

# RPA を用いたボーズ・フェルミ混合縮退系の集団励起状態への 取り組み

東京都立大学大学院理学研究科 十河 孝明

近年、アルカリ原子気体のボーズ・アインシュタイン凝縮とフェルミ縮退の共存した系が実現した。これは違う統計性に従う粒子の共存した系の典型的な例の一つで非常に興味深い系である。そこで我々はこのボーズ・フェルミ混合縮退系の動的性質、特に集団励起状態について RPA を用いて考察した。

## 1 Formulation

系としては温度ゼロのもとで球対称調和振動しポテンシャル中のスピン偏極したボーズ・フェルミ混合系を考える、ここでは同じ質量をもち、また同じ trap frequency のポテンシャルの閉じ込められているとする。

$$H = \sum_i^{N_f} \left[ -\frac{1}{2m} \nabla_{f_i}^2 + \frac{1}{2} m \omega_{HO}^2 r_{f_i}^2 \right] + \sum_i^{N_b} \left[ -\frac{1}{2m} \nabla_{b_i}^2 + \frac{1}{2} m \omega_{HO}^2 r_{b_i}^2 \right] \\ + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^{N_b} g \delta(\vec{r}_{b_i} - \vec{r}_{b_j}) + \sum_i^{N_f} \sum_j^{N_b} h \delta(\vec{r}_{f_i} - \vec{r}_{b_j})$$

ここで  $m$  は boson および fermion の質量、 $\omega_0$  は trap frequency,  $g, h$  は bose-bose, bose-fermi 相互作用の coupling constant で、それぞれ  $s$  波散乱長を使って  $g = 4\pi a_{bb} \hbar^2/m$ ,  $h = 4\pi a_{bf} \hbar^2/m$  とかける。

平均場近似のもとで基底状態および一粒子波動関数を導出する。boson は 1 つの状態波動関数  $\phi_0$  の  $N_b$  個の積で、fermion は Thomas-Fermi 近似をつかって基底状態を求める。

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 r^2 + g N_b |\phi_0(\vec{r})|^2 + h \rho_f(\vec{r}) \right] \phi_0(\vec{r}) = \mu_b \phi_0(\vec{r}) \\ \frac{1}{2m} (6\pi^2 \rho_f(\vec{r}))^{2/3} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 r^2 + h N_b |\phi_0(\vec{r})|^2 = \epsilon_F$$

ここで、 $\mu_b$  は chemical potential,  $\epsilon_F$  は fermi energy. そして一粒子波動関数はこの基底状態を平均場として導出する。fermion, boson の一粒子波動関数  $\psi_\alpha, \phi_k$  は

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 r^2 + g N_b |\phi_0(\vec{r})|^2 + h \rho_f(\vec{r}) \right] \phi_k(\vec{r}) = \epsilon_k^b \phi_k(\vec{r}) \\ \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 r^2 + g N_b |\phi_0(\vec{r})|^2 \right] \psi_\alpha(\vec{r}) = \epsilon_\alpha^f \psi_\alpha(\vec{r})$$

となる。平均場が球対称を考えているので  $\alpha, k$  は動径、および角運動量子数  $(n, l, m)$  を含む。

次に角運動量子数  $L, M$  をもつ励起状態  $|\nu LM\rangle$  の生成・消滅演算子を定義する。状態  $\alpha$  の fermion の生成・消滅演算子を  $a_\alpha^\dagger, a_\alpha$ , 状態  $k$  の boson の生成・消滅演算子を  $b_k^\dagger, b_k$  とすると、

$$Q_{\nu LM}^\dagger = F_{\nu LM}^\dagger + B_{\nu LM}^\dagger,$$

$$F_{\nu LM}^\dagger = \sum_{ph} \sum_{m_p, m_h} \left[ X_{phL}^\nu \langle l_p m_p l_h - m_h | LM \rangle (-1)^{l_h - m_h} a_{p l_p m_p}^\dagger a_{h l_h m_h} \right. \\ \left. - Y_{phL}^\nu \langle l_h m_h l_p - m_p | LM \rangle (-1)^{l_p - m_p} a_{h l_h m_h}^\dagger a_{p l_p m_p} \right], \\ B_{\nu LM}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{N_b}} \sum_{k \neq 0} \left[ U_{kL}^\nu b_{kLM}^\dagger b_0 - V_{kL}^\nu (-1)^{L+M} b_0^\dagger b_{kL-M} \right]$$

RPA では演算子  $Q$  が運動方程式

$$[H, Q_{\nu LM}^\dagger] \simeq \Omega_\nu Q_{\nu LM}^\dagger$$

を満足するように  $X, Y, U, V$  を決定する. 代入すると固有値方程式となる.

$$\begin{pmatrix} A_{XX} & A_{XU} & B_{XY} & B_{XV} \\ A_{UX} & A_{UU} & B_{UY} & B_{UV} \\ -B_{XY} & -B_{XV} & -A_{XX} & -A_{XU} \\ -B_{UY} & -B_{UV} & -A_{UX} & -A_{UU} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ U \\ Y \\ V \end{pmatrix} = \Omega_\nu \begin{pmatrix} X \\ U \\ Y \\ V \end{pmatrix},$$

$A, B$  の具体的な式は省略.

