

大域結合写像における カオスの遍歴の発生機構

小室元政
帝京科学大学

1 大域結合写像

パラメータ a ($1.0 \leq a \leq 2.0$) をもつ 1 次元写像

$$g_a(x) = 1 - ax^2 \quad (1)$$

を考える。この写像はカオスの研究ではよく知られた写像でロジスティックマップと呼ばれている。このロジスティックマップ g_a を N 個用意し相互に結合させたシステムを考える。各 g_a のパラメータ a にばらつきを持たせるとか、結合の仕方に変化を持たせるとか、いろいろなバリエーションが考えられるが、ここでは最もシンプルな場合として、すべての g_a のパラメータ a は同一の値を取り、結合の仕方はすべての g_a が対等な立場で全結合する平均場結合をとることとする。このようなシステムは大域結合写像 (Globally Coupled Map, GCM) と呼ばれる。具体的には次の式で定義される、2つのパラメータ a, ε をもつ \mathbb{R}^N ($N \geq 1$) 上の写像である。

$$F_{a,\varepsilon} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N, x = (x_1, \dots, x_N)^T \mapsto y = (y_1, \dots, y_N)^T \quad (2)$$

$$y_i = (1 - \varepsilon)g_a(x_i) + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^N g_a(x_j) \quad (1 \leq i \leq N) \quad (3)$$

例として $N = 3$ の場合は次のようになる。

$$y_1 = (1 - \varepsilon)g_a(x_1) + \frac{\varepsilon}{3} \{g_a(x_1) + g_a(x_2) + g_a(x_3)\} \quad (4)$$

$$y_2 = (1 - \varepsilon)g_a(x_2) + \frac{\varepsilon}{3} \{g_a(x_1) + g_a(x_2) + g_a(x_3)\} \quad (5)$$

$$y_3 = (1 - \varepsilon)g_a(x_3) + \frac{\varepsilon}{3} \{g_a(x_1) + g_a(x_2) + g_a(x_3)\} \quad (6)$$

N は通常、数 100 程度の大きな数が使われる。十分大きな N に対して、普遍的に現れる振舞いを知りたいという欲求が背後にあるからである。しかし、数学的な構造を解明していくには $N = 100$ 大きすぎ、まずは $N = 10$ 程度のシステムから解析することになる。幾つかの振動子が相互に結合したシステム (結合振動子系) において、ばらばらの振動をしていた振動子が同期して同一の振動を始める現象がある。このような現象は「引き込み」と呼ばれている。ロジスティックマップを振動子と考えれば、GCM もひとつの結合振動子系と見ることができ、引き込みが生じることが予想される。金子邦彦は 1990 年に、パラメータ (a, ε) を変化させたとき、GCM にどのような引き込みが起こるかを調べ、図 1 の相図を作った。ランダムに選んだ初期値に対して、 $F_{a,\varepsilon}$ を繰り返

し施し、軌道を計算する。過渡的状态が終了したと思われる時点まで、数万回の繰り返しを行う。その後、引き込んで同一の動きをしているロジスティックマップを1つのクラスとしてまとめ、いくつのクラスに分けられるかという、クラスター形成の視点から、GCMの振舞いを調べる。金子は、 $N = 200$ のGCMに対して、 a を0.01きざみ、 ϵ を0.02きざみで変えて行きながら、ランダムに選んだ500個の初期値からクラスターを求めた。そして、GCMの振舞いを次の4つの相に分類した。

1) コヒーレント相：すべての要素（すなわち、ロジスティックマップ）が完全に引き込んで振動する。クラスターの数は1つ。非線型性のパラメータ a が小さく、結合の強さを表すパラメータ ϵ が大きい左上の領域で発生している。

2) 非同期相：各要素がすべて、まったくばらけて振動する。クラスターの数は N 個。非線型性のパラメータ a が大きく、結合の強さを表すパラメータ ϵ が小さい右下の領域で発生している。

3) 秩序相：いくつかのクラスターに分かれて、それぞれでそろって振動する。クラスターの数は N に比べて非常に小さい。相図の中にある数字は10

4) 部分秩序相：ここでは、クラスターの組み替えが間欠的に起きる。すなわち、ランダムに初期値を与えて、 $F_{a,\epsilon}$ を繰り返し施す。すると、システムはたとえば2クラスター状態を見つけて、しばらくこの状態を保つ。しかし、しばらくすると、この状態が乱れ始め、いったん完全にバラけた状態になる。そして、しばらくすると、別のクラスター状態、たとえば3クラスター状態を見つけて、しばらくその状態を保つ。しかし、この状態もやがて乱れ始めて、再び完全にバラけた状態になる。このような過程を際限無く繰り返すのが部分秩序相である。部分秩序相は2つの領域に分かれており、秩序相と非同期相との間に位置する領域を部分秩序相 I、コヒーレント相と秩序相との間に位置する領域を部分秩序相 II と名付けた。相図の中で「部分秩序相 II (2)」とあるのは初期値のとり方によっては2クラスター状態に落ち着くことがあることを示している。このように、準安定な状態の間を乱れた状態を通して経巡る現象をカオスの遍歴 (Chaotic Itinerancy) と呼ぶ。カオスの遍歴は池田・大塚・松本による光乱流のシミュレーション、津田の生理的な非平衡神経回路モデル、そして金子のGCMで同時に見出されたものであり、その英訳 (Chaotic Itinerancy) は Peter Davis の示唆によってつけられたものである。カオスの遍歴の発生メカニズムはどのシステムでも同じであるとは限らないと思う。むしろ、いくつかの典型的な発生メカニズムが存在している可能性があるとは私は考えている。

2 数学的解釈

クラスターに分かれるという現象を数学的に解釈すると次のようになる。すべてが引き込んで同期するコヒーレント状態は

$$H^1 = \{x \in \mathbb{R}^N | x_1 = x_2 = \dots = x_N\} \tag{7}$$

で定義される1次元の不変部分空間があり、軌道は H^1 上のアトラクターに引き寄せられたと考えられる。また、2クラスター状態が安定であるということは、ある2次元の不変部分空間、例えば、

$$H^2 = \{x \in \mathbb{R}^N | x_1 = x_2 = \dots = x_n, x_{n+1} = x_{n+2} = \dots = x_N\} \tag{8}$$

上のアトラクターに引き寄せられたと考えられる。一般に、安定な k クラスター状態の存在は、ある k 次元不変部分空間とその上のアトラクターが存在して、軌道はそのアトラクターに引き寄せられ、結果として自由度 k の運動をするようになったと考えられる。カオスの遍歴は幾つかの不変部分空間上にアトラクターの残骸 (吸引的性質とともに、反発的性質を持つ不変集合。この実体が

