Dynamical Network in Iterated Function Dynamics (関数マップ)

片岡直人*

Meme Media Laboratory (VBL), Faculty of Engineering, Hokkaido University, N12 W6 Sapporo, 060-0812, JAPAN

概 要

自分でルールを決める力学系について考える第一歩として関数マップ (IFD) と呼んでいる力学系を紹介する。その力学系の振舞が、刻々と形を変えるネットワークの運動として捉えられることを示し、その運動について解説する。

1 動機

自分で自分のルールを定める力学系を夢想した場合、すぐさま思いつく種類のものは、パラメータがまた何かの力学系で動いているような力学系である。しかしそうなると、またその力学系のパラメータを駆動するような力学系というものを考えたくなり、際限がない。その上そうしてみたところで、ただに大自由度の力学系へたどりつくことになり、気も滅入る[1]。

ここでは、ある部分の運動が他の部分の運動の、パラメータとして働いているとみなせるような系を考えたい[2]。つまりは勝手な運動をしているものから、運動を支配するものとされるものという分離の生成過程を考察できるようなものを、考えてみたい。関数マップと呼んでいる力学系が、そのような性質を (ある意味で) 持つことを示す。

ここで、関数マップは1次元力学系についての力学系として与えられる。これは無限次元力学系であるが、そこから低次元系として記述できる部分が生成されてくることを見る。またその低次元系が、ルールを決めるルールの、ルールの … という階層を成すことを見、その階層の種類を提示する[3]。

*連絡先：kataoka@aurora.es.hokudai.ac.jp/ 北海道大学 電子科学研究所 電子情報処理部門 情報数理研究室〒 060-0812 札幌市北区北 12 条西 6 丁目。

[1]気の滅入らないものもある。繰り込み。D_∞ 等。しかしこれらはなかなかにお手軽な力学系ではない。

[2]化学反応はただに化学反応であるが、そこに適切な用語を適用することにより、なにやら便利に記述できる化学反応の体系というものが見える。

[3]つまりここで見ているのは、自分が動いているルールを決めるような系ではなく、一歩下がった、それ見ていると、その内部でのルールの決定が階層的に行われているように見えるようなもの、である。

2 モデル

1次元写像 f に対して、次の写像を考える。

$$\Psi_\varepsilon(f) = (1-\varepsilon)id + \varepsilon f$$

ここで、$0 < \varepsilon < 1$ とする。初期関数 f_0 に対し、関数マップ[4]を、次のように定める[5]。

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= \Psi(f_n) \circ f_n \\ &= (1-\varepsilon) f_n + \varepsilon f_n \circ f_n \end{aligned} \tag{1}$$

IFD においては、初期関数 f_0 と、ε を与えてやれば以降の発展は自動的に定まる (合成が定義できるような関数を考える)。

合成が関数空間での操作であることが、この方程式を特徴づけている。この項の存在により、IFD は本質的に無限次元関数方程式となっている[6]。

まず最初に、以下に初期関数と時間発展の例を示す。

初期関数：単調非減少関数

初期関数が単調非減少関数であれば、f_∞ は階段関数に収束する [3]。

初期関数：ロジスティック・マップ

初期関数が一山関数である場合には、合成項により関数のグラフは折り畳まれながら時間発展する。ほとんどのパラメータに対し f_n はシミュレーション上収束するが、その行く先は入り組んだ構造を示す。ある程度非線形性の強い初期関数に対しては、シミュレーションはメッシュサイズ[7]に対する強い依存性を持つ。f_n がシミュレーション上収束しないようなパラメータにおける挙動については、わかっていないことが多いが、無限に小さな構造をつくり続けるであろうことは、[1]。

初期関数：二山関数

初期関数がある程度の構造を持つと、f_n は収束せずに、n に対して周期でうつりかわる運動が見られる。

式 (1) が次の性質を持つことをみるのは容易である。

[4]Iterated Function Dynamics, IFD

[5]見掛けの類似から、Coupled Map Lattice か Open Flow Model か、と言われることもあるけれども、1次元写像から1次元写像への写像であり、本質的に異なる。また、$x_{n+1} = f_n(x_n)$ のような形の時間発展も、考えない。