集団励起を起こす外場として次の多重極演算子を与える.

$$F_L^{f,b}(\vec{r}) = \sum_i \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} r_{f,b}^2 & (L=0) \\ r_{f,b}^L Y_{L0}(\theta) & (L \neq 0). \end{cases}$$

$f, b$  はそれぞれ fermion, boson にあたる外場に対応し, また  $F_L^\pm = F_L^f \pm F_L^b$  とする.  $+, -, f, b$  をそれぞれ 'in-phase', 'out-of-phase', 'fermionic', 'bosonic' と呼ぶことにする. 上の外場を与えたときの励起状態への遷移確率の高いものが存在するかを調べることで集団励起しているか判断できる. 基準として総和則の 1 次のモーメント

$$\sum_\nu |\langle 0 | F_L^\sigma | \nu \rangle|^2 \Omega_\nu = \frac{1}{2} \langle 0 | [F_L^\sigma, [H, F_L^\sigma]] | 0 \rangle$$

に対する割合を調べることにする.

## 2 Calculation

計算する際に使うパラメータは potassium<sup>41</sup>K-<sup>40</sup>K のものを使う. 粒子数は boson, fermion とともに  $\sim 1000$  個. また系の性質をより詳しく考察するため bose-fermi 相互作用  $h$  は変数とし,  $h$  が変化することにより集団励起がどのように変化するか調べる.

### 2.1 Density of ground state

Fig.1 は基底状態の boson と fermion の  $h/g = -3, 1, 5$  での密度分布. boson は基底状態にすべての粒子が詰まるため中心に集中するのに対し, fermion は Fermi Pressure により外側に広がる. bose-fermi 相互作用が引力では fermion と boson の overlap が大きくなっているのに対し, 斥力では boson の外に押し出されているのがわかる.

## 2.2 Distribution of the multipole strength

### 2.2.1 monopole

Fig. 2 は monopole の fermionic および bosonic タイプの強度分布を示している。fermion は  $\Omega \sim 2\omega_0$  にそして boson は  $\sim \sqrt{5}\omega_0$  にスペクトルが分布し、 $h/g$  が変化してもあまり変わらないことがわかる。それは Fig. 1 を見るとわかるとおり、統計性の違いから boson と fermion の分布の overlap は小さく、お互い影響を与えない為変化しないと考えられる。特に fermion に関しては、boson の分布より外側に大きく広がっていて、fermion 間相互作用がなく、boson を介してのみ力を伝えなければいけない。また、相互作用は短距離相互作用なので、fermion の表面には相互作用は伝わらず、集団的に動かない。実際に総和則に対する割合は  $\sim 20\%$  程度しかない。

boson はもともと凝縮しているので、集団的に運動する。しかし bose-fermi 相互作用が強くなると fermion の影響から強度が落ちてくる。

### 2.2.2 dipole

Fig. 3 は dipole の in-phase および out-of-phase タイプの強度分布を示している。in-phase の強いピークは系全体の重心振動に対応する。それはすべての粒子が 1 つの振動子ポテンシャルで閉じ込められているため重心運動は他の系の自由度と decouple するからである。

out-of-phase 振動は in-phase の振動振動と直交するため bose-fermi 相互作用の違いで大きく分布が変わる。monopole と同様に boson と fermion の相関が弱いいため集団運動と呼べるほど大きな強度にはならない。

### 2.2.3 quadrupole

quadrupole 以降の多重極振動は表面振動となるので、それ以上の多重極振動は省略する。Fig. 4 は quadrupole の fermionic および bosonic の振動に対する強度分布である。fermion に関しては表面における相関はほとんどないので bose-fermi 相互作用が変化しても分布に違いがなく、粒子 1 つ 1 つがほぼ独立に運動する。ただ分布の分散が大きくなっているのは、bose-fermi 相互作用により一粒子波動関数のエネルギー縮退が解けるため、1 つ 1 つのスペクトルの強度は弱い。

boson は相互作用が小さいときは集団的に動くが Fig. 4 の  $h/g = 5$  ではスペクトルが分散している。これは Fig. 1 をみると、boson の表面の周りに fermion の分布のピークがある。この状態で boson が表面振動すると fermion の影響を強く受けるため強度分布が分散したと考えられる。

## 3 Conculution

今回は boson と fermion がおなじ trap frequency に閉じ込められた場合で同じぐらいの粒子数での集団励起を調べた。この状況では boson と fermion の相関が弱い、特に fermion の表面付近の相関はほとんどなく、集団運動をしないことが分かった。一方 boson に関しては凝縮体なので基本的には集団運動する、ただ、bose-fermi 相互作用が強くなると、fermion の影響を受け、集団運動しなくなることが分かった。