何であるかということが問題である。)が存在し、これらのアトラクター残骸間を軌道が経巡る現象と考えられる。たとえば、2 クラスター状態をしばらく続け、やがて乱れ始め、完全にばらばらの状態を経て、3 クラスター状態を見つけ、しばらくその状態を続けるが、やがて乱れ始める、という現象は次のように解釈できる。すなわち、軌道は2次元不変部分空間上のアトラクタ残骸に引き寄せられ、しばらくそこに滞在するが、やがてそこを離脱し、さ迷う。そして、3次元不変部分空間上のアトラクタ残骸を見つけ、しばらくそこに滞在した後、また離脱する。真正のアトラクタが存在せず、いくつものアトラクタ残骸が共存する場合にこのような遍歴を生じると考えられる。

次の順序でカオスの遍歴の発生メカニズムを明らかにする。第3節では不変部分空間の補空間方向への不安定性を明らかにする。第4節、第5節で一本の典型的軌道を解析することにより、10GCMにおけるカオスの遍歴の発生メカニズムを明らかにする。結論として、低次元の不変部分空間上のアトラクタがクライシス誘導型間欠性を起こし、直交補空間方向が安定になったり不安定になったりすることにより、カオスの遍歴が生じていることが明らかになる。

3 補空間方向の不安定性

$F = F_{a,\varepsilon}$ を節で定義した大域結合写像とする。 $x = (x_1, \dots, x_N)^T \in \mathbb{R}^N$ のとき、 F の微分は次で与えられる。

$$DF(x) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N, (\xi_1, \dots, \xi_N)^T \rightarrow (\eta_1, \dots, \eta_N)^T \quad (9)$$

$$\eta_i = (1 - \varepsilon)Dg_a(x_i) \cdot \xi_i + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^N Dg_a(x_j) \cdot \xi_j \quad (i = 1, \dots, N)$$

すなわち、

$$DF(x) = (1 - \varepsilon) \begin{pmatrix} Dg_a(x_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & Dg_a(x_N) \end{pmatrix} + \frac{\varepsilon}{N} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} (Dg_a(x_1), \dots, Dg_a(x_N))$$

ここで、 $g_a(t) = 1 - at^2$ であったから、 $Dg_a(t) = -2at$ である。この DF の表現から次の命題が導かれる。

命題 1 任意の $\sigma \in S_N$ を与える。 $x \in H_\sigma$ とする。

- (1) H_σ の直交補空間 H_σ^\perp は $DF(x)$ に関して不変である。
- (2) σ の巡回置換表示を

$$\sigma = (i_{11}, \dots, i_{1m_1}), (i_{21}, \dots, i_{2m_2}) \cdots (i_{k1}, \dots, i_{km_k}) \quad (10)$$

とするとき、直交補空間 H_σ^\perp 方向の $DF(x)$ の固有値は

$$(1 - \varepsilon)Dg_a(x_{i_{j1}}) \quad j = 1, \dots, k \quad (11)$$

で与えられる。

- (3) H_σ の横断 *Lyapunov* 指数

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |DF^n(x)(v)|, x \in H_\sigma, v \in H_\sigma^\perp \quad (12)$$

は H_σ 上での偏 *Lyapunov* 指数

$$\lambda_{i,j_1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \log |Dg_a(\pi_{i,j_1}) \circ F^m(x)|, \quad x \in H_\sigma, j = 1, \dots, k \quad (13)$$

に $\log(1 - \varepsilon)$ を加えた数に等しい. ただし,

$$\pi_{i,j_1} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}; \pi_{i,j_1}(x) = x_{i,j_1}, \quad j = 1, \dots, k \quad (14)$$

は x_{i,j_1} 成分への射影である.

例 1 10GCM を考える.

$$\sigma = (1, 2, 3, 4, 5, 6)(7, 8, 9, 10) \quad (15)$$

$$H_\sigma = \{x \in \mathbb{R}^{10} | x_1 = x_2 = \dots = x_6, x_7 = \dots = x_{10}\} \quad (16)$$

$x \in H_\sigma$ とする. このとき,

$$u_{1,1} = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)^T \quad (17)$$

$$u_{1,2} = (1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T \quad (18)$$

$$u_{1,3} = (1, 1, -2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T \quad (19)$$

$$u_{1,4} = (1, 1, 1, -3, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T \quad (20)$$

$$u_{1,5} = (1, 1, 1, 1, -4, 0, 0, 0, 0, 0)^T \quad (21)$$

$$u_{1,6} = (1, 1, 1, 1, 1, -5, 0, 0, 0, 0)^T \quad (22)$$

$$u_{2,1} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1)^T \quad (23)$$

$$u_{2,2} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0)^T \quad (24)$$

$$u_{2,3} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, -2, 0)^T \quad (25)$$

$$u_{2,4} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, -3)^T \quad (26)$$

と置くと, $u_{1,1}, u_{2,1}$ は H_σ の直交基底を与え, $u_{1,2}, u_{1,3}, u_{1,4}, u_{1,5}, u_{1,6}, u_{2,2}, u_{2,3}, u_{2,4}$ は H_σ^\perp の直交基底を与える. $u_{1,2}, u_{1,3}, u_{1,4}, u_{1,5}, u_{1,6}, u_{2,2}, u_{2,3}, u_{2,4}$ は $DF(x)$ の固有ベクトルで, $u_{1,2}, u_{1,3}, u_{1,4}, u_{1,5}, u_{1,6}$ の固有値は $(1 - \varepsilon)Dg_a(x_1)$:

$$DF(x) \cdot u_{1,i} = (1 - \varepsilon)Dg_a(x_1) \cdot u_{1,i} \quad (i = 2, \dots, 6) \quad (27)$$

$u_{2,2}, u_{2,3}, u_{2,4}$ の固有値は $(1 - \varepsilon)Dg_a(x_7)$:

$$DF(x) \cdot u_{2,i} = (1 - \varepsilon)Dg_a(x_7) \cdot u_{2,i} \quad (i = 2, \dots, 4) \quad (28)$$

で与えられる. また, x_1, x_7 方向の偏 *Lyapunov* 指数は

$$\lambda_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \log |Dg_a(\pi_i) \circ F^m(x)|, \quad j = 1, 7 \quad (29)$$

で与えられ, H_σ の横断 *Lyapunov* 指数は

$$\log(1 - \varepsilon) + \lambda_1 \quad : \text{重複度} = 6 - 1 = 5 \quad (30)$$

$$\log(1 - \varepsilon) + \lambda_7 \quad : \text{重複度} = 4 - 1 = 3 \quad (31)$$

となる.

この命題から不変部分空間 H_σ の補空間方向の不安定性は H_σ 上の軌道によって決まり, 全空間の次元 N には依存しないことがわかる.

