

## History-dependent Phase Slips and Rectification of a few Coupled Oscillators System\*

東京大学大学院総合文化 粟津暁紀

一様外場中で斥力相互作用をする、2つの過減衰振子からなる系(図1)に着目し、特に片方の振子に力( $F_{ex}$ )が作用する場合に現れる静-動的挙動の履歴依存性と、それが実現する「機能」的な性質について議論する。具体的に扱う系は、以下の方程式に従う力学系である。

$$\dot{x}_1 = c_1 c_2 \sin(2\pi(x_1 - x_2)) + c_1 c_p \sin(2\pi x_1) + F_{ex} \quad (1)$$

$$\dot{x}_2 = c_1 c_2 \sin(2\pi(x_2 - x_1)) + c_2 c_p \sin(2\pi x_2) \quad (2)$$

ここで $x_i$ は振子 $i$ の位相( $x_i \dots \text{mod } 1$ )で、振子同士は通り抜けができる。今回 $c_1 = c_p = 1$ ,  $c_2 = c > 0$ の場合を考えていく。

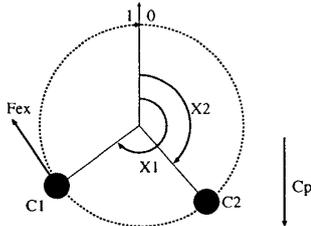


図1: Schematic depiction of the system described by (0.1) and (0.2)

この系は、いわゆる位相振動子系と呼ばれる系群の中の1つである。位相振動子系は様々な現象の、特に振動的挙動の良い現象論モデルとなっており、これまで非平衡開放的な化学反応、生体時計におけるリズム生成や同期、CDW系での位相Slip等が、これを通じて盛んに研究されている。またこの系は、凝縮系間 or 系内の歪みや滑り、つまり摩擦や塑性変形等に対する第0次近似的描像とも見做せ、ソフトマ

\*本研究に対するやや詳しい議論につきましては、A. Awazu, cond-matt/0202472 等を御参照下さい

テリアル系の多様な性質の理解に向けた、一つの出発点にもなると考えられる。

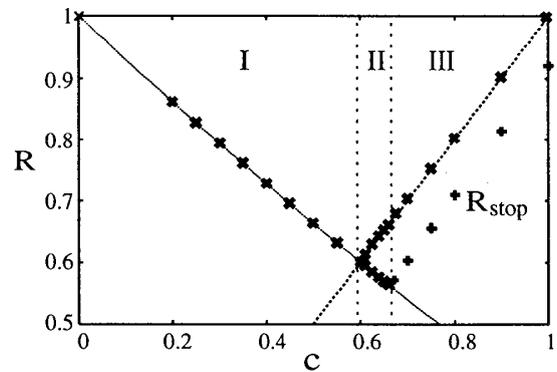


図2: (x) points and dotted lines represent the critical stress  $R$  as a function of  $c$  for two conditions,  $x_1^b > x_2^b$  and  $x_1^b < x_2^b$ , before slippage. The (x) points are the results of our simulation, and dotted lines were obtained analytically. (+) points represent  $R_{stop}$  as a function of  $c$  in case III).

ここから具体的に系の挙動を眺めていく。まず力 $|F_{ex}|$ が小さい場合、2つの振子はエネルギーの低い位置で静止している。そして $|F_{ex}|$ をゆっくり増加させ、ある値 $R$ (臨界応力)を超えさせると、力を受けている振動子(振動子1)は回転(phase slip)を始め、別の振動子(振動子2)はエネルギーの低い所で振動を始める。図2は各 $c$ に対する $R$ をプロットしたものである。ここにはI)cに対し $R$ が単調減少、II)cに対し $R$ が2値、III)cに対し $R$ が単調増加<sup>1</sup>となる3つの領域が存在する。この系では、振動子間相互作用が斥力であるため、 $F_{ex} = 0$ における振動子の位相

<sup>1</sup> 本論では詳しく触れないが領域III)では、 $|F_{ex}|$ の減少に対し、Slipの停止が $|F_{ex}| = R_{stop} < R$ で起こるといふ、ヒステリシスが存在する。

$x_i^b$  間の関係は  $x_1^b > x_2^b$  と  $x_1^b < x_2^b$  との2つがある。図2領域II)に現れる  $R$  の2価性は、以下から分かるようにこの事実と強く関係している。

