathcal{A}U + f_v V \\ \overline{\lambda} T\overline{V} = \mathcal{B}\overline{V} + g_u \overline{U} \end{array} \right.$$

と $f_v = -g_u^t$ より

$$\lambda \int_\Omega SU \cdot \overline{U}\, dx + \overline{\lambda} \int_\Omega T\overline{V} \cdot V\, dx = \int_\Omega \mathcal{A}U \cdot \overline{U}\, dx + \int_\Omega \mathcal{B}\overline{V} \cdot V\, dx \tag{3.2}$$

となる．S と T は正定値対称行列であったから，積分

$$\int_\Omega SU\cdot\overline{U}\,dx,\qquad \int_\Omega T\overline{V}\cdot V\,dx$$

の値は正である．一方，部分積分を用いると

$$\int_\Omega \mathcal{A}U\cdot\overline{U}\,dx=\int_{\partial\Omega} C\frac{\partial}{\partial\nu}U\cdot\overline{U}\,dx+\int_\Omega\left\{-\langle C\nabla U,\nabla\overline{U}\rangle+f_uU\cdot\overline{U}\right\}dx \tag{3.3}$$

が得られる．右辺の第 1 項は境界条件より消える．第 2 項は補題 2.1 より

$$\int_\Omega\left\{-\langle C\nabla U,\nabla\overline{U}\rangle+f_uU\cdot\overline{U}\right\}dx\le\lambda^u\int_\Omega SU\cdot\overline{U}\,dx$$

となる[4]．従って

$$\int_\Omega \mathcal{A}U\cdot\overline{U}\,dx\le\lambda^u\int_\Omega SU\cdot\overline{U}\,dx$$

を得る．同様に

$$\int_\Omega \mathcal{B}\overline{V}\cdot V\,dx\le\lambda^v\int_\Omega T\overline{V}\cdot V\,dx$$

である．補題 2.2, 2.4 より $\lambda^u<0,\lambda^v<0$ であるから，ある $\delta'>0$ が存在して

$$\int_\Omega \mathcal{A}U\cdot\overline{U}\,dx+\int_\Omega \mathcal{B}\overline{V}\cdot V\,dx<-\delta'\left\{\int_\Omega SU\cdot\overline{U}\,dx+\int_\Omega T\overline{V}\cdot V\,dx\right\}$$

が成り立つ．すると (3.2) より，ある $\delta>0$ に対してすべての固有値は $\Re\{\lambda\}<-\delta<0$ を満たすことが分かる．よって $(u,v)=(\varphi,\psi)$ は線形安定な定常解である． □

次に，$u=\varphi$ は線形不安定（従って φ は $E[u,\psi]$ の minimizerでない）場合について考える．$v=\psi$ が線形不安定の場合も同様にして扱えるので，この場合については省略する．

定理 3.2 (φ,ψ) を (1.9) の解とし，$u=\varphi$ は (1.7) の定常解として線形不安定であると仮定する．このとき，各 S に対し $\|T^{-1}\|$ が十分小さければ，$(u,v)=(\varphi,\psi)$ は (1.1) の線形不安定な定常解となる．

証明 $\delta>0$ を十分小さく取って固定し，Λ_δ を

$$\Lambda_\delta:=\{\lambda\in\mathbf{C}\,;\,|\lambda-\lambda^u|<\delta\}$$

と定義する．仮定より $\lambda^u>0$ であるから，すべての $\lambda\in\Lambda_\delta$ に対して $\Re\{\lambda\}>0$ としてよい．このときもし $\|T^{-1}\|$ が十分小さければ $\lambda\in\Lambda_\delta$ に対して作用素 $\lambda T-\mathcal{B}$ に有界な逆作用素が存在する．このとき，(3.1) の第 2 式は

$$V=(\lambda T-\mathcal{B})^{-1}g_uU$$

[4] U を実部と虚部に分けて補題 2.1 を適用する．

と書き直されるから，(3.1) の第 1 式に代入して

$$\lambda SU = \{\mathcal{A} + \mathcal{A}_1(\lambda, T)\}\, U \tag{3.4}$$

ただし

$$\mathcal{A}_1 := f_v(\lambda T - \mathcal{B})^{-1} g_u = T^{-1} f_v\,(\lambda I - \mathcal{B}T^{-1})^{-1} g_u$$