[6]具体的な「〜のモデル」になかなか到達できないのも、この性質による

[7]合成項の計算のためになんらかの形で区間をメッシュに切ることが必要である (多項式の次数は倍々で増加するために、手におえない)。

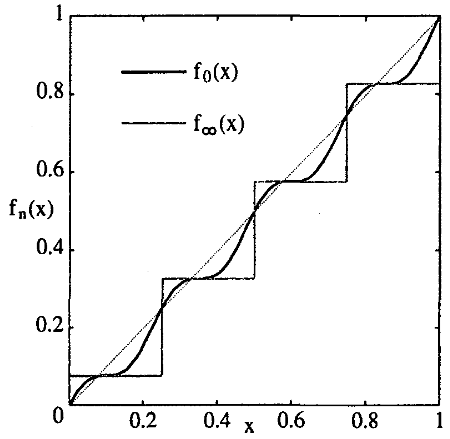

図 1: f_0 が単調非減少関数の場合。f_∞ は階段関数に収束。

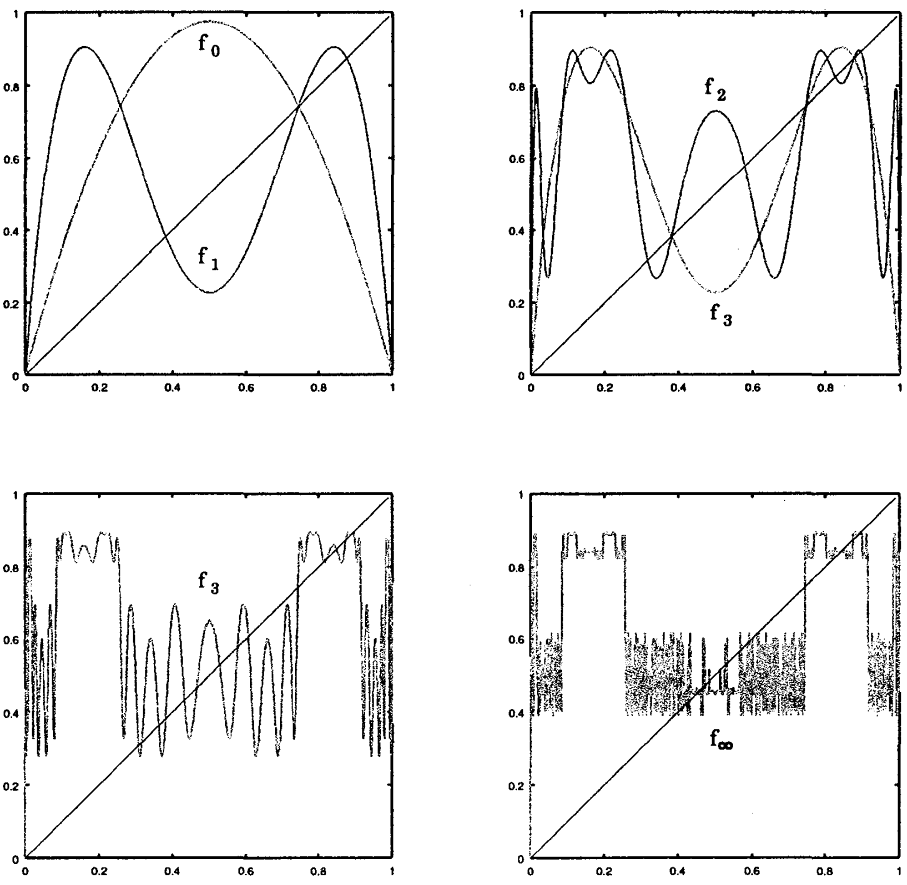

図 2: f_0 がロジスティック・マップの場合の時間発展 ($f_0(x) = 3.9x(1-x)$, $\varepsilon = 0.85$)。左上から、f_0, f_1, f_2, f_3, f_{1000}。シミュレーション上は収束。