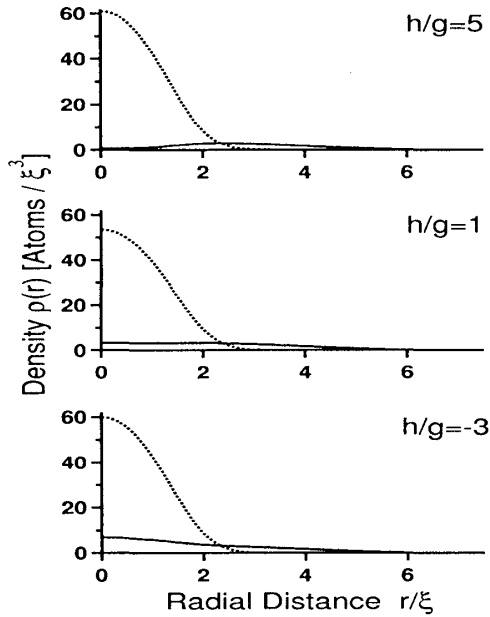


Fig1: boson, fermion の粒子数が共に  $\sim 1000$ , bose-fermi 相互作用が  $h/g = -3, 1, 5$  での基底状態の密度分布. 実線が fermion, 点線が boson を表す.

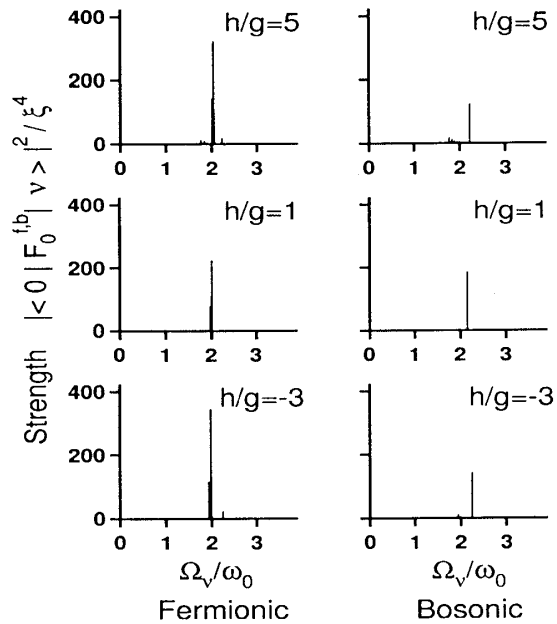


Fig2: monopole 振動の fermionic と bosonic の外場に対する強度分布. bose-fermi 相互作用は  $h/g = -3, 1, 5$  のもの. 強度の単位は  $\xi^4$ .

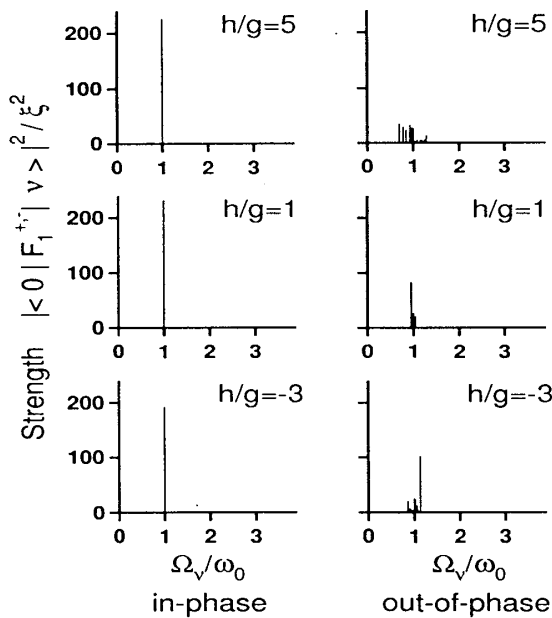


Fig3: dipole 振動の in-phase と out-of-phase の外場に対する強度分布. bose-fermi 相互作用は  $h/g = -3, 1, 5$  のもの. 強度の単位は  $\xi^2$ .

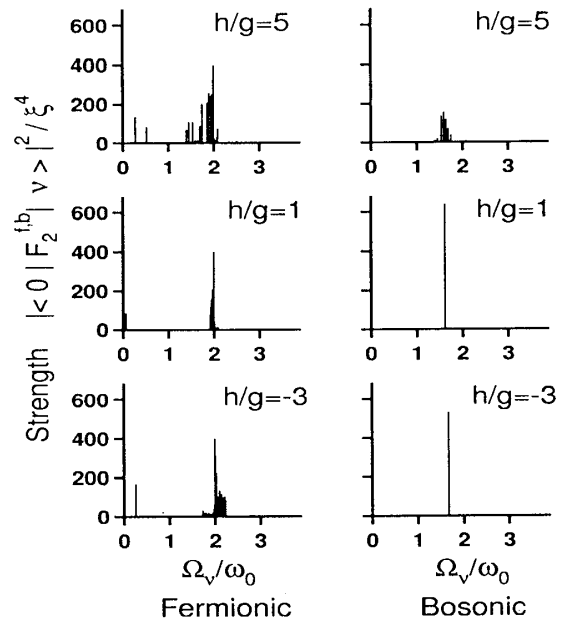


Fig4: quadrupole 振動の fermionic と bosonic の外場に対する強度分布. bose-fermi 相互作用は  $h/g = -3, 1, 5$  のもの. 強度の単位は  $\xi^4$ .