となる．

λ^u の多重度は有限であり，また $\mathcal{A}_1$ は $\lambda \in \Lambda_\delta$ に滑らかに依存するから，線形作用素の摂動に関する一般論 [4] より，固有値問題

$$\mu SU = \{\mathcal{A} + \mathcal{A}_1(\lambda, T)\}\, U$$

は $\lambda \in \Lambda_\delta$ と T に連続に依存する固有値 $\mu = \mu(\lambda, T)$ を持つ．さらに，$\|T^{-1}\| \to 0$ のとき $\|\mathcal{A}_1\| \to 0$ であるから $\|T^{-1}\| \to 0$ のとき Λ_δ で一様に $\mu(\lambda, T) \to \lambda^u$ となる．

以上より，もし $\|T^{-1}\|$ が小さければ Λ_δ からそれ自身への写像 $\lambda \mapsto \mu(\lambda, T)$ が定義され，またこの写像は λ について連続である．従って Brouwer の不動点定理よりこの写像は Λ_δ 内に不動点を持つから，ある $\lambda = \hat{\lambda}(T) \in \Lambda_\delta$ に対して $\mu(\lambda, T) = \lambda$ が成り立つ．明らかに $\lambda = \hat{\lambda}(T)$ は (3.4) の固有値であり，また $\Re\{\hat{\lambda}(T)\} > 0$ であるから $(u, v) = (\varphi, \psi)$ は線形不安定である． □

注 3.1 定理 3.1 および 3.2 へ $W = W(u, v, x)$ が空間変数 x に陽に依存する場合や，ノイマン境界条件の代わりにディリクレ境界条件

$$u = \xi(x), \quad v = \eta(x), \quad x \in \partial\Omega,$$

（ただし $\xi(x), \eta(x)$ は与えられた境界値）に対しても上と同じ方法を用いて拡張できる．

注 3.2 たとえ $u = \varphi$ と $v = \psi$ が両方とも線形不安定であったとしても，$(u, v) = (\varphi, \psi)$ は (1.1) の線形安定な定常解となる場合がある．以下で簡単な例をあげよう．

(2+1)-成分線形系

$$\begin{cases} u_{1,t} = \Delta u_1 + u_1 + 2v \\ u_{2,t} = \Delta u_2 - 5u_2 + 4v \\ v_t = \Delta v - 2u_1 - 4u_2 + v \end{cases} \tag{3.5}$$

を考える．この系は

$$W(u_1, u_2, v) = -\frac{1}{2}u_1^2 + \frac{5}{2}u_2^2 + \frac{1}{2}v^2 - v(2u_1 + 4u_2)$$

および

$$E[u_1, u_2, v] := \int_\Omega \left\{ \frac{1}{2} |\nabla u_1|^2 + \frac{1}{2} |\nabla u_2|^2 - \frac{1}{2} |\nabla v|^2 + W(u_1, u_2, v) \right\} dx$$

に関する歪勾配系であることに注意しよう．

容易に分かるように $(u_1, u_2) = (0, 0)$ は

$$\begin{cases} u_{1,t} &= \Delta u_1 &+ u_1 \\ u_{2,t} &= \Delta u_2 &-5u_2 \end{cases}$$

の線形不安定 $(\lambda^u = 1)$ な定常解であり，従って $(u_1, u_2) = (0, 0)$ は

$$E[u_1, u_2, 0] := \int_\Omega \left\{ \frac{1}{2} |\nabla u_1|^2 + \frac{1}{2} |\nabla u_2|^2 - \frac{1}{2} u_1^2 + \frac{5}{2} u_2^2 \right\} dx$$

の minimizer とはならない．また $v = 0$ は

$$v_t = \Delta v + v$$

の線形不安定 $(\lambda^v = 1)$ な定常解であり，従って $v = 0$ は

$$E[0, 0, v] := \int_\Omega \left\{ -\frac{1}{2} |\nabla v|^2 + \frac{1}{2} v^2 \right\} dx$$