4 カオスの遍歴の観測

この節と次の節で 10GCM のにおけるカオスの遍歴の発生機構を明らかにする。結論として、低次元の不変部分空間上のアトラクタがクライシス誘導型間欠性を起こし、直交補空間方向が安定になったり不安定になったりすることにより、カオスの遍歴が生じていることが明らかになる。さて、部分秩序相の計算においては、「見かけの引き込み」と呼ばれる問題がしばしば起こる。たとえば、二つの要素 x_i, x_j が 10^{-30} まで接近し、その後、再び離れていく、という現象が理論上あったとする。ところが、たとえば倍精度の計算でも一番下の桁は 10^{-16} であり、われわれのデジタル計算機の上では、いったんはまったく同じ値となってしまう。いったん同じ値になってしまうと、二つの要素が元来離れようとしていても、このデジタル計算機の上ではもはや離れようがなくなってしまう。これを「見かけの引き込み」問題という。こうした問題を取り除くために、金子の手法に従い、もとの系に小さな雑音を加えることにする。つまり、 $[-\sigma, \sigma]$ からとった一様な乱数 η_i をくわえる。

$$y_i = (1 - \varepsilon)g_a(x_i) + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^N g_a(x_j) + \eta_i, \quad \eta_i \in [-\sigma, \sigma], \quad (1 \leq i \leq N) \quad (32)$$

σ をノイズの大きさと呼ぶ。

10GCM において、パラメータを $a = 1.90, \varepsilon = 0.186$ に固定する。有効次元の精度 δ を 10^{-13} 、ノイズの大きさ σ を 10^{-15} として、軌道を倍精度で計算する。図 2 は、ランダムに与えた初期値 $x(0) \in \mathbb{R}^{10}$ の軌道を $x(t)$ とし、点 $x(t)$ における有効次元 $ED(x(t), \delta)$ を 32 ステップ毎に 5000 回記録したものである。 $ED(x(t), \delta)$ は 6 と 10 の間の値をとりながら（まれに 4, 5 の値をとる）、増減しており、カオスの遍歴が起きていることがわかる。この振舞いを詳しく調べるため、あらためてランダムにとった初期値を $x(0)$ とし、同じ条件（有効次元の精度 $\delta = 10^{-13}$ 、ノイズの大きさ $\sigma = 10^{-15}$ 、倍精度計算）で軌道を計算し、10000 ステップ分の $x(t)$ の座標をすべて記録する。図 3（上）は 0 ステップ（初期値）から 10000 ステップまでの有効次元 $ED(x(t), \delta)$ のグラフである。図 3（下）は 4000 ステップから 6000 ステップまでの間を拡大したものである。4000 ステップから 4500 ステップにかけて $ED(x(t), \delta)$ は 10 から 6 まで減少し、4500 ステップから 5100 ステップあたりまで 6 の値をとりつづけ、5100 ステップから 5500 ステップまでで $ED(x(t), \delta)$ は 10 に増加する。4600 ステップにおける $x = x(t)$ の座標 $(x_1, x_2, \dots, x_{10})$ は次のようになっている。

$$x_1 = 0.8680111717440510 \quad x_2 = 0.7132627407502350 \quad (33)$$

$$x_3 = 0.8680111717440530 \quad x_4 = -0.3057604271100400 \quad (34)$$

$$x_5 = 0.7108613712018920 \quad x_6 = -0.3057604271100450 \quad (35)$$

$$x_7 = -0.0088623218480510 \quad x_8 = 0.7122016989087070 \quad (36)$$

$$x_9 = -0.0088623218480513 \quad x_{10} = -0.3057604271100360 \quad (37)$$

これを並べ替えると次のようになる。

$$x_4 = -0.3057604271100400 \quad (38)$$

$$x_6 = -0.3057604271100450 \quad (39)$$

$$x_{10} = -0.3057604271100360 \quad (40)$$

$$x_1 = 0.8680111717440510 \quad (41)$$

$$x_3 = 0.8680111717440530 \quad (42)$$

$$x_7 = -0.0088623218480510 \quad (43)$$

$$x_9 = -0.0088623218480513 \quad (44)$$

$$x_2 = 0.7132627407502350 \quad (45)$$

$$x_5 = 0.7108613712018920 \quad (46)$$

$$x_8 = 0.7122016989087070 \quad (47)$$

すなわち、 x_4, x_6, x_{10} は 10^{-13} まで同期しており、 x_1 と x_3 、および x_7 と x_9 はそれぞれ 10^{-14} まで同期している。これらの同期により有効次元が 6 次元になっている。これらの同期がどのようにして実現し、どのようにして外れていくのかを見るため、 $|x_4 - x_6|$ 、 $|x_4 - x_{10}|$ 、 $|x_1 - x_3|$ 、 $|x_7 - x_9|$ の値の変化を 4000 ステップから 6000 ステップまで示したものが図 4 である。グラフの縦軸は対数目盛で、たとえば $|x_4 - x_6| = 0$ の場合には $1.0E - 17$ をとるようにしている ($1.0E-15$ の精度で計算している)。これらの図から、軌道は

$$H = \{x \in \mathbb{R}^{10} \mid x_4 = x_6 = x_{10}, x_1 = x_3, x_7 = x_9\} \quad (48)$$

で定義される [322111] 型の 6 次元不変部分空間に接近し、しばらくその近くに滞在した後、離れていったことがわかる。図 5 は 4600 ステップから 5000 ステップまでの軌道と、5200 ステップから 5600 ステップまでの軌道をそれぞれ (x_4, x_1) 平面へ射影したものである。この図から、6 次元不変部分空間 H 上に図 5 (左) のような吸引力のある集合 (擬アトラクタ) があり、軌道はしばらくここに引き付けられているが、図 5 (右) に見られるように、何らかの理由で吸引力を失い、軌道は H から離れていったことが予想される。この吸引力を失った原因が H 上のアトラクタのクライシスによることを次の節で明らかにする。

5 カオスの遍歴のメカニズム

前節で述べた [322111] 型 6 次元不変部分空間 $H \subset \mathbb{R}^{10}$ に制限したシステムは、次の重み付き 6 次元 GCM と同値である。

$$G_{a,\varepsilon} : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6, y = (y_1, \dots, y_6)^T \mapsto z = (z_1, \dots, z_6)^T \quad (49)$$

$$z_i = (1 - \varepsilon)g_a(y_i) + \sum_{j=1}^6 c_j g_a(y_j), \quad (1 \leq i \leq 6) \quad (50)$$

$$(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6) = (3, 2, 2, 1, 1, 1) \quad (51)$$