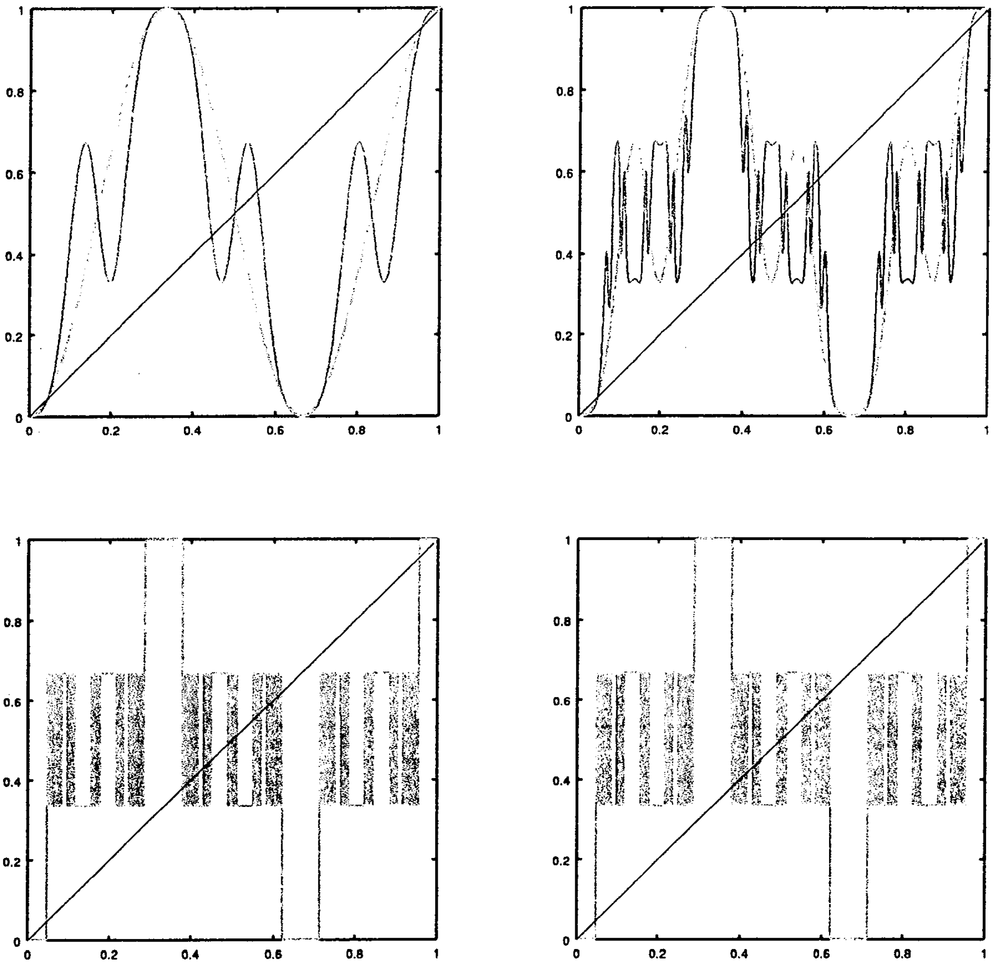

図 3: $f_0(x) = \sin^2(1.5\pi x)$ の場合の時間発展。上段、f_0, f_1, f_2。下段、n に対して周期 2 の関数に収束 (下段の図、左右で振動)。

- $f_n(a) = f_n(b)$ が満たされた場合、$m > n$ に対して $f_m(a) = f_m(b)$ が保たれる。
  「同じ値を取ったものは、同じ運動をする」
- f_n の固定点 q は、$m > n$ に対して、f_m の固定点であり続ける。
  「固定点は n に依存せず固定点である」

この性質より、次がすぐさま帰結する。

- 固定点 q に対し、$f_n(x') = q$ を満たす x' が存在した場合、$m > n$ に対して、$f_m(x') = q$ が保たれる。
  「固定点と同じ値を持つ $f_n(x')$ は、n に依存せず同じ値を保つ」