の maximizer ではない．

一方，(3.5) の係数行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 4 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

の固有値は -1, $-1 \pm \sqrt{2}i$ と計算できる．(3.5) は等しい拡散係数を持つ系であるから，固有値問題

$$\text{(3.6)} \qquad \begin{cases} \lambda U_1 &= \Delta U_1 &+ U_1 & &+2V \\ \lambda U_2 &= \Delta U_2 & &-5U_2 &+4V \\ \lambda V &= \Delta V &-2U_1 &-4U_2 &+ V \end{cases}$$

のすべての固有値は

$$-1 + \mu_k, \quad -1 \pm \sqrt{2}i + \mu_k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

と表すことができる．ただし μ_k は 領域 Ω 上のノイマン型固有値問題 $\Delta U = \mu U$ に対する k 番目の固有値であり，すべての k に対して $\mu_k \leq 0$ である．よって (3.6) のすべての固有値は負の実部を持つから，$(u_1, u_2, v) = (0, 0, 0)$ は (3.5) の線形安定な定常状態であることが示された．

4　拡散不安定性

$(u, v) = (p, q) \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$ を $m+n$ 次元力学系

$$(4.1) \qquad \begin{cases} Su_t(t) = f(u, v) \\ Tv_t(t) = g(u, v) \end{cases}$$

の平衡点とする．すると明らかに $(u, v) = (p, q)$ は反応拡散系 (1.1) の空間的に一様な定常解である．平衡点 $(u, v) = (p, q)$ に対し，固有値問題

$$\begin{cases} \lambda S\xi = f_u\xi + f_v\eta, \\ \lambda T\eta = g_u\xi + g_v\eta, \end{cases}$$

を考える．ただし，$\xi \in \mathbf{R}^m$, $\eta \in \mathbf{R}^n$ であり，また f_u, f_v, g_u, g_v は $(u, v) = (p, q)$ での微分を表す．この固有値問題のすべての固有値が負の実部を持つとき，平衡点 $(u, v) = (p, q)$ は線形安定であるという．

もし，f_u と g_v が負定値行列となるとき，平衡点 $(u, v) = (p, q)$ は $W(u, v)$ の非退化な mini-maximizer であるという．他の定義は第 2 節と同様である．

たとえ $(u, v) = (p, q)$ が (4.1) の非退化な mini-maximizer であっても，それは反応拡散系 (1.1) の空間的に一様な解として安定であるかどうかは自明ではない．この場合，不安定性は拡散によって生じたものであり，これを拡散誘導不安定性（あるいは Turing [14] の不安定性）という．

次の結果は $(u, v) = (p, q)$ が $W(u, v)$ の非退化な mini-maximizer であれば，拡散誘導不安定性は絶対に生じないことを示している．

定理 4.1　もし $(u, v) = (p, q)$ が $W(u, v)$ の非退化な mini-maximizer であれば，$(u, v) = (p, q)$ は (1.1) の定常解としてすべての S, T, C, D に対して線形安定である．

証明　行列 f_u は負定値であるから，補題 2.1 より (2.3) の最大固有値はすべての C に対して $\lambda^u < 0$ となる．同様に，(2.4) の最大固有値はすべての D に対して $\lambda^v < 0$ となる．従って，もし $(u, v) = (p, q)$ が $W(u, v)$ の非退化な mini-maximizerであれば，それはまたすべての C と D に対して $E[u, v]$ の非退化な mini-maximizer となる．すると定理 3.1 より，$(u, v) = (p, q)$ はすべての S と T に関して (1.1) の定常解として線形安定であることがわかる．　□

次の結果は，もし $(u, v) = (p, q)$ が $W(u, v)$ の mini-maximizer でないとすると，ある C と D に対して拡散誘導不安定性が生じることを表している．

定理 4.2 S と T を任意に固定し，また $f_u(p,q)$ が正の固有値を持つと仮定する．このとき，もし $\|C\|$ と $\|D^{-1}\|$ が十分小さければ，$(u,v)=(p,q)$ は (1.1) の定常解として線形不安定である[5]．

