

高スピンにおける原子核の揺動運動

大井 万紀人
福井大学応用物理学科

概要

3軸対称変形をした原子核は、高スピン状態(角運動量～数十 \hbar)において、非一様回転、すなわち回転軸方向が振動するような複雑な回転、揺動運動をすると期待されている。最近の実験でこの揺動運動が観測されたという報告がなされた。最近の動向を中心に、原子核における揺動運動について簡単にまとめてみたい。

1 Bohr=Mottelson の揺動運動模型

揺動運動が3軸変形した原子核の高スピン状態で現れる可能性を最初に指摘したのはA.BohrとB.Mottelsonで、その理論は、1975年に刊行された有名な彼らの教科書の1つで発表された[1]。以下に簡単にそのあらましをなぞってみたい。

仮定するのは量子回転子(Quantum Rotor)で、その微視的な構造は気にしないことにする。対応するハミルトニアンは、

$$H = \sum_{\kappa=1}^3 \frac{I_{\kappa}^2}{2\mathcal{J}_{\kappa}}, \quad (1)$$

である。ここで、 $\kappa=1,2,3$ は内部座標軸の3つの方向を表し、 I_{κ} はその方向の角運動量成分、 \mathcal{J}_{κ} は慣性能率を表すとする。3軸対称性がある場合、慣性能率はそれぞれ異なるが、今

$$\mathcal{J}_1 > \mathcal{J}_2 > \mathcal{J}_3 \quad (2)$$

の関係があるとする。

ここで高スピン状態の仮定をおく。すなわち、

$$I \simeq I_1 \gg 1. \quad (3)$$

(ただし、 $I = \sqrt{\sum_{\kappa=1}^3 I_{\kappa}^2}$.) この条件は、揺動の振動振幅が微小であるという仮定に対応しており、言い替えば、通常の一様回転からの摂動効果として、回転軸の「ぶれ」(すなわち揺動運動)を取り扱うことに相当する。

ここで、 $I_{\pm} \equiv I_2 \pm iI_3$ をハミルトニアン(1)に代入すると、

$$H = \frac{I^2}{2\mathcal{J}_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mathcal{J}_2} - \frac{1}{\mathcal{J}_1} \right) \left(\frac{I_+ + I_-}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mathcal{J}_3} - \frac{1}{\mathcal{J}_1} \right) \left(\frac{I_+ - I_-}{2i} \right)^2. \quad (4)$$

次のような生成消滅演算子(c, c^{\dagger})によって量子化する。

$$c^{\dagger} = \frac{I_+}{\sqrt{2I}} \quad c = \frac{I_-}{\sqrt{2I}}. \quad (5)$$

この演算子はボソンの交換関係を (近似的に) 満たす。

$$[c, c^\dagger] \simeq 1 \quad (\text{for } I \gg 1). \quad (6)$$

この演算子により、ハミルトニアンは、

$$H = \frac{I^2}{2\mathcal{J}_1} + \alpha(c^\dagger c + \frac{1}{2}) + \beta(c^\dagger c^\dagger + \text{c.c.}). \quad (7)$$

ただし、 $\alpha = \frac{I}{2} \left(\frac{1}{\mathcal{J}_2} + \frac{1}{\mathcal{J}_3} - \frac{2}{\mathcal{J}_1} \right)$ 、 $\beta = \frac{I}{4} \left(\frac{1}{\mathcal{J}_2} - \frac{1}{\mathcal{J}_3} \right)$ 、と与えられる。

最後に、上式 (7) の第三項が消えるようにカノニカル変換、すなわち、

$$\hat{c}^\dagger = xc^\dagger - yc \quad (x^2 - y^2 = 1), \quad (8)$$

とすると、

$$H = \frac{I^2}{2\mathcal{J}_1} + \hbar\omega_w \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (9)$$

ここで、 $n = \hat{c}^\dagger \hat{c} \simeq \frac{I-I_1}{2}$ は粒子数演算子に対応し、揺動励起エネルギーは

$$\hbar\omega_w = \hbar\omega_0 \sqrt{\frac{(\mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_3)(\mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_2)}{\mathcal{J}_2\mathcal{J}_3}} \quad (10)$$