すなわち、f_n が固定点 x' を持てば $(f_n(x') = x')$、以降の m に対して $f_m(x') = x'$ が保たれる。また、f_n のグラフを描いた場合に、固定点と同じ高さにある点は、n に対して不動である。

f_n のグラフは、合成項の効果によりどんどん折り畳まれ、どんどん固定点を持っていく。グラフの、固定点と同じ高さにある部分は n に対して不動であるため、固定していく点はどんどん増えていくことになる。次の節では、そのような n に対して不動な点がどう形成されていくかを見る。その次の節では、そのように関数の部分が n に対して不動になっていく中、n に対して運動するような部分関数がどのようにありえているのかを見る。

3 固定点まわりの安定性

前節末の性質に加えて、固定点のまわりでの安定性が議論できる [3]。q を固定点としたとき、次図中、掛け網の部分に書くことの出来る連続関数は、$f_\infty(x) = q$ へ収束する。

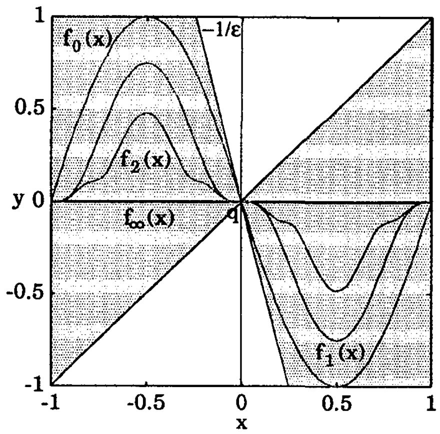

図 4: 描け網内に自由に描いた連続関数は、$n \to \infty$ で、定数関数へ収束する。ここで、$f_0(x) = -\sin(\pi x)$、$\varepsilon = 1/4$。

すなわち、連続関数が固定点まわりにおいて、傾き $-1/\varepsilon$ と 1 の直線に挟まれる領域にあれば、定数関数へと収束する。

この時前節末の性質より、それら定数関数へ収束する部分関数と同じ値を持つ部分関数は、同じく定数関数へと収束することになる。このことから、連続な関数から、区分的に平坦で、n に対し不動であるような部分関数が存在することが理解できる。