証明 Δ に対する領域 Ω 上のノイマン型固有値問題の負の固有値に対する固有関数を $\theta(x)$ とする．すなわち，ある $\mu>0$ に対して

$$\begin{cases} -\mu\theta=\Delta\theta & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial}{\partial\nu}\theta=0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

が成り立つとする．ここで

$$U=\alpha\theta(x), \quad V=\beta\theta(x)$$

とおくと，(1.10) は

$$\begin{cases} \lambda S\alpha=(-\mu C+f_u)\alpha+f_v\beta \\ \lambda T\beta=g_u\alpha+(-\mu D+g_v)\beta \end{cases} \tag{4.2}$$

と表される．

$\lambda_0>0$ を

$$\lambda S\xi=f_u\xi, \quad \xi\in\mathbf{R}^m$$

の正の固有値とし，また

$$\Lambda_\delta:=\{\lambda\in\mathbf{C}\ ;\ |\lambda-\lambda_0|<\delta\}$$

とおく．ここで $\delta>0$ を十分小さくとり，$\Re\{\lambda\}>0$ がすべての $\lambda\in\Lambda_\delta$ に対して成り立つようにしておく．もし $\|D^{-1}\|$ が十分小さければ，作用素 $\lambda T+\mu D-g_v$ は任意の $\lambda\in\Lambda_\delta$ に対して有界な逆作用素を持つ．すると (4.2) の第 2 式は

$$\beta=(\lambda T+\mu D-g_v)^{-1}g_u\alpha$$

と表される．これを (4.2) の第 1 式に代入すると，

$$\lambda S\alpha=\left\{-\mu C+f_u+f_v(\lambda T+\mu D-g_v)^{-1}g_u\right\}\alpha$$

が得られる．従って，もし $\|C\|$, $\|D^{-1}\|$ が十分小さければ，定理 3.2 の証明と同様にして，(4.2) の固有値 $\lambda=\hat\lambda(C,D)$ が Λ_δ の中に存在する．$\Re\{\hat\lambda(C,D)\}>0$ であったから，$(u,v)=(p,q)$ は (1.1) の定常解として線形不安定である．□

[5] $g_v(p,q)$ が正の固有値を持つ場合も同様の主張が成り立つ

5 凸領域

勾配構造を持つ反応拡散系に対し，Jimbo-Morita [3], Lopes [7] は，もし領域が凸であれば空間的に非一様な定常解は線形不安定であることを示した．言い換えれば，勾配系の minimizer は空間的に一様なものに限るということである．

ここでは，これと同様の結果が歪勾配構造を持つ反応拡散系の mini-maximizer に対しても成り立つことを示そう．

定理 5.1 Ω を十分滑らかな境界 (C^3) を持つ凸領域とする．(φ, ψ) を (1.9) の空間的に非一様な解とすると，$\lambda^u > 0$ あるいは $\lambda^v > 0$ が成り立つ．

証明 Jimbo-Morita [3] の方針に従う．$U \in H^1(\Omega; \mathrm{R}^m)$, $V \in H^1(\Omega; \mathrm{R}^n)$ に対し，

$$J^u[U] = \int_\Omega \Big\{ - \langle C\nabla U, \nabla U \rangle + f_u U \cdot U \Big\} dx,$$
$$J^v[V] = \int_\Omega \Big\{ - \langle D\nabla V, \nabla V \rangle + g_v V \cdot V \Big\} dx$$