第 4 節の x_4, x_6, x_{10} は 10^{-13} まで一致していたことから、これらを代表させて $y_1 = -0.3057604271100$ と定める。同様に x_1 と x_3 、および x_7 と x_9 はそれぞれ 10^{-14} まで一致していたことから、これらをそれぞれ代表させて $y_2 = 0.86801117174405$, $y_3 = -0.008862321848051$ と定める。 x_2, x_5, x_8 は同期していないと判断して、そのままの値を y_4, y_5, y_6 とする。このようにして 6 次元空間の点 $y(0) = (y_1, \dots, y_6) \in \mathbb{R}^6$ を次のように定める。

$$y_1 = -0.3057604271100 \quad y_2 = 0.86801117174405 \quad (52)$$

$$y_3 = -0.008862321848051 \quad y_4 = 0.7132627407502350 \quad (53)$$

$$y_5 = 0.7108613712018920 \quad y_6 = 0.7122016989087070 \quad (54)$$

点 $y(0)$ を初期値とし、ノイズの大きさ $\sigma = 10^{-15}$ で軌道を計算し、5000 ステップ分の軌道 $y(t)$ の座標をすべて記録する。この軌道データから、瞬間横断 Lyapunov 数

$$\mu_i(t) = \log |(1 - \varepsilon) Dg_\alpha(y_i(t))|, \quad i = 1, 2, 3 \quad (55)$$

を計算する。これは、第 3 節で述べたように、 \mathbb{R}^{10} における部分空間 H の直交補空間方向の拡大率をあらわす。 $\mu_i(t)$ 自身は変動が激しく、特徴をとらえ難いので 128 ステップにわたる移動平均 (局所横断 Lyapunov 数)

$$\bar{\mu}_i(t) = \frac{1}{128} \sum_{j=0}^{127} \mu_i(t-j) \quad (56)$$

をとったものが図 6 である。ステップ 128 からステップ 500 までは局所横断 Lyapunov 数は負であり、部分空間 H の直交補空間方向は安定であることがわかる。このとき対応する軌道 (ステップ 0 からステップ 500 まで) の (y_1, y_2) 平面への射影は図 7 (左上) のように局在化している。更に、ステップ 501 からステップ 1000 までの軌道、ステップ 1001 からステップ 1500 までの軌道のそれぞれ (y_1, y_2) 平面への射影は、図 7 (右上)、(左下) のようになり、局在化していた軌道は、しだいに拡散していく様子が見える。このときの対応する局所横断 Lyapunov 数は主に正の値を取り、部分空間 H の直交補空間方向は不安定であることがわかる。拡散した軌道は図 7 (右下) にあるように再び局在化することがある。このとき局所横断 Lyapunov 数が負になれば、 H の直交補空間方向は吸引的性質を持つことになる。(今のデータではステップ 4500~5000 において $\mu_1(t)$ は 0 に近いが負であるとはいえないので、吸引的性質を持つとはいえない。) パラメータ ε を 0.187 に増加させ、初期値 $y(0)$ の軌道を 5000 ステップ計算すると図 9 のように局在したままであり、局所横断 Lyapunov 数は図 8 のようにすべて負である。逆に ε を 0.15 に減少させ、初期値 $y(0)$ の軌道を 5000 ステップ計算すると図 11 のように拡散したままであり、局所横断 Lyapunov 数は図 10 のようにすべて正である。

以上から次のことが結論付けられる。すなわち、 \mathbb{R}^{10} における部分空間 H 上には、 $\varepsilon = 0.187$ のときアトラクタ Λ_1 があり、これは H の直交補空間方向に安定で吸引的性質を持つ。 $\varepsilon = 0.150$ のときには Λ_1 に比べて大きな (Λ_1 を含むような) アトラクタ Λ_2 があり、これは H の直交補空間方向には不安定で反発的性質を持っている。 ε を 0.187 から減少させるとき、アトラクタ Λ_1 は $\varepsilon = 0.1865$ 付近でクライシスを起こす。クライシスによって Λ_1 には出口が生じ、 Λ_1 は「擬アトラクタ」となる。 $\varepsilon = 0.186$ では、 Λ_1 内にいた軌道は出口を見つけて、やがて外に出るが、外に出た軌道は Λ_2 の内部を動き回り、時々、 Λ_1 に帰って来たりもする。

H には含まれないが、 H の近くにいる点 $x \in \mathbb{R}^{10}$ の動きは、 H 上への射影点 y の動きと、直交補空間 H^\perp 方向の射影点 y^\perp の動きとの合成で近似される。 $\varepsilon = 0.186$ で射影点 y が「擬アトラクタ」 Λ_1 の内部を動くとき、直交補空間方向に安定であるから射影点 y^\perp は 0 に収束していく。射影点 y が Λ_1 の内部に滞在する時間が十分にあれば、 x は H の δ 近傍に入り、有効次元は 6 に低減する。しかし、滞在時間が十分でなければ、有効次元は 8 や 7 までしか低減しないであろう。やがて、射影点 y が「擬アトラクタ」 Λ_1 の出口を見つけ、外に出て Λ_2 の内部を動き回るようになると、直交補空間方向は不安定となり、射影点 y^\perp のノルムは拡大していき、 x が H の δ 近傍の外に出れば、有効次元は 6 から増大する (図 12)。

一般に H と位相共役な不変部分空間は多数ある。 \mathbb{R}^{10} において [322111] 型の 6 次元不変部分空間の数は、 ${}_{10}C_3 \times {}_7C_2 \times {}_5C_2 = 25200$ である。一つの H に「擬アトラクタ」 Λ_1 があるということは、他の位相共役な不変部分空間にも同様の「擬アトラクタ」があることを意味する。すなわち、 $\varepsilon = 0.186$ では 25200 個の「擬アトラクタ」が共存しており、 H の δ 近傍の外に出た x は \mathbb{R}^{10} の内部を動き回るうちに、別の「擬アトラクタ」に引き寄せられ、しばらく滞在し、やがて離れ

る、という動きを永遠に繰り返すこととなる。これが大域結合写像におけるカオスの遍歴の基本的なメカニズムであると考えられる。

6 最後に

前述の議論では、クライシスによってアトラクタ Λ_1 に出口が生じ、 Λ_1 は「擬アトラクタ」となることが重要な役割を果たした。クライシスの典型的な例は図 13 のような 1 次元写像である。区間 Λ_1 に滞在していた軌道は出口 E を見つけると外に出て区間 $\Lambda_2 = [0, 1]$ を動き回る。時には、再び区間 Λ_1 に帰ってきて、しばらく滞在する。このような振舞いはクライシス誘導型間欠性 (crisis-induced intermittency) とよばれる。したがって、この小論の主張は次のように述べるができる。