次にこの固定点まわりのでの安定性が、関数空間でどのように働いているかの荒い像を得ることを試みる。

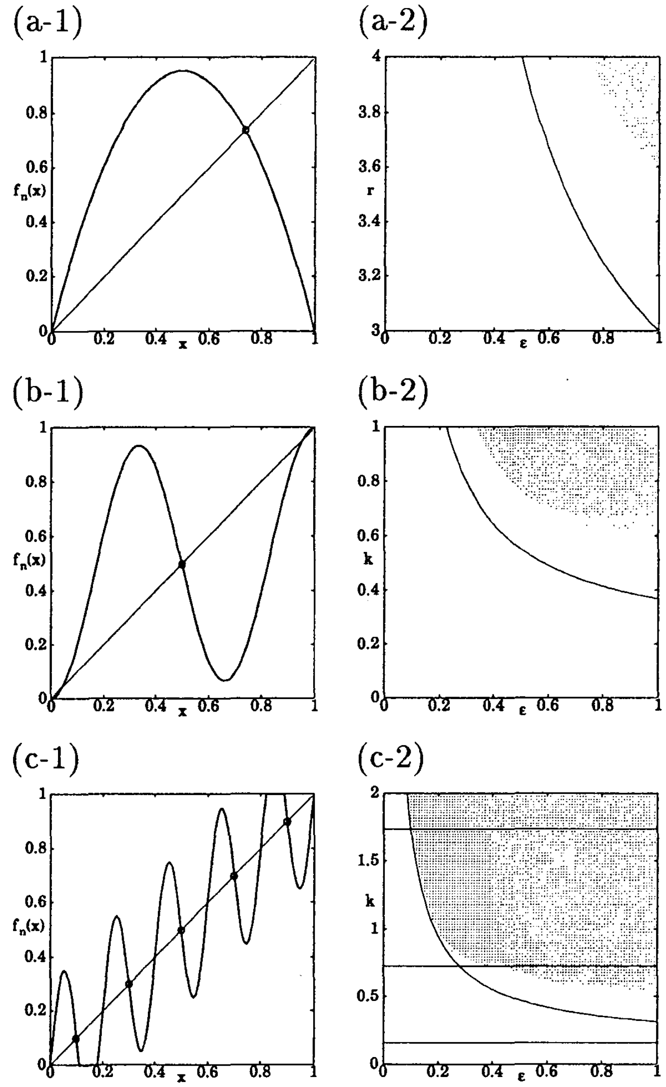

図 5: (·−2) 相図を示す。(·−1) に示された初期条件から始め、1000 ステップ後に f_n が収束していない場合に点を打つことにする。ここで、メッシュサイズは、$M = 6000$. パラメータ空間は、(r, ε) (a) (k, ε) (b,c) で表示されている。横軸は ε、縦軸は非線形パラメータ。図中実線は、(·−1) で黒丸で示された固定点の安定性を示す。実線より下では、その固定点の周りでは、定数関数に収束する。(a-1) $f_0(x) = rx(1-x)$, $r = 3.8$. (a-2) $u(x) = 2 + \frac{1}{\varepsilon}$. (b-1) $f_0(x) = (1-k)x + k\sin^2(\frac{3}{2}\pi x)$, $k = 0.9$. (b-2) $u(x) = \frac{2}{\sqrt{2}+3\pi}(1 + \frac{1}{\varepsilon})$. (c-1) $f_0(x) = x + \frac{k}{m}\sin(2\pi mx)$ (if $f_0(x) < 0, f_0(x) = 0$, if $f_0(x) > 1, f_0(x) = 1$), $m = 5$, $k = 1.5$. (c-2) $u(x) = \frac{1}{2\pi}(1 + \frac{1}{\varepsilon})$.

図5に、いくつかの初期条件と、そこから得られた相図を示す。初期条件、a、b、c は、順に、関数の形が複雑化するように並んでいる。各初期条件には、非線形パラメータの値により、安定／不安定化するような固定点が存在しており、安定／不安定がきりかわる場所が、右図、実線で示されている。実線の下のパラメータ領域では、その固定点近傍で、関数が定数関数となる。相図では、非線形、結合パラメータの値に対し、1000ステップ後に収束しなかった場合について点を打つことにする。すなわち、点の場所に対応するパラメータからシミュレーションを始めた場合、f_n は周期的に振動していることを示す。

この図より、f_n が収束しない領域と、固定点での安定性との間の関係が見てとれる。全ての固定点が安定性の条件を満たす場合には、この3つの例では、周期運動が存在していない[8]。また、初期関数の複雑化に伴い、安定性の境界と、周期運動をするパラメータ領域との間はせばまっていく。このことは、繰り込み的手法によって、IFDの分岐現象が見えるであろうことを示唆する。

これらを示すためには、IFDにおける繰り込みの考察が必要となるが、現時点で成功を見ていない[9]。したがってここでは、IFDの挙動において、固定点まわりの性質が重要である、と指摘するに留める。

4 Generated Map

(1)式で起こっていることを理解するために次の書き換えを行う。

$$\begin{cases} f_{n+1} &= g_n \circ f_n \\ g_n(x) &:= (1-\varepsilon)x + \varepsilon f_n(x). \end{cases}$$

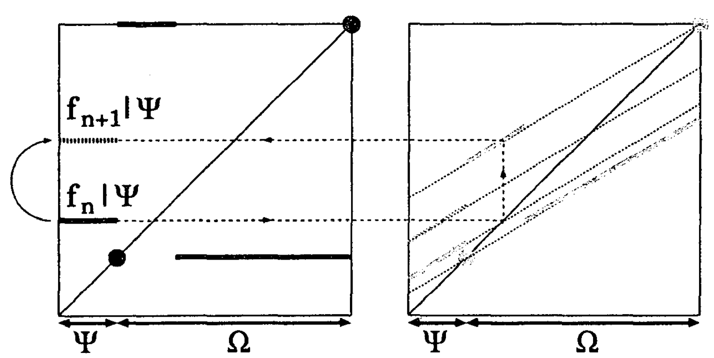

図6: f_n のグラフ(左)と対応する g_n のグラフ(右)。$f_{n+1}|_\Psi$ の値は、$g_n|_\Omega(f_n|_\Psi)$ によって定まる。