と定義する．すると

$$\begin{aligned} J^u[\varphi_{x_j}] &= \int_\Omega \Big\{ - \langle C\nabla\varphi_{x_j}, \nabla\varphi_{x_j} \rangle + f_u\varphi_{x_j} \cdot \varphi_{x_j} \Big\} dx \\ &= -\int_{\partial\Omega} C\varphi_{x_j} \cdot \frac{\partial}{\partial\nu}\varphi_{x_j} dx + \int_\Omega \Big(C\Delta\varphi_{x_j} + f_u\varphi_{x_j} \Big) \cdot \varphi_{x_j}\, dx, \\ J^v[\psi_{x_j}] &= \int_\Omega \Big\{ - \langle D\nabla\psi_{x_j}, \nabla\psi_{x_j} \rangle + g_v\psi_{x_j} \cdot \psi_{x_j} \Big\} dx \\ &= -\int_{\partial\Omega} D\psi_{x_j} \cdot \frac{\partial}{\partial\nu}\psi_{x_j} dx + \int_\Omega \Big(D\Delta\psi_{x_j} + g_v\psi_{x_j} \Big) \cdot \psi_{x_j}\, dx \end{aligned}$$

が成り立つ．(1.9) を x_j で微分すれば，

$$\begin{cases} C\Delta\varphi_{x_j} + f_u\varphi_{x_j} + f_v\psi_{x_j} = 0 \\ D\Delta\psi_{x_j} + g_u\varphi_{x_j} + g_v\psi_{x_j} = 0 \end{cases}$$

となる．従って $f_v = -g_u^t$ より

$$\Big(C\Delta\varphi_{x_j} + f_u\varphi_{x_j} \Big) \cdot \varphi_{x_j} + \Big(D\Delta\psi_{x_j} + g_v\psi_{x_j} \Big) \cdot \psi_{x_j} = -f_v\psi_{x_j} \cdot \varphi_{x_j} - g_u\varphi_{x_j} \cdot \psi_{x_j} = 0$$

を得る．よって

$$J^u[\varphi_{x_j}] + J^v[\psi_{x_j}] = -\int_{\partial\Omega} \Big\{ C\varphi_{x_j} \cdot \frac{\partial}{\partial\nu}\varphi_{x_j} + D\psi_{x_j} \cdot \frac{\partial}{\partial\nu}\psi_{x_j} \Big\} dx$$

となるから，j について総和をとると

$$\sum_{j=1}^{N} \Big\{ J^u[\varphi_{x_j}] + J^v[\psi_{x_j}] \Big\} = -\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial\nu} \Big\{ \langle C\nabla\varphi, \nabla\varphi \rangle + \langle D\nabla\psi, \nabla\psi \rangle \Big\} dx \tag{5.1}$$

となる．ここで Ω の凸性とノイマン境界条件から

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\langle\, C\nabla\varphi, \nabla\varphi\,\rangle \le 0, \qquad \frac{\partial}{\partial\nu}\langle\, D\nabla\psi\cdot\nabla\psi\,\rangle \le 0$$

が成り立つ（より精密な議論は [8] を参照のこと）．

ここで $\lambda^u \le 0$ および $\lambda^v \le 0$ と仮定すると，補題 2.1 と補題 2.3 より，$J^u[\varphi_{x_j}] \le 0$ と $J^v[\psi_{x_j}] \le 0$ がすべての j について成り立つ．(5.1) の右辺は非負であったから，$J^u[\varphi_{x_j}] = 0$ と $J^v[\psi_{x_j}] = 0$ がすべての j について成り立つことになる．

ある j について $\varphi_{x_j} \not\equiv 0$ と仮定しよう．補題 2.1 より，$U = \varphi_{x_j}$ は (2.3) の $\lambda^u = 0$ に対する固有関数だから，φ_{x_j} は $\partial\Omega$ 上のある点において

$$\varphi_{x_j} = \frac{\partial}{\partial\nu}\varphi_{x_j} = 0$$

が成り立つ．よって Calderón の一意延長定理（例えば [9] を参照）より，$\varphi_{x_j} \equiv 0$ となって矛盾である．

同様に，ある j に対して $\psi_{x_j} \not\equiv 0$ と仮定すると矛盾を生じる．よって $\lambda^u > 0$ あるいは $\lambda^v > 0$ が満たされていなければならない． □

注 5.1 定理 5.1 において Ω の凸性は本質的である．非凸な領域では空間的に非一様な mini-maximizer が存在することがある．

定理 5.1 からただちに次の結果が導かれる．

系 5.1 Ω を十分滑らか（C^3）な境界を持つ凸領域とする．(φ, ψ) が (1.9) の空間的に非一様な解であるとすると，ある S と T に対して，$(u, v) = (\varphi, \psi)$ は (1.1) の定常解として線形不安定である．