GCM におけるカオスの遍歴は、不変部分空間上でのクライシス誘導型間欠性と直交補空間方向の安定性の反転によって生じる

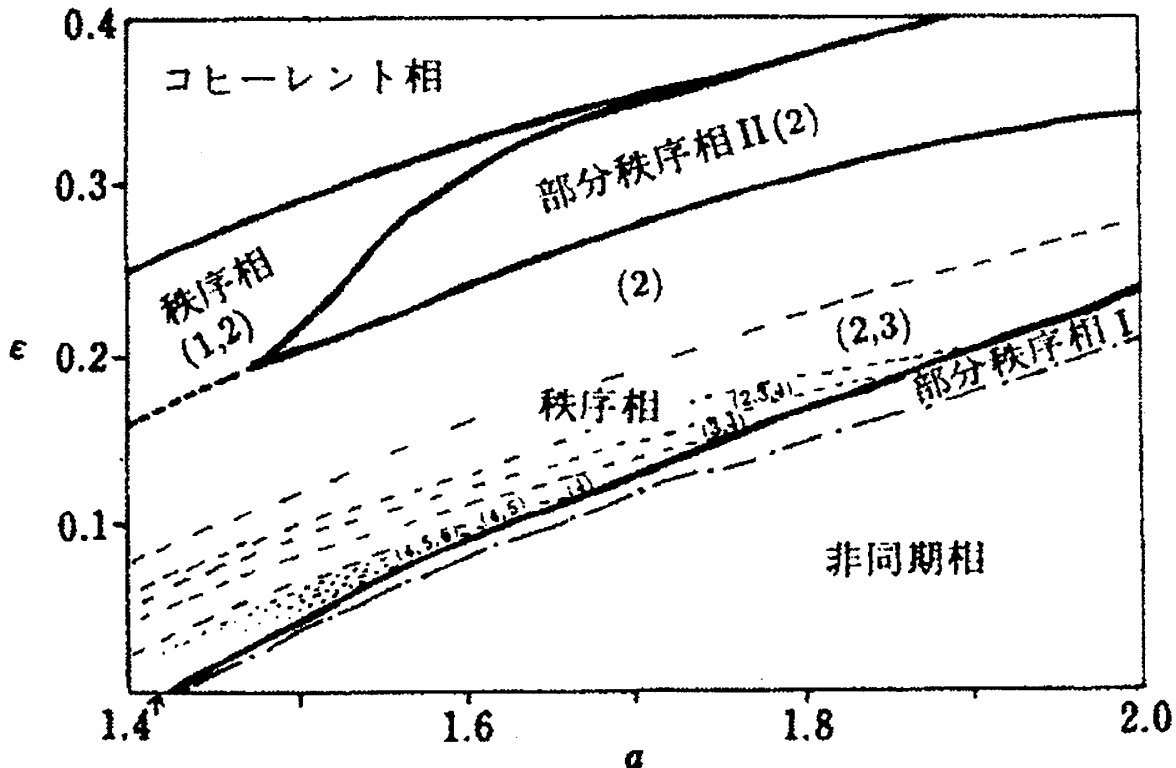


図 1: 金子氏による GCM の相図. $N = 200$. (金子邦彦・津田一郎著, 「複雑系のカオスのシナリオ」 複雑系双書 1, 朝倉書店, 1996. P.134 からの転載)

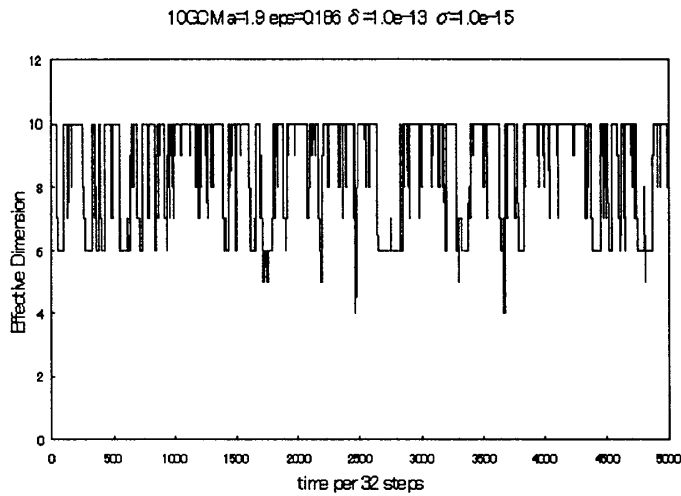


図 2: 10GCM の有効次元の変化. $a = 1.9, \epsilon = 0.186$, 有効次元の精度 $\delta = 10^{-13}$ 、ノイズの大きさ $\sigma = 10^{-15}$ 、倍精度で計算。ランダムに与えた初期値 $x(0) \in \mathbb{R}^{10}$ の軌道を $x(t)$ とし、点 $x(t)$ における有効次元 $ED(x(t), \delta)$ を 32 ステップ毎に 5000 回記録したもの。

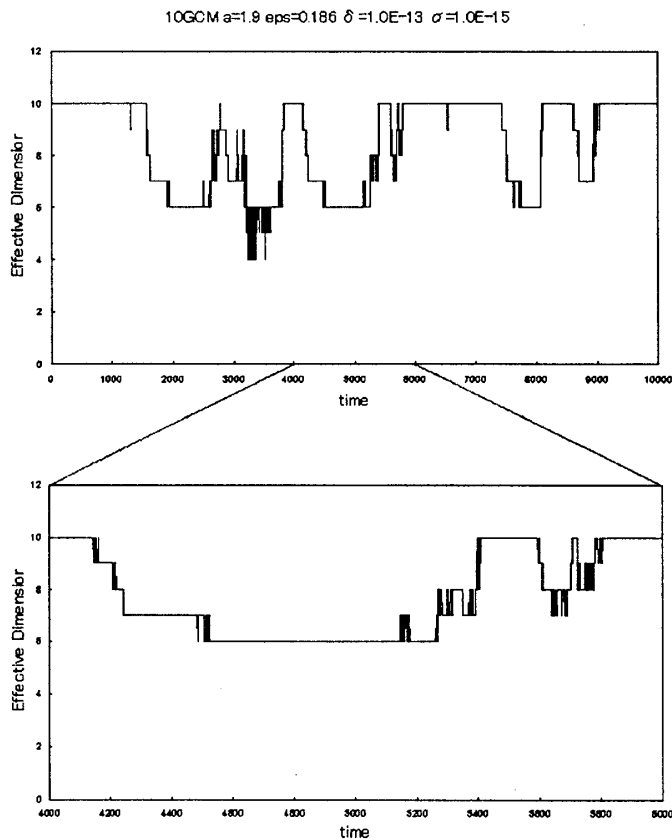


図 3: 10GCM の有効次元の変化. $a = 1.9, \epsilon = 0.186$, 有効次元の精度 $\delta = 10^{-13}$ 、ノイズの大きさ $\sigma = 10^{-15}$ 、倍精度で計算。ランダムに与えた初期値 $x(0) \in \mathbb{R}^{10}$ の軌道を $x(t)$ とし、点 $x(t)$ における有効次元 $ED(x(t), \delta)$ を各ステップ毎に 10000 回記録したもの。(下) は 4000 ステップから 6000 ステップまでの拡大。