[8]これはみかけほど単純なことではない。IFDは関数のダイナミクスであり、このことはある条件下において、少数の固定点が、関数空間での挙動を決めていることを意味する。

[9]ちょっと思うよりははるかに面倒である。合成項により多項式の最高次数が倍々になることもその一因である

ここで g_n を generated map と呼ぶことにする。g_n は、f_n によって定められ、次の f_{n+1} への発展を定めるような関数である。この見方をすると、f_0 が g_0 を定め、それにより f_1 が決まり … といった形で運動を捉えることができる。

f_n が区分的定数関数であれば、g_n は、傾き $0 < 1-\varepsilon < 1$ を持ち、$f_n(x)$ でパラメータづけられた関数とみなすことができる。すなわち、$f_{n+1}(x)$ は、$f_n(y)$ $(y = f_n(x))$ でパラメータづけられたルールにしたがって時間発展すると考えることが可能である。y を $f_n(x)$ の参照先、と呼べば、区分的定数関数の挙動は、参照先が各点で同時に切り替わっていくような動的ネットワークの挙動として見ることができる。

前節では、固定点まわりの安定性により、f_n のグラフが、平坦な部分を増やしていくことを見た。generated map の見方により、f_0 が発展と共に、n に対して動くような平坦な部分をつくることが理解できる。まず、固定点まわり A で平坦な関数により、傾き $1-\varepsilon$ の generated map が張られる。この傾きは 1 より小さいので、A を参照するような複数の $f_n(x)$ の値の差は繰り返しにより、減少する。そのような部分のつくる generated map の傾きは、繰り返しと共に、$1-\varepsilon$ に近付き (もしくは無限大になり、関数は不連続になる)、全体として区分的定数関数となると考えられる。ここで、i) g_n の形により、定数関数も n に対しての運動を持ちうること、ii) $f_n|_A$ が定数関数であるような部分関数の数は、一般に無限個であることに注意が必要である。

5 ネットワークの挙動

前節までで、f_n が、n に対して運動すること、それらが (有限、無限個の) 定数関数間の運動としてとらえられるだろうということを見てきた。ここで、有る程度以上複雑な挙動を見るためには、有る程度以上入り組んだ初期関数が必要とされることが予想される。しかし、有る程度入り組んだ初期関数はそれだけで高次の関数であり、シミュレーションを行うと、そのグラフは急速に折り畳み構造をつくり、追跡が困難となる。そこで以降では初期条件のクラスを制限し、有限個の部分定数関数からなる初期条件について考察することにする。すなわち、区間を重なりのない N 個の区間 I^i に分割し、初期関数として、

$$f_0(x) = \sum_{i=1}^{N} {a^i}_0 1^{I^i}(x). \tag{2}$$

の形のものを採用する。ここで、単関数 1^A は、

$$1^A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A. \end{cases}$$

として与えられる。

各 $f_n|_{I^i}$ の挙動は、各ステップにおいて、$f_n(I^i) \subset I^j$ であれば、$f_n|_{I^j}$ の値によって決定される。ここで各区間 I^i を頂点 i とし、辺を $j \to i$ とした有向グラフを描くこととする[10]。

$S_n(i)$ を、添字から添字への写像とし、$f_n(I^i) \subset I^j$ の時、$S_n(i) = j$ とする。トランジェント後、$\cup_n S_n(i) =: S(i)$ とし、i のつながりうる端点の集合をつくることにする。