証明 定理 5.1 より，$\lambda^u > 0$ あるいは $\lambda^v > 0$ が成り立つ．すると定理 3.2 より，$(u, v) = (\varphi, \psi)$ はある S と T に対して (1.1) の定常解として線形不安定となる． □

注 5.2 もちろん，歪勾配構造のあるなしに関わらず，凸領域上の反応拡散系において空間的に非一様な定常解が安定になる例は数多く知られている（たとえば [10, 11, 13] などを参照のこと）．

6 あとがき

本稿では主に mini-maximizing property と定常解の安定性の関わりについて解説した．歪勾配構造を用いた定式化による一般的な議論は，1次元区間上の定常パルス解の安定性 (Yanagida [15]) や空間周期解の安定性 (Kuwamura-Yanagida [6])，shadow system と呼ばれる nonlocal な方程式の有界領域上における定常解の安定性 (Yanagida [17]) など，いくつかの成功例がある．これらはいずれも歪勾配構造が導く数理構造を利用したものであるが，それぞれ異なる技巧に基づく解析である．これらの問題の間の相互の関係や，他の問題への歪勾配構造の導入による一般的解析は今後の課題である．

歪勾配構造は反応拡散系などの非線形系のダイナミクスを数学的に調べる上で，一つの大きな新しい枠組みを与える試みであり，その研究は今後一層発展することが期待される．

参考文献

[1] R. G. Casten and C. J. Holland, Instability results for reaction diffusion equations with Neumann boundary conditions, J. Differential Equations **27** (1978), 266–273.

[2] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, 2nd ed., Springer, New York, 1983.

[3] S. Jimbo and Y. Morita, Stability of nonconstant steady-state solutions to a Ginzburg-Landau equation in higher space dimensions, Nonlinear Analysis **22** (1984), 753–770.

[4] T. Kato, Perturbation Theory of Linear Operators, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1980.

[5] H. Kielhöfer, Stability and semilinear evolution equations in Hilbert space, Arch. Rational Mech. Anal. **57** (1974), 150–165.

[6] M. Kuwamura and E. Yanagida, Instability Criteria for a Family of Spatially Periodic Equilibria in Gradient/Skew-Gradient Systems, preprint.

[7] O. Lopes, Radial and nonradial minimizers for some radially symmetric functionals, Elec. J. Differential Equations **1996** (1996), 1–14.

[8] H. Matano, Asymptotic behaviour and stability of solutions of semilinear elliptic equations, Publ. RIMS. Kyoto Univ. **15** (1979), 401–454.

[9] K. Mizohata, The Theory of Partial Differential Equations, Cambridge University Press, Cambridge, 1973.

[10] W.-M. Ni, I. Takagi and E Yanagida, Stability analysis of point-condensation solutions to a reaction-diffusion system proposed by Gierer and Meinhardt, preprint.

[11] Y. Nishiura, Coexistence of infinitely many stable solutions to reaction diffusion systems in the singular limit, *Dynamics Reported* **3** (1994), 25–103.

[12] H.L. Smith, Monotone Dynamical Syetems, An introduction to the theory of competitive and cooperative systems, *AMS Mathematical Surveys and Monographs* **41**(1995)

[13] M. Taniguchi and Y. Nishiura, Stability and characteristic wavelength of planar interfaces in the large diffusion limit of the inhibitor, Proc. Roy. Soc. Edinburgh **126A** (1996), 117-145

[14] A. M. Turing, The chemical basis of morphogenesis, Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. B **237** (1952), 37–72.

[15] E. Yanagida, Standing pulse solutions in reaction-diffusion systems with skew-gradient structure, J. Dyn. Diff. Eqs. **4** (2002), 189–205.

[16] E. Yanagida, Mini-maximizers for reaction-diffusion systems with skew-gradient structure, J. Differential Equations **179** (2002), 311-335.

[17] E. Yanagida, Stability analysis for shadow systems with skew-gradient strucrure, work in progress.