と与えられる。(ただし、 $\hbar\omega_0 \equiv \frac{I}{\mathcal{J}_1}$ とした。)

最後のハミルトニアンの表式 (9) は、一様な 1 軸回りの回転運動とその回転運動に対する摂動 (微小振動) として調和振動が励起されているような状況をあらわしている。この励起された振動子が (量子化された) 揺動運動に他ならない。

この結果に至るのに大事なのは、3 軸対称性 (式 (2)) と高スピン状態 (式 (3)) の仮定である。

2 実験データ (^{163}Lu の励起スペクトル)

2001 年初頭、コペンハーゲンのグループにより、3 軸対称超変型状態 ($\beta \simeq 0.4, \gamma \simeq -30^\circ$)¹ を持つ ^{163}Lu (ルテシウム-163) の高スピン状態 ($I \simeq 40\hbar$) において揺動モードが発見された、という報告がなされた (図 1)[2]。

ただしこの原子核の陽子数は奇数 ($Z = 71$) のため、実験で観測された回転励起状態は回転子励起と陽子の励起が結合した状態であり、先の揺動運動模型で見たような量子回転子の純粋な励起状態とは限らない。I.Hamamoto らは、この点に注意しながら、巨視的模型の 1 つである粒子回転子模型を用いて、この結合した励起状態を議論した [2, 3]。それによると、この原子核の高スピン状態では回転子が揺動励起した状態と主回転方向 (1 軸方向) に回転整列した単一粒子 (陽子の $i_{13/2}$ 軌道) が結合した状態を考えると、よく実験が説明できることを示した。

3 傾斜軸回転模型による揺動運動の記述

以上で述べた原子核の揺動運動では、原子核の変形は静的 (安定) で表面振動のような励起とは結合していない。しかしながら、より一般的な状況として、3 軸対称振動と揺動運動の自由度が結合したような状況を考察するのは意味があるし、また興味深い。ここで面白そうなのは、このような結合モードによって、揺動運動が微小運動に留まらず、より非線型性の強い、大振幅運動を示す可能性がある、という点である。

¹ ここで用いた γ の定義は、いわゆる Lund 既約とは符号が逆になっていることに注意。

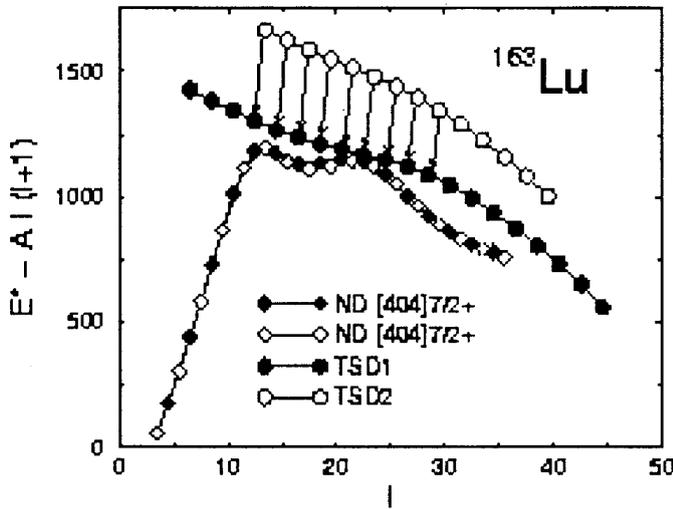


図 1: Experimental spectrum of ^{163}Lu . TSD1 (closed circles) corresponds to zero wobbling phonon states, while TSD2 (open circles) to one wobbling phonon states. This figure is retrieved from Ref.[3].