添字の集合 λ を考えた時、次の 2 種類の λ が重要である。

- **階層：** $S(\lambda) \subseteq \lambda$ の場合。この時、$f_n|_{I^\lambda}$ の運動は、それらだけで閉じることになる。すなわち、他の部分がどう変わろうが I^λ 上の関数の挙動は影響を受けない。そのような二つの λ^0, λ^1 が存在しかつ、$\lambda^0 \subset \lambda^1$ が成り立っている場合、これら λ は階層的であるということにする。すなわち、部分関数の影響は、一方向へながれ、逆流してくることがないような場合である。IFD においては、この種の階層を無限に入り組んだ形に実現することも可能である。

- **からみあい：** $S(\lambda) = \lambda$ の場合。$S(\lambda)$ が 1 つの要素からなる場合、この条件は、固定点まわりの n に依存しない定数関数として実現されている。要素数が 2 以上の場合、対応するネットワークは、ループ構造を持つことになる。この場合ある部分関数の挙動が、まわりまわってその部分関数自身に帰ってくることが起こる。このループ構造も、IFD の中で自然に見出される。

図 7 に、$N = 30$ とし ${a^i}_0$ をランダムに与えた場合の時間発展と、対応する $S(i)$ のネットワークを示す。

6 まとめ

以上では、非常に限定された初期関数に対して例を示して来たが、ある程度以上入り組んだ構造を持つ初期関数は、次のような性質を持つことが、理論的に、または、シミュレーションを行ってきた実感として言うことができる。