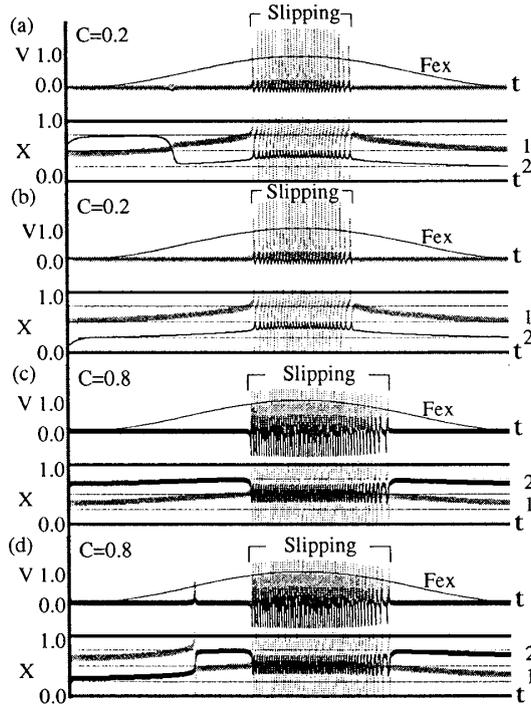


図3: Typical temporal evolutions of the velocity and phase of each oscillator for case with I) in (a) and (b) and case III) in (c) and (d) with slowly changing  $F_{ex}$ . In (a)  $c = 0.2$  and  $x_1^b < x_2^b$ , in (b)  $c = 0.2$  and  $x_1^b > x_2^b$ , in (c)  $c = 0.8$  and  $x_1^b < x_2^b$ , and in (d)  $c = 0.8$  and  $x_1^b > x_2^b$ . The gray curves represent the first oscillator, and the black curves represent the second oscillator. The thickness of each curve is proportional to the value of  $c_i$  for the oscillator to which it corresponds. The thin sinusoidal curve represents  $F_{ex}$ . The numbers at the right of the figures are the oscillator label.

図3、図4は  $F_{ex}$  を  $0 \rightarrow 1 \rightarrow 0$  とゆっくり変化させた時の各振動子の速度と位相の時間発展を示したものであり、図3 (a)(b)は図2の領域I)、(c)(d)は領域III)、図4 (a)(b)は領域II)のものである。(詳細はCaptionにて。) 図3では領域I)、III)共に  $x_i^b$  の関係に依らず、振動子1の回転(Phase Slip)は同じ  $F_{ex}$  で始まっている。つまり  $R$  は一意である。それに対し図4では、(a)  $x_1^b < x_2^b$  の場合の方が(b)  $x_1^b > x_2^b$  の場合よりも、回転を始める  $F_{ex}$  が大きい。つまり  $R$  は、力のかかる方向に依存するのである。またどち

らの場合も  $F_{ex}$  が0に戻ったとき、必ず  $x_1 > x_2$  という静止状態が実現している。この事は、 $F_{ex}$  を再び  $0 \rightarrow 1$  と変化させた場合の  $R$  は、先程のより大きくはならず、またこれと逆方向に力をかけた場合の  $R$  より、必ず小さくなる事を意味している。つまり領域II)では、 $R$  が前回 Slip した方向、つまり「Slipの履歴」に依存し、 $R_{滑った方向} < R_{逆方向}$  という履歴依存関係が存在している。

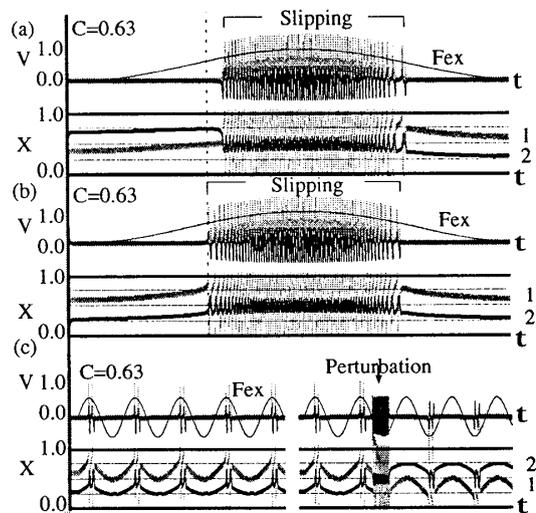


図4: Typical temporal evolutions of the velocity and phase of each oscillator for case II) with a slowly changing  $F_{ex}$  in (a) and (b), and a slowly changing  $F_{ex} = 0.61 \sin(t/T)$  in (c). In (a)  $c = 0.63$  and  $x_1^b < x_2^b$ , and in (b) and (c)  $c = 0.63$  and  $x_1^b > x_2^b$ . Shades and widths of the curves, and the numbers at the right of the figures have the same meanings as in Fig. 3.

領域II)のように  $R_{滑った方向} < R_{逆方向}$  という履歴依存関係が存在する場合、例えば時間的に正負に振動する外力の作用に対し、系は整流(Rectification)を可能にする。図4 (c, 左)にその様子を示す。このような整流は、アクト-ミオシン系などの分子モーターをモデル化したラチェット系で見られる特徴である。しかし従来のラチェット系では、系の非対称性から外力の与え方に対し流れの方向が一意に決まっている。それに対し今回の系での流れは、弱い摂動に対しては安定であるが、十分強い摂動を掛けることで、向きを逆にすることができる(図4 (c, 右))。つまりこの系は、流れの向きを外部から制御できる整流系になっているのである。