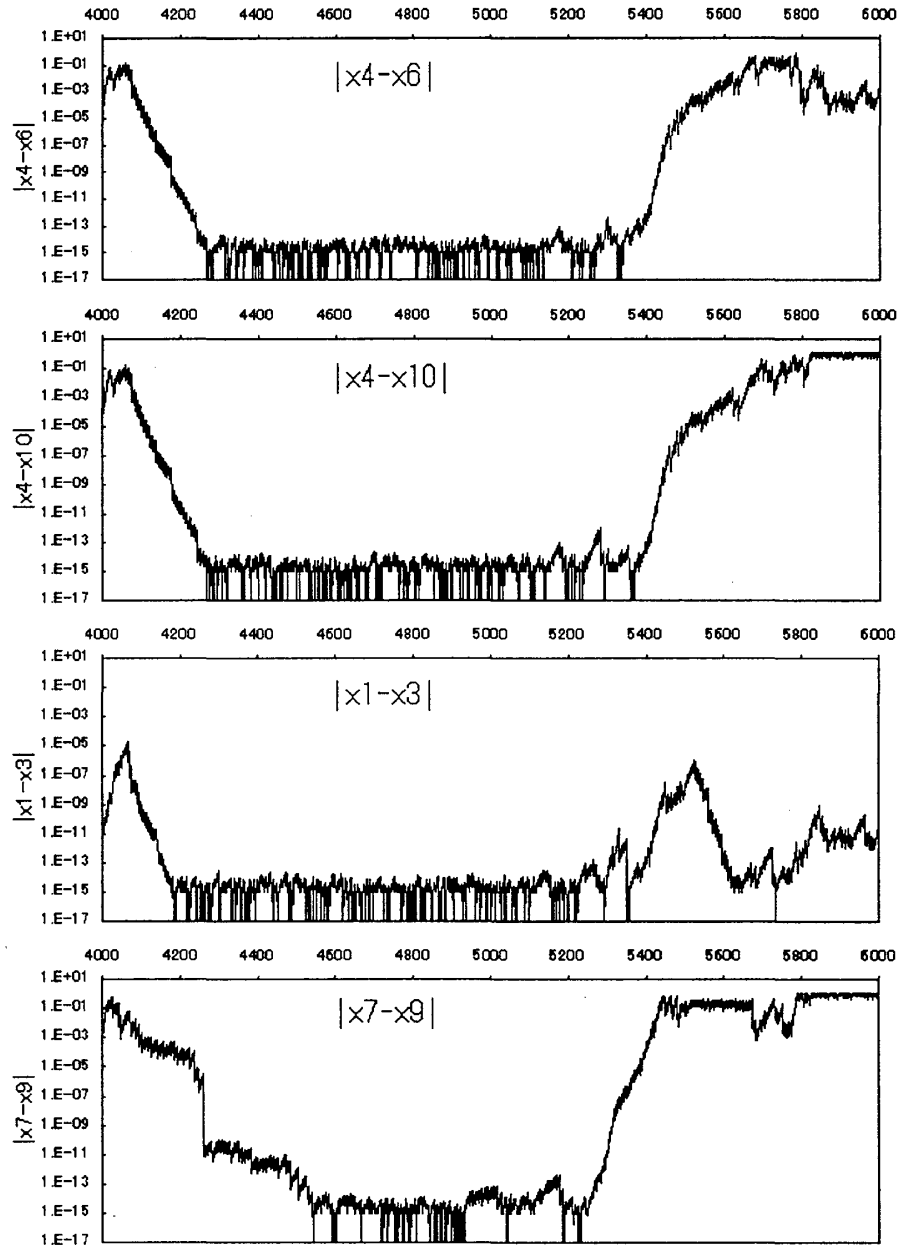


図 4: 4000 ステップから 6000 ステップまでの、上から順に、 $|x_4 - x_6|$ 、 $|x_4 - x_{10}|$ 、 $|x_1 - x_3|$ 、 $|x_7 - x_9|$ の値の変化。縦軸は対数目盛、ただし、例えば、 $|x_4 - x_6| = 0$ の場合には $1.0E - 17$ とする。

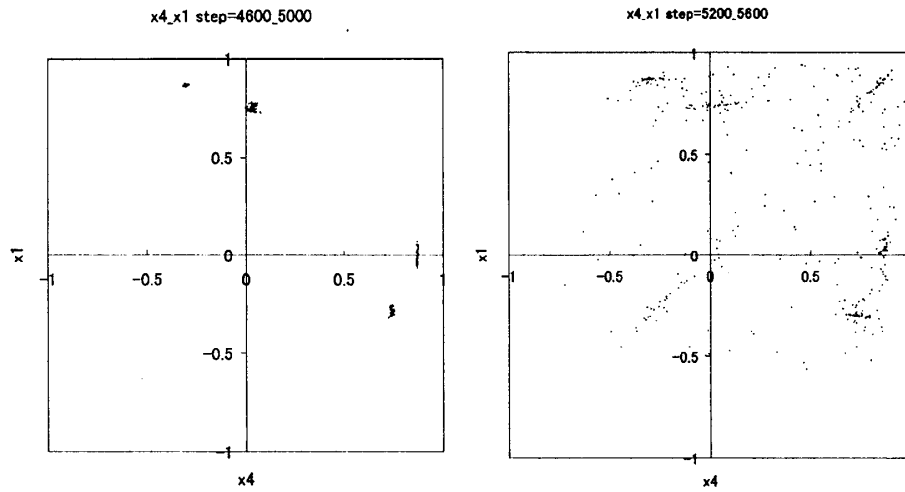


図 5: 軌道の (x_4, x_1) 平面へ射影。(左) は 4600 ステップから 5000 ステップまで、(右) は 5200 ステップから 5600 ステップまで。

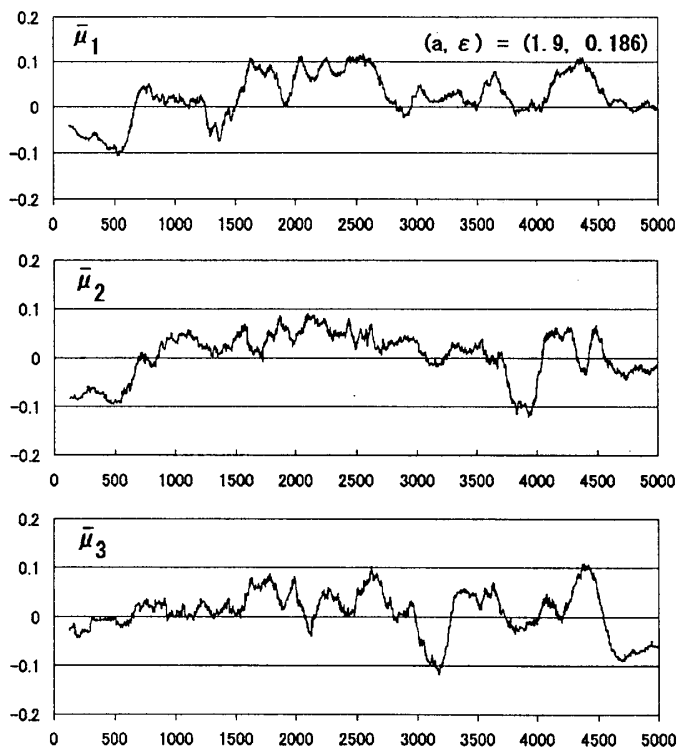


図 6: 重み [322111] 付き 6GCM における局所横断 Lyapunov 数の変化。 $a = 1.9, \epsilon = 0.186$, ノイズの大きさ $\sigma = 10^{-15}$.

