二次相転移のリアプノフ解析

山口義幸* (京都大学 情報学研究科 数理工学専攻)

1　はじめに

多自由度の力学系を解析する道具に、リアプノフ解析がある。これは、カオスの特徴である軌道の指数的不安定性に着目し、その強さと方向をそれぞれリアプノフ指数とリアプノフベクトルで測るものである。リアプノフ指数には熱力学的極限が存在するため [LPR86]、相転移系へ応用することが可能であり、その臨界点ではエネルギーの関数として不連続になることが報告されている [Fir98, CCC$^+$98]。このように、時間平均量であるリアプノフ指数によっては、臨界点を力学的に特徴付けることに成功しているが、ダイナミクスの情報をより豊富に含むリアプノフベクトルから新しい見地が得られた例は数少ない [KK92]。そこで本研究では、リアプノフベクトルを用いて臨界点を特徴付け、特に動的臨界現象の力学的な理解を目指す。

2　幾何学的なリアプノフ解析

ポテンシャルで記述できる自然ハミルトン系

$$H(q,p)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}p_j+U(q)$$

を考える。通常、リアプノフベクトル $V_\alpha(t)$ $(\alpha=1,\cdots,2N)$ は、線形化運動方程式の線形独立な $2N$ 個の解 $X_\alpha(t)$ $(\alpha=1,\cdots,2N)$ を Gram-Schmidt の方法で直交化することにより計算されている。また、リアプノフ指数 λ_α は $V_\alpha(t)$ の指数的成長率の長時間平均として得られ、$\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_{2N}$ となる。これらの指数のうち、相空間が有界であれば、軌道の進行方向とハミルトニアンの勾配方向に対応する 2 つの指数、λ_N と λ_{N+1} はゼロになると言われている。よって、安定／不安定方向を示すリアプノフベクトル $V_\alpha(t)$ $(\alpha\neq N,N+1)$ を、安定／不安定性がないこれら 2 方向と常に直交させることによって、純粋に安定／不安定な方向を得ることができると考えられる。しかし、通常用いられている方法、つまり線形

*e-mail: yyama@amp.i.kyoto-u.ac.jp

化運動方程式として

$$\frac{\mathrm{d}Q^j}{\mathrm{d}t} = P_j, \quad \frac{\mathrm{d}P_j}{\mathrm{d}t} = -\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial^2 V}{\partial q^j \partial q^k} Q^k, \quad (j = 1, \cdots, N) \tag{1}$$

を、直交性を定義する計量として Euclid 計量を用いる方法では、特別な系を除いて上記の要求は満たされない。

そこで、配位空間にヤコビ計量 $g_{ij} = 2[E - U(q)]\delta_{ij}$ を入れ、解軌道を Riemann 多様体上の測地線とみなす方法を採用する。この幾何学的方法は、最大リアプノフ数 λ_1 を統計力学を用いて見積もるために導入された [Pet93, CPC00] が、ここでは相空間にリフトすることによりリアプノフベクトルを考察する方法として用いる。実際、この幾何学的方法を用いれば上記の要求を満たすことが厳密に証明でき [YI]、従来の方法では観測にかかりにくかった挙動を見ることができると期待される。

本発表では、相転移系において幾何学的方法によるリアプノフ解析を行った結果を報告する。得られたリアプノフベクトルを用いた観測量を導入し、その時間平均や相関関数を従来の方法と幾何学的方法とで比較しながら、臨界点を力学的に特徴付けることを試みる。

参考文献

[CCC+98] Lando Caiani, Lapo Casetti, Cecilia Clementi, Giulio Pettini, Marco Pettini, and Raoul Gatto, *"Geometry of dynamics and phase transitions in classical lattice ϕ^4 theories"*, Phys. Rev. E **57** (1998), no. 4, 3886–99.

[CPC00] Lapo Casetti, Marco Pettini, and E. G. D. Cohen, *"Geometric approach to Hamiltonian dynamics and statistical mechanics"*, Phys. Rep. **337** (2000), 237–341.

[Fir98] Marie-Christine Firpo, *"Analytic estimation of the Lyapunov exponent in a mean-field model undergoing a phase transition"*, Phys. Rev. E **57** (1998), 6599–603.

[KK92] T. Konishi and K. Kaneko, *"Clustered motion in symplectic coupled map systems"*, J. Phys. A: Math. Gen. **25** (1992), 6283–96.

[LPR86] R. Livi, A. Politi, and S. Ruffo, *"Distribution of characteristic exponents in the thermodynamic limit"*, J. Phys. A **19** (1986), 2033–40.

[Pet93] M. Pettini, *"Geometrical hints for a nonperturbative approach to Hamiltonian dynamics"*, Phys. Rev. E **47** (1993), 828–50.

[YI] Y. Y. Yamaguchi and T. Iwai, *"Geometric Approach to Lyapunov Analysis in Hamiltonian Dynamics"*, Phys. Rev. E (In press), chao–dyn/0104005.