

自己相似ゆらぎの超普遍性

講師: 藤坂 博一 教授

京都大学大学院 情報学研究科 複雑系科学専攻

京都大学大学院 理学研究科 物理学・宇宙物理学専攻
流体物理学研究室 小笠原 健

2001年8月9~11日に京都大学流体物理学研究室の主催で、高野山の恵光院にて「流体若手夏の学校」が開催されました。このノートは、夏の学校での藤坂博一先生(京大情報)の講義「自己相似ゆらぎの超普遍性」を元にしたものです。大偏差統計理論の初歩から乱流ゆらぎ解析への応用、オンオフ間欠性、そして強相関ゆらぎに共通する普遍性の存在を示唆する内容の講義で、非常に充実したものでした。

この講義ノート作成にあたり、講義に使用したトランスペアレンシーを快く提供して下さいました藤坂先生に感謝致します。

目次

- | | |
|-----------------|------------------------------|
| 1 中心極限定理と大偏差統計 | 2.2.2 普遍性 |
| 1.1 大偏差統計 | 2.2.3 相似性 |
| 1.1.1 コイン投げ | 2.2.4 乱流における間欠性の問題 |
| 1.1.2 時間的粗視量 | 2.2.5 間欠性の古典論1(Log-normal理論) |
| 1.1.3 ゆらぎスペクトル | 2.2.6 間欠性の古典論2(ユニフラクタル理論) |
| 1.2 熱力学形式 | 2.2.7 大偏差統計による間欠性解析 |
| 1.3 まとめ | 2.2.8 マルチフラクタル理論 |
| 2 自己相似性の統計理論 | 2.2.9 まとめ |
| 2.1 フラクタル | 2.3 オンオフ間欠性 |
| 2.1.1 ユニフラクタル | 2.3.1 オンオフ間欠性 |
| 2.1.2 マルチフラクタル | 2.3.2 オンオフ間欠性の統計特性 |
| 2.1.3 熱力学形式との対応 | 2.3.3 強相関領域での自己相似性の解析 |
| 2.2 発達した乱流 | |
| 2.2.1 乱流の自己相似性 | 3 普遍性から超普遍性へ |

1 中心極限定理と大偏差統計

1.1 大偏差統計

1.1.1 コイン投げ

まず簡単な例として、次のようなコイン投げを考える。

表、裏の出る確率はそれぞれ $1/2$ で、表が出ると 1 、裏が出ると 0 という値を対応させると、次のような $0, 1$ の列を得る:

001011011001111...

j 回目の値を u_j と書くと、 n 回投げた時の平均 \bar{u}_n は、

$$\bar{u}_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n u_j \quad (1)$$

である。この \bar{u}_n の分布関数を $P_n(u)$ と書くと、次のように $P_n(u)$ は二項分布で与えられる:

$$P_n(u) = {}_n C_{n_+} \left(\frac{1}{2}\right)^{n_+} \left(\frac{1}{2}\right)^{n_-} \quad (2)$$

但し表が出た回数を n_+ 、裏が出た回数を n_- とした。

ここで $n \gg 1$ となる状況を考えて、 u の平均 $(1/2)$ からのずれが小さいときは中心極限定理により、 $P_n(u)$ は $1/2$ まわりで Gauss 分布で近似できる:

$$P_n(u) \approx \left(\frac{\sqrt{n}}{\pi}\right)^{1/2} \exp\left[-2n\left(u - \frac{1}{2}\right)^2\right] \quad (3)$$

しかし、 u が平均から大きくずれている時には Gauss 分布で近似することはできない。このことは Gauss 分布では $u > 1$ 又は $u < 0$ となる確率が 0 でないことから明らかである。

平均からのずれが大きい (大偏差な) 場合でも、 $n \rightarrow \infty$ の極限において u_j の n 時間での平均の確率分布が

$$P(u) \approx \exp(-S(u)n) \quad (4)$$

という漸近形で書けることを主張するのが大偏差原理である。連続時間の系列の場合は、 $T \rightarrow \infty$ の極限で u の T 時間での平均の確率分布が

$$P(u) \approx \exp(-S(u)T) \quad (5)$$

と書けることである。 $S(u)$ は非負かつ下に凸な u のみの関数であり、 $n \rightarrow \infty$ ($T \rightarrow \infty$) の極限で $P(u)$ に寄与するのは $S(u) = 0$ となる u だけで、この u が平均値 \bar{u} である。

u の \bar{u} からのずれが小さいとき、 $S(u)$ の \bar{u} 近傍での展開のリーディングタームは u の二次の項であり、これは分布が Gauss 分布で近似的に書けることを意味している。この意味において、大偏差原理は u が平均から大きくずれている時にも適用できるように、中心極限定理を拡張したものである。