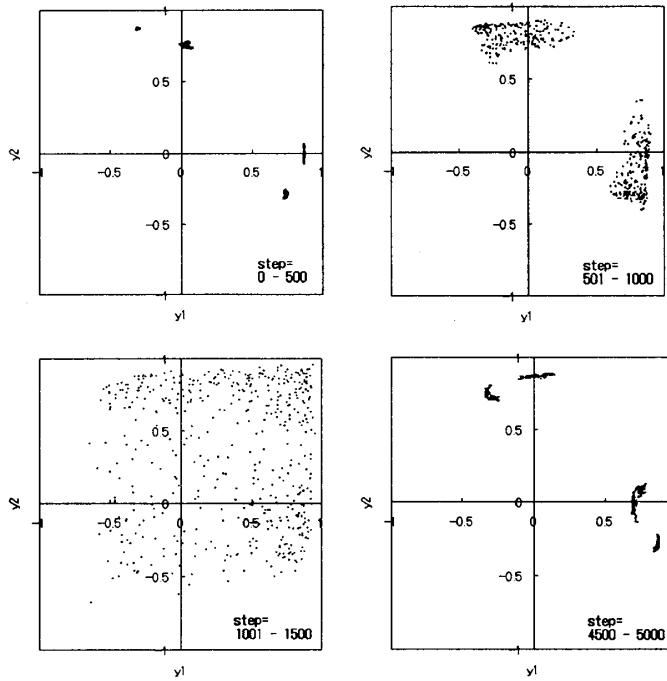


図 7: 重み [322111] 付き 6GCM における軌道の (y_1, y_2) 平面への射影。 $a = 1.9, \varepsilon = 0.186$, ノイズの大きさ $\sigma = 10^{-15}$. (左上) ステップ 0 からステップ 500 まで、(右上) ステップ 500 からステップ 1001 まで、(左下) ステップ 1001 からステップ 1500 まで、(右下) ステップ 4500 からステップ 5000 まで。

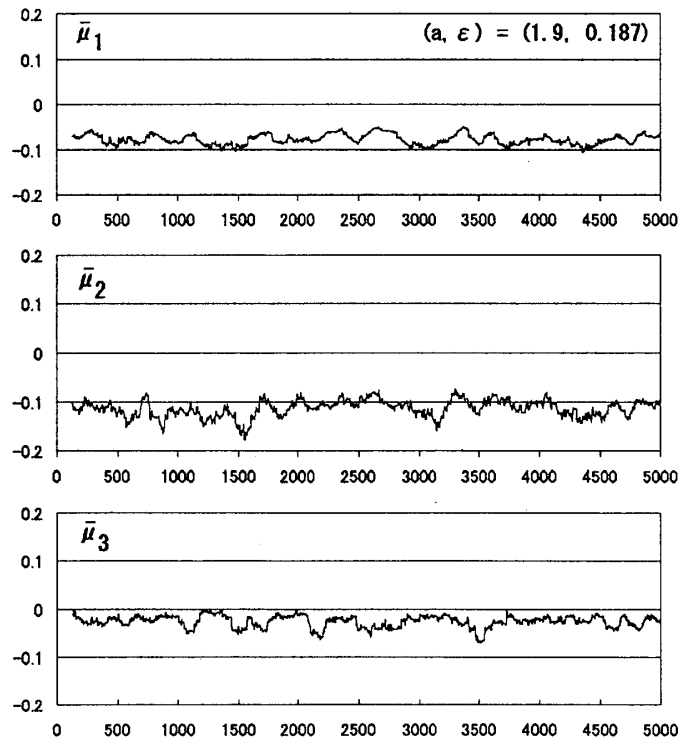


図 8: 重み [322111] 付き 6GCM における局所横断 Lyapunov 数の変化。 $a = 1.9, \varepsilon = 0.187$, ノイズの大きさ $\sigma = 10^{-15}$.

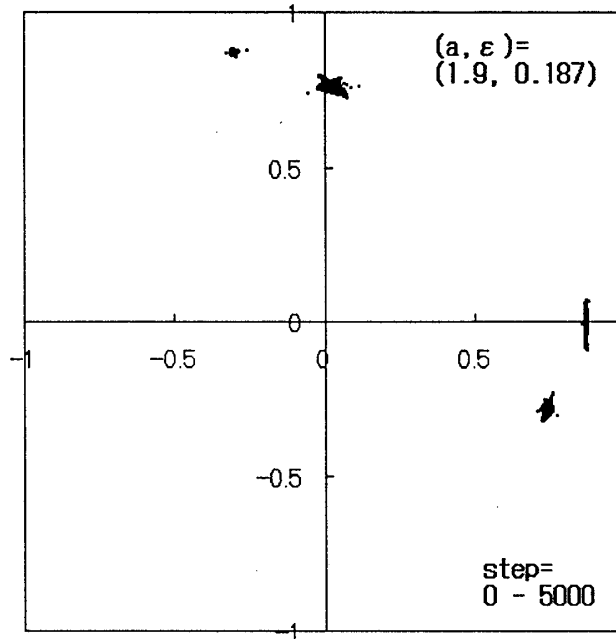


図 9: 重み [322111] 付き 6GCM における軌道の (y_1, y_2) 平面への射影。 $a = 1.9, \varepsilon = 0.187$, ノイズの大きさ $\sigma = 10^{-15}$. ステップ 0 からステップ 5000 まで。