このような状況に対処するために、私たちは傾斜軸クランキング模型 (Tilted Axis Cranking Model) に基づいた方法で、原子核の揺動運動を記述しようとした [4]。すなわち、微視的な平均場模型である Hartree-Fock-Bogoliubov 法により原子核の内部状態を記述し、回転の効果はこの内部状態をクランクすることによって取りこむ。このとき、クランク軸が変型の主軸に平行である必要はない、と制限を緩めることで、回転軸の「ぶれ」、すなわち揺動運動を表すことにする。また、この方法は、原子核の変型や超伝導性など平均場に関連した物理量 [5] はすべて自己無撞着に決定されるため、(内部状態への) 揺動運動のダイナミクスの影響を考慮した手法となっている。

以下にこの手法を簡単にまとめる。変分状態は一般化積状態 (Hartree-Fock 法における Slater determinant 状態のようなもの。) を用いる。ここでは対相関を扱うため、準粒子に対する生成消滅演算子 (β_i^\dagger, β_i) を考え、 $|\text{HFB}\rangle = \prod_i \beta_i |0\rangle$ を採用する。ここで、 $|0\rangle$ は真空状態を表し、 $|\text{HFB}\rangle$ は HFB 基底状態である。後者は準粒子空間における真空に対応する。($\beta_i |\text{HFB}\rangle = 0$)

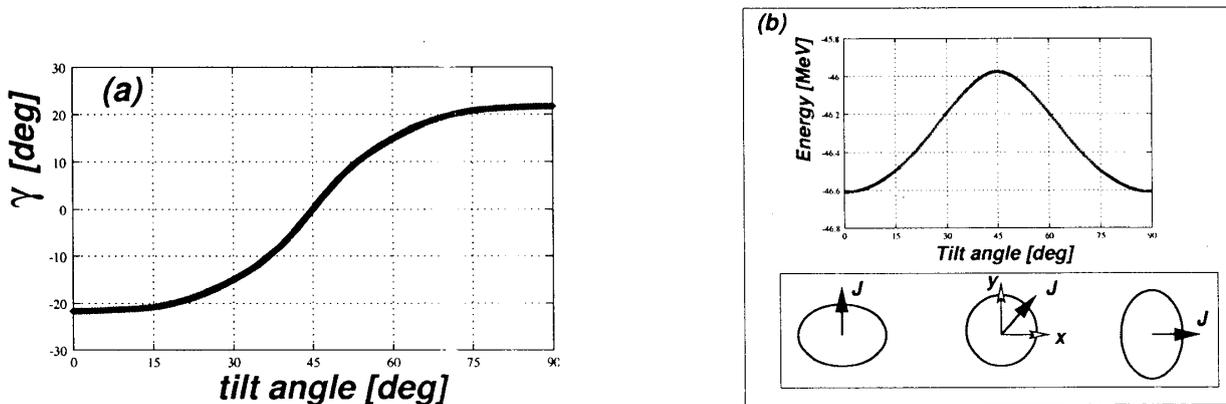
モデル空間を張るカノニカル基底 (数値計算では陽子、中性子各々につき、2つの主殻 ($N_p = 3, 4; N_n = 4, 5$) を使用) と準粒子基底は一般 Bogoliubov 変換で関連づけられている [5]。ハミルトニアンは、球対称な芯の部分 (H_0) と、外殻の準粒子間の相互作用を取り扱う部分 (V_{res}) とからなり、前者は球形 Nilsson 模型より、後者は Pairing+Q-Q と呼ばれる分離型の現象論的な有効核力を採用した。モデル空間は第一項の固有状態より選ばれ、第二項は残留相互作用として取り扱われる。

回転の効果はクランキング項 $-\sum_{i=1}^3 \omega_i \hat{J}_i$ によって取りこまれる。また、角運動量と核子数についての拘束条件を次のように課す。

$$\langle \hat{J}_1 \rangle = J \cos \theta, \quad \langle \hat{J}_2 \rangle = 0, \quad \langle \hat{J}_3 \rangle = J \sin \theta, \quad \langle \hat{N}_\tau \rangle = N_\tau. \quad (11)$$