1.1.2 時間的粗視量

あるランダムな時系列 u_j があつたとき、次のような n 時間での有限時間平均を時間的粗視量と呼ぶ:

$$\bar{u}_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n u_j. \quad (6)$$

$n \rightarrow \infty$ の極限で \bar{u}_n は長時間平均 \bar{u} に一致するが、 n が大きくはあるけれど有限のときには \bar{u}_n は平均を計算する時刻によってゆらぐ量であり、ある分布をもつ。 \bar{u}_n がどのような分布に従うかは、平均をとる時間範囲 n の大きさによって変わる。

相関時間を n_c とすると、 $n \gg n_c$ であるならば平均からの小さなゆらぎに関しては中心極限定理がよい近似となり、 \bar{u}_n はガウス分布に従う。一方で、平均からの大きなゆらぎに関しては大偏差統計で扱わなくてはならない。

1.1.3 ゆらぎスペクトル

式(4),(5)で出てきた $S(u)$ はレート関数(ゆらぎスペクトル)と呼ばれるものであり、 $n \rightarrow \infty$ ($T \rightarrow \infty$) のように平均をとる時間幅を大きくしていったときに、平均値 \bar{u} 以外の u をとる確率がどのように0に漸近していくかを特徴づける関数となっている。

この $S(u)$ の関数形は時系列が与えられなければ決まらない。ゆらぎの時間変化を与える基礎方程式(確率過程の場合はマスター方程式、ランジュバン方程式やフォッカー・プランク方程式)が与えられると、そこから求めることができる。

式(4),(5)のような漸近形が存在することは次のように確認することができる¹。

相関時間が τ の統計的に定常な時系列 u_s があるとしよう。時刻0から t までを $0 \leq s \leq t_1$ 、 $t_1 \leq s \leq t_1 + t_2 (= t)$ の二つの部分に分け(それぞれ領域1,2と呼ぶことにする)、それぞれの部分での平均を考える:

$$\bar{u}_t \equiv \frac{1}{t} \int_0^t u_s ds, \quad \bar{u}_{t_1} \equiv \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} u_s ds, \quad \bar{u}_{t_2} \equiv \frac{1}{t_2} \int_{t_1}^{t_1+t_2} u_s ds. \quad (7)$$

ここで、 $t\bar{u}_t = t_1\bar{u}_{t_1} + t_2\bar{u}_{t_2}$ である。 $t, t_1, t_2 \gg \tau$ のとき、時系列が定常であることと領域1と2の統計的独立性から、

$$P_t(\bar{u}_t) = \int P_{t_1}(\bar{u}_{t_1}) P_{t_2}(\bar{u}_{t_2}) d\bar{u}_{t_1} \quad (8)$$

が成立する²。ここで $P_t(\bar{u}_t)$, $P_{t_1}(\bar{u}_{t_1})$, $P_{t_2}(\bar{u}_{t_2})$ はそれぞれ $0 \leq s \leq t$, $0 \leq s \leq t_1$, $t_1 \leq s \leq t_1 + t_2$ における平均の確率分布関数であるが、統計的独立性によりこれらは同じものである。この式が $P_t(u) \approx \exp(-S(u)t)$ という形の解を持つとすると、

$$\exp(-S(\bar{u}_t)t) \approx \int \exp[-S(\bar{u}_{t_1})t_1 - S(\bar{u}_{t_2})t_2] d\bar{u}_{t_1} \quad (9)$$

と書ける。鞍点法を用いると、

$$\exp(-S(\bar{u}_t)t) \approx \exp(-S(\bar{u}_{t_1}^*)t_1 - S(\bar{u}_{t_2}^*)t_2) \quad (10)$$

¹厳密な証明ではない。

²イコールは分布の形が等しいという意味で使うことにする。

である。ここで、 $\bar{u}_{t_1}^*, \bar{u}_{t_2}^*$ はそれぞれ $(-S(\bar{u}_{t_1})t_1 - S(\bar{u}_{t_2})t_2)$ を最小にする $\bar{u}_{t_1}, \bar{u}_{t_2}$ である。ところで、

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\bar{u}_{t_1}}(-S(\bar{u}_{t_1})t_1 - S(\bar{u}_{t_2})t_2) &= S'(\bar{u}_{t_1})t_1 + \frac{d\bar{u}_{t_2}}{d\bar{u}_{t_1}} \frac{d}{d\bar{u}_{t_2}} S(\bar{u}_{t_2})t_2 \\ &= (S'(\bar{u}_{t_1}) - S'(\bar{u}_{t_2}))t_1 \end{aligned}$$

