P9

粉体流に対するGinzburg-Landau型理論の試み

(都城高専) 若生 潤一, (Univ Complutense) R. Brito,
(Utrecht Univ) M.H. Ernst

1 はじめに

粉粒体は重力などの外力が作用せず、外部からのエネルギー流入が一切無いという条件の下では流体として振る舞い、粉粒体同士の非弾性衝突により各粒子の並進運動エネルギーの総和は時間とともに減少していく。このような過程は「自由冷却過程」と呼ばれる。これまでの研究により、自由冷却過程では流体の一様な状態は不安定であり、系を一様な状態に準備しても、その系は自発的に速度場のパターン（渦）や密度場のパターン（クラスター）を形成するということが知られている [1]。この一様な状態の不安定性は、非弾性剛体球系に対する流体方程式 [2] の線形安定性解析 [1, 3] により良く理解されてきている。本研究の目標は、これらの自発的なパターン形成を Ginzburg–Landau 型理論の枠組みにおいて議論することにある。我々の出発点は線形安定性解析の基礎となった、非弾性剛体球系に対する流体方程式である。我々の目的はこの非線形の流体方程式より Ginzburg–Landau 型の理論を導くことによって、パターン形成において本質的な寄与をする非線形効果を明らかにすることにある [4]。

2 Ginzburg–Landau型理論の導出

現在のところ我々は速度場、密度場の両方のパターン形成を Ginzburg–Landau 型理論に基づいて記述することには成功していない。本研究では密度場のパターン形成が十分に抑圧されるような状況に限定し、速度場のパターン形成のみの理論的記述を議論する。上述の線形安定性解析は、系の大きさが十分に小さい場合、密度場、温度場の非一様性は長時間にわたり小さく留まるということを示唆している。我々は、考察する系の大きさ、あるいは時間領域をこの密度場、温度場の非一様性が小さい領域に限定することにより、速度場のパターン形成のみを議論する。

このような制限のもとで、我々は以下の仮定を導入する：(a) 流体は非圧縮性である、(b) 流体の圧力は一様に留まる。これらの仮定を用いると非弾性剛体球系に対する流体方程式は大幅に簡単化される。対流項を無視した場合、我々はスケールされたせん断率テンソル $\mathsf{S} = \nabla \mathbf{u}/v_0$（$\mathbf{u}$ は速度場、v_0 は熱速度）について次の発展方程式を得る。

$$\begin{aligned} \partial_\tau \mathsf{S} &= \left(\gamma_0 + \mathcal{D}_\perp \nabla^2\right) \mathsf{S} - \frac{2}{d}\mathcal{D}_\perp \overline{|\mathsf{S}|^2}\mathsf{S} \\ &= -V\delta\mathcal{H}[\mathsf{S}]/\delta\mathsf{S}^\dagger, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\mathcal{H}[\mathsf{S}] = -\frac{1}{2}\gamma_0\overline{|\mathsf{S}|^2} + \frac{1}{2}\mathcal{D}_\perp\overline{|\nabla\mathsf{S}|^2} + \frac{1}{2d}\mathcal{D}_\perp\left(\overline{|\mathsf{S}|^2}\right)^2. \tag{2}$$

ここで、τ は一粒子あたりの平均衝突数、$\gamma_0 \propto 1-\alpha^2$（$\alpha$ は反発係数）は非弾性の度合いを特徴付けるパラメタ、$\mathcal{D}_\perp$ はスケールされた渦拡散係数、d、V はそれぞれ系の次元、体

積である。また次のような記法が用いられた: $|A|^2 = \sum_{\alpha\beta} A^2_{\alpha\beta}$; $\overline{A} = \frac{1}{V}\int_V d\mathbf{r}\, A(\mathbf{r})$。(1) 式の右辺第一項は、線形安定性解析の結果と一致する初期の渦の生成及び成長を表す項で、第二項は成長した渦の飽和を与える非線形項である。この非線形項は温度についての流体方程式における粘性発熱項より生じたものである。この発展方程式は、非保存秩序変数 S についての時間依存 Ginzburg-Landau 方程式に似た形を持つ。(2) 式に与えられたポテンシャル（汎）関数が通常の Landau 自由エネルギーと異なるのは、S の 4 次の項が二重の空間積分を含んでいるという点である。このポテンシャル関数は、S のフーリエ成分によって張られる高次元空間において、無限に縮退した最小値を持つ。また、この最小点以外の停留点は全て鞍点である。

(1) は対流項を省いたときに得られた式であったが、定常解が対流項を含んだ非線型発展方程式を満たすことを要求すると、2 次元の場合それらは以下のスケールされた速度場 $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}/v_0$ に相当することが示される。

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}^{st}(x) &= \hat{\mathbf{e}}_y A_0 \cos(k_0 x + \theta_x) \\ \tilde{\mathbf{u}}^{st}(y) &= \hat{\mathbf{e}}_x A_0 \cos(k_0 y + \theta_y). \end{aligned} \tag{3}$$

このとき $\hat{\mathbf{e}}_{y(x)}$ は y 方向（x 方向）の単位ベクトルで、$\theta_{x(y)}$ は任意の定数である。また、$A_0 \equiv \sqrt{d(\gamma_0 - \mathcal{D}_\perp k_0^2)/\mathcal{D}_\perp k_0^2}$ は定数で、$k_0 = 2\pi/L$（L は系の一辺の長さ）は系の最小波数である。

3 MD シミュレーションとの比較

本理論による定常的な速度場のパターンの定量的予測は、2 次元非弾性剛体球の MD シミュレーションの結果と比較され、良い一致が得られている。詳細は [4] 参照。

上述の定常解 (3) は MD シミュレーションにおいて長時間領域における速度場のパターンとして観測されており、反発係数 $\alpha = 0.85$、面積分率 $\phi = 0.4$ という系において、長時間（$\tau = 600$）で評価された A_0 の値 $A_{0\text{simulation}} = 2.78$ は理論の予測値 $A_{0\text{theory}} = 2.51$ と良い一致を見せている。

参考文献

[1] I. Goldhirsch and G. Zanetti, Phys. Rev. Lett. **70**, 1619 (1993); I. Goldhirsch, M-L. Tan and G. Zanetti, J. Scient. Comp. **8**, 1 (1993).

[2] J.T. Jenkins and S.B. Savage, J. Fluid Mech. **130**, 187 (1983); J.T. Jenkins and M.W. Richman, Phys. Fluids **28**, 3485 (1985).

[3] S. McNamara, Phys. Fluids A **5**, 3056 (1993).

[4] J. Wakou, R. Brito and M.H. Ernst, J. Stat. Phys. **107**, 3 (2002).