ここで、 θ を (回転軸の) 傾斜角と呼ぶとする。また、自己無撞着な反復計算の過程で傾斜角が変形主軸に一致しないように、四重極モーメントの非対角項が零になる、という拘束も課す。

$$\langle \hat{B}_k \rangle = 0 \quad (\hat{B}_k \equiv \frac{1}{2}(\hat{Q}_{ij} + \hat{Q}_{ji}), \quad i, j, k : \text{cyclic}). \quad (12)$$



3 軸変形度 (γ) の傾斜角 (θ) 依存性。

全エネルギーの傾斜角依存性と、揺動運動と 3 軸対称変形の概念図

図 2: 傾斜軸回転クラッキング模型による計算結果

したがって、変分方程式は

$$\delta \langle \text{HFB} | \hat{H}_0 + \hat{V}_{\text{res}} - \sum_{i=1}^3 \omega_i \hat{J}_i - \sum_{i=1}^3 \mu_i \hat{B}_i - \sum_{\tau=p,n} \lambda_\tau \hat{N}_\tau | \text{HFB} \rangle = 0 \quad (13)$$

となる。

この変分方程式を解くと、平均場に基づく状態のエネルギーや、その変形度などが計算できる。特に 3 軸変形度 (γ) は次のように求めることができる (期待値は HFB 状態についてとる)。

$$\gamma = \tan^{-1} \frac{\langle \hat{Q}_{22} + \hat{Q}_{2-2} \rangle}{\sqrt{2} \langle \hat{Q}_{20} \rangle} \quad (14)$$

^{163}Lu の近傍核で、揺動運動がきれいに観測されると予想される² ^{164}Hf (ハフニウム-164) に適用した、上述の手法による計算結果は図 2 のようになった。

微小振動 ($\theta \simeq 0^\circ$) を考えると、その変形度はほぼ一定であり ($\gamma = -20^\circ$)³、また振動は調和振動でよく近似されることがわかる。一方、振幅が大きくなると、3 軸変形対称性に関する表面振動が励起され、揺動運動と結合してくることがわかる。その結果、揺動運動は非調和性をもち始めることが見て取れる。

4 まとめ

原子核物理で最近話題になっている「揺動運動」についての標準的な理論 (Bohr=Mottelson の揺動運動模型) とそれに対応する実験データを概観した。また、傾斜軸回転模型に基づく、私たち独自の揺動模型を提示し、それが大振幅の揺動運動や、3 軸対称性に関する表面振動励起と結合するような、より一般の場合も表現できることをみた。

Bohr-Mottelson の揺動運動模型では、「原子核のような Fermion 系でなければならない」といった条件は特になく、量子回転子として見なすことができる有限系一般、たとえば Bose-Einstein 凝縮 (BEC) したアルカリ原子希薄ガスなど、に応用できると思われる。また、Boson 系を微視的に記述する Gross-Pitaevski 方程式に傾斜軸回転模型を適用して、BEC の揺動運動を微視的な観点から研究することが期待できる。この研究会の議論において、「BEC では揺動運動が発現する前に量子渦が発生する可能性が高い」といった意見があったが、その発生、あるいは発生抑制の機構を研究することは十分に意義があると信ずる。

² 陽子数も中性子数も偶数という意味。

³ ここで用いた γ の定義は、いわゆる Lund 既約とは符号が逆になっていることに注意。

5 謝辞

今回の研究会は非常に有意義で、興味深いものでした。この会の開催を計画、実行された方々、および私の質問に丁寧に答えてくださった方々全員に敬意と謝意を、この場を借りて、表したいと思います。

なお、この研究は日本学術振興会によってサポートされたPD 特別研究です。

参考文献

- [1] A.Bohr and B.Mottelson, *Nuclear Structure Vol.II* (1975), Benjamin.
- [2] S.W.Ødegård et al., *Phys.Rev.Lett.* 86 (2001) 5866.
- [3] I.Hamamoto, et al., *Acta Physica Polonica* 32 (2001) 2545.
- [4] M.Oi and P.M.Walker, *nucl-th/0107051*; T.Horibata and N.Onishi, *Nucl.Phys.A596* (1996) 251.
- [5] P.Ring and P.Schuck, *“The Nuclear Many-Body Problem”* (1980) Springer-Verlag.