- 合成項の効果により、関数は入り組んだ形に発展していく。
- ε の効果により、関数は、n に依存する定数関数に収束していく。

generated map という見方を採用することにより、関数マップの挙動を、相互にパラメータづけされたルールのネットワークとしてみることができる。そこでは、

- 階層化されたルールの構造が存在しうる [2]。

[10] この矢印の向きは、関数の値を動かした場合に、影響が伝わる向きになっている。

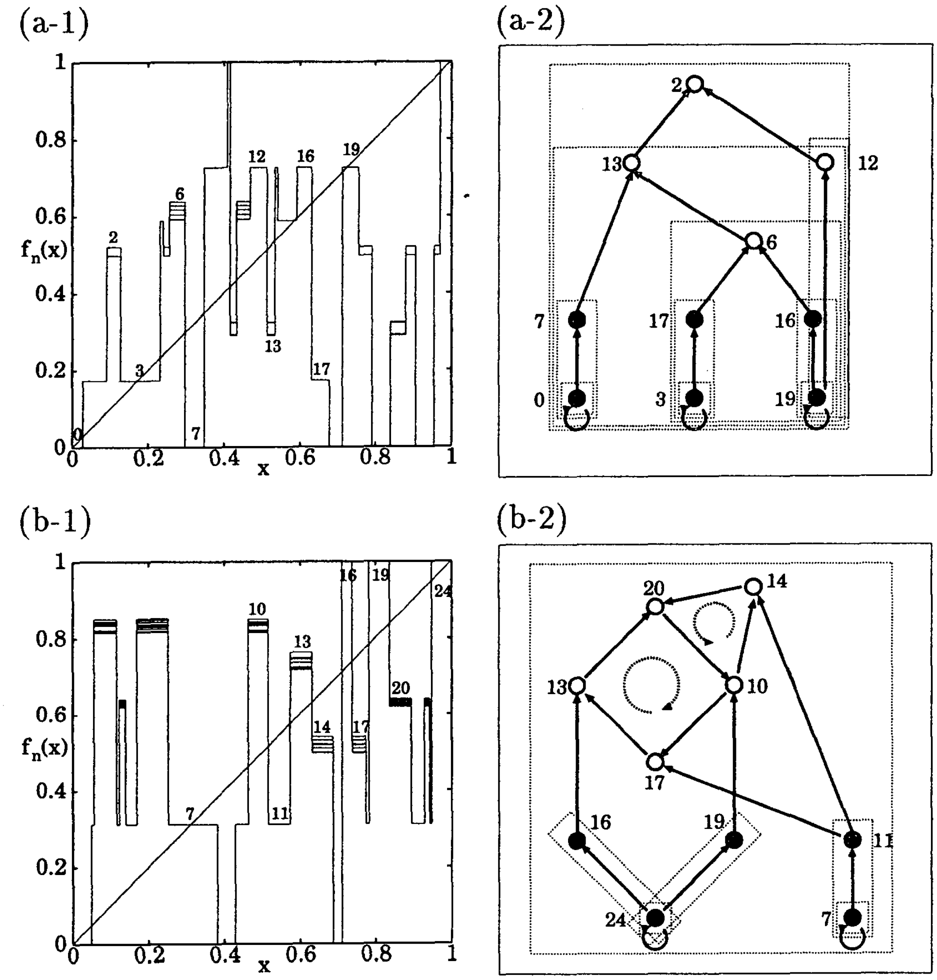

図 7: ランダムに配置された区分的定数関数からの時間発展。特徴的な二つを (a)、(b) とする。ここで、$\varepsilon = 0.1$。(‥1) f_n ($n = 1000 - 1010$) のグラフを重ね書きしたもの。(‥2) 対応するネットワーク。黒丸はその部分関数が n に対して不動であることを示す。破線で囲まれた部分は、$S(\lambda) \subseteq \lambda$ を満たすような λ を示す。(a-1) それぞれの周期は、$f_n|_{I^6}$ が 5、 $f_n|_{I^2} = f_n|_{I^{13}}$ が 10. (b-2) 部分関数、全体の周期は、同じく、145。

- n に対し、それぞれが順番にルールを決めあうような、からみあった構造が存在しうる (図 7 における、ループの存在を参照)。

ことがわかり、シミュレーションからは、そのような挙動が広いクラスとして存在することが予想される。

ネットワークの形状、階層とからみあいの違いは、系にノイズを加えた場合に顕著となる。ここで考えるノイズは、$f_n|_A$ を $f_n|_A + \delta 1^A$ とするような、単関数型のノイズである。このようなノイズをある n で加え、後は従来と同じ発展をさせた場合を考

える。

ネットワークが階層的に組まれている場合、その影響は各階層で振動の位相をずらしながら下流へ伝わっていったきりとなる。

対して、からみあいが存在した場合、そのノイズはループ構造を伝搬しながら、そのループ全体として、新たなアトラクタへとうつりうることを示すことができる。

その際、ノイズ無しの系とノイズ有りの系を比較することにより、ノイズを加えられたループ構造の中に、そのノイズを再生しつづけるような形の、パルス・ジェネレータができていることがわかる。そのような形でのアトラクタの遷移、外からの入力 (ノイズ) を貯め込むような系として、からみあったネットワークは興味深い (詳細については、[4])。

しかし、ここで行われてきたことは、無限自由度系における考察をもとに、低自由度系を設定し、その性質を見ただけ、という見方も可能である (無論、無限自由度系においてもそれらは主要な役割を果たしている)。将来的問題として、この無限自由度系が、無限個の部分関数を生成していく中で、無限個の階層と、無限個のからみあいを形成し、ルールを決めあうような状況を見ることが望まれる。

また、そのような階層、からみあいの構造の中に (ここで考えられた、限定されたものだけではない) ノイズを加えた場合に、それがどのように処理されていくか、という問題も大きく残されている。それらは、端的にここで得られている知見を元に、関数空間での挙動を直接に掴もうという試みであり、困難は言うまでもない。

関数マップは、複雑化と安定性のせめぎあいから、要素 (関数が定数をとる区間) とその運動を決めるネットワークが生成してくるような力学系と見ることができ、自分でルールを決める系、ルールのダイナミクス、といったものを考える際の、ひとつの足掛かりを与えるようなモデルである。

参考文献

[1] N. Kataoka, K. Kaneko "Functional Dynamics I : Articulation Process", Physica D 138 (2000) 225-250.

[2] N. Kataoka, K. Kaneko, "Functional Dynamics II: Syntactic structure", Physica D 149 (2001) 174-196.

[3] Y. Takahashi, N. Kataoka, K. Kaneko and T. Namiki, "Function Dynamics", Japan J.Appl.Math., 18 (2001) 405-423.

[4] N, kataoka, K, Kaneko, "Dynamical Network in Iterated Function Dynamics" ("Entangle Hierarchy in Function Dynamics" is revised), in preparation.