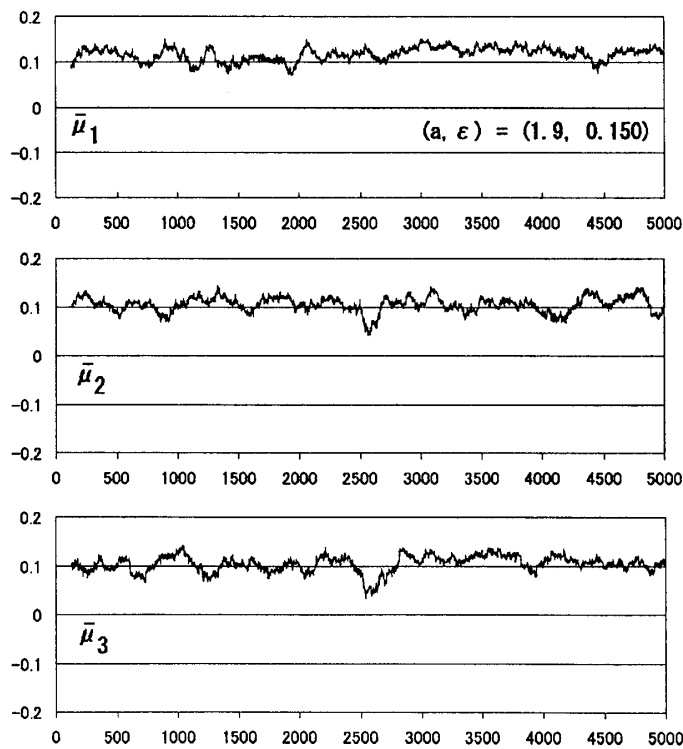


図 10: 重み [322111] 付き 6GCM における局所横断 Lyapunov 数の変化。 $a = 1.9, \varepsilon = 0.150$, ノイズの大きさ $\sigma = 10^{-15}$.

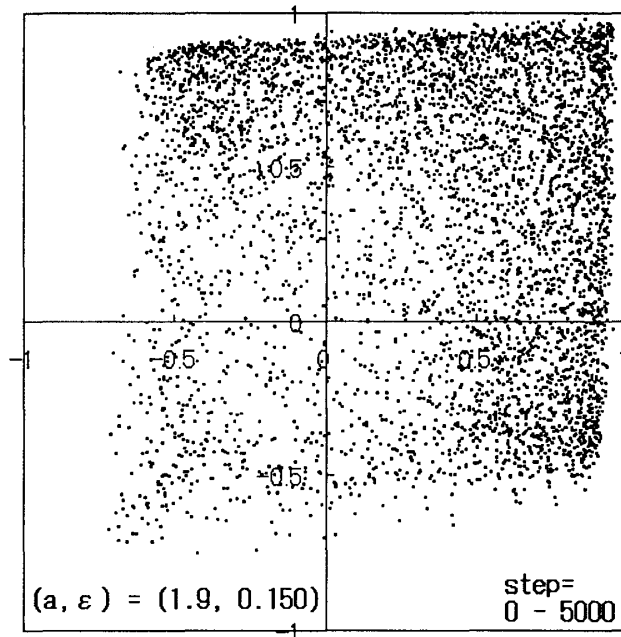


図 11: 重み [322111] 付き 6GCM における軌道の (y_1, y_2) 平面への射影。 $a = 1.9, \varepsilon = 0.150$, ノイズの大きさ $\sigma = 10^{-15}$. ステップ 0 からステップ 5000 まで。

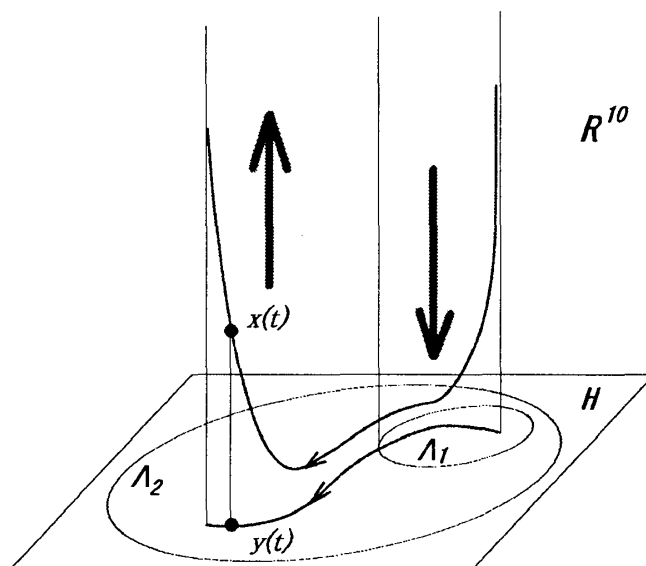


図 12: カオス遍歴のメカニズムの概念図。射影点 y が「擬アトラクタ」 Λ_1 の内部を動くとき、直交補空間方向に安定であるから、 x は H に接近する。射影点 y が「擬アトラクタ」 Λ_1 の出口を見つけ、外に出て Λ_2 の内部を動き回るようになると、直交補空間方向は不安定となり、 x は H から離れる。

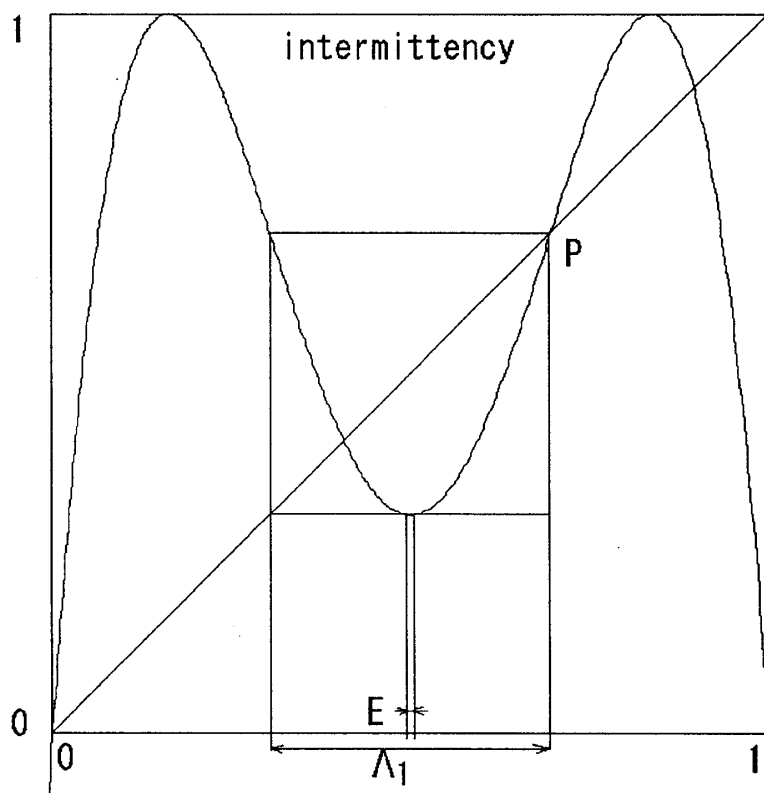


図 13: クライシス誘導型間欠性を示す 1 次元写像の例。 $f(x) = 16(a-1)c(x-0.5)^2(c(x-0.5)^2-0.5) + a$, $c = 1 + 1/\sqrt{1-a}$, $a = 0.3033$