であるから、 $\bar{u}_{t_1}^*, \bar{u}_{t_2}^*$ は

$$S'(\bar{u}_{t_1}^*) - S'(\bar{u}_{t_2}^*) = 0 \quad (11)$$

を満たさなければならない。従って $\bar{u}_{t_1}^* = \bar{u}_{t_2}^* = \bar{u}_t$ となる。以上のことから、

$$S(\bar{u}_t)t = S(\bar{u}_{t_1}^*)t_1 + S(\bar{u}_{t_2}^*)t_2 \quad (12)$$

が成立するので、 $P_t(u) \approx \exp(-S(u)t)$ は確かに式 (8) の解になっていることがわかる。

上でも使われているように、大偏差原理は十分長い時間で見たときの粗視量の間の統計的独立性を根拠にしている。従って、無限に長い相関を持つ系では $\exp(-S(u)t)$ という漸近形は存在しない。有限な長さの相関を持つ系 (弱相関) の場合、その相関長よりも十分長い間隔での粗視量に対して大偏差原理が成り立つ³。

ここで、 q を可変な実数として時系列の母関数 $Z_q(t)$ を次のように定義する：

$$Z_q(t) \equiv \left\langle \exp \left(q \int_0^t u_s ds \right) \right\rangle. \quad (13)$$

$\int_0^t u_s ds$ は平均的に t に比例するので、 t が十分大きければ

$$Z_q(t) \approx e^{\phi(q)t}, \quad \phi(q) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log Z_q(t) \quad (14)$$

と書けると考えられる。この $\phi(q)$ と $S(u)$ の関係を調べるために、式 (13) を次のように変形する：

$$Z_q(t) = \left\langle \exp \left[qt \left(\frac{1}{t} \int_0^t u_s ds \right) \right] \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} P_t(u) e^{qt u} du. \quad (15)$$

ここで $P_t(u) \approx \exp(-S(u)t)$ を代入して鞍点法を用いると、

$$Z_q(t) \approx \int_{-\infty}^{\infty} \exp[(-S(u) + qu)t] du \Rightarrow \phi(q) = -\min_u [S(u) - qu] \quad (16)$$

となり、 $\phi(q)$ と $S(u)$ はルジャンドル変換で結ばれていることがわかる。 $S(u) - qu$ を最小にする u を $u(q)$ と書くとすると、

$$S'(u(q)) = q, \quad \phi(q) = -S(u(q)) + qu(q) \quad (17)$$

が成り立つ。この第2式を q で微分すると、式 (14) を用いて

$$\phi'(q) = u(q) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle \bar{u}_t e^{qt \bar{u}_t} \rangle}{Z_q(t)} \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \langle \bar{u}_t; q \rangle_t, \quad \bar{u}_t = \frac{1}{t} \int_0^t u_s ds \quad (18)$$

となる。上式の最後で重みつき平均 $\langle \cdot; q \rangle_t$ を定義した。この平均は $q > 0$ ならば大きな平均を与える過程を、 $q < 0$ ならば小さな平均を与える過程を重く見積る。普通の平均は $q = 0$ に対応する。従って、 q はどのような運動状態を見るかを選択する指標となっており、選択パラメータと呼ばれる。

³強相関な場合でも後の述べる乱流やオンオフ間欠性の場合のように使えることがある。

平衡統計熱力学	時系列	マルチフラクタル	乱流
N (粒子数)	T (時間幅)	$\log(1/l)$	$\log(1/r)$
$\beta (= 1/k_B T)$	q	$1 - q$	q
$\int \Omega_N(E) e^{-\beta E} dE$ (分配関数)	$\langle e^{qT\bar{u}_T} \rangle$ $(\bar{u}_T = T^{-1} \int_0^T u\{s\} ds)$	$\sum_i p_i^q$ $(\equiv \langle (p_i^{-1})^{1-q} \rangle)$	$\langle (\Delta u(r))^q \rangle$
F (Gibbs 自由エネルギー)	$\phi(q)/q$	$D(q)$	$-\zeta(q)/q$
$\frac{d}{d\beta}(\beta F) \equiv u$ (内部エネルギー)	$\frac{d}{dq}[q \frac{\phi(q)}{q}]$ $(\equiv u(q))$	$\frac{d}{d(1-q)}[(1-q)D(q)]$ $(\equiv \alpha)$	$\frac{d}{dq}(q \frac{-\zeta(q)}{q})$ $(\equiv -h)$
$-\frac{df}{d\beta^{-1}} \equiv S(u) \geq 0$ (エントロピー / k_B)	$-\frac{d}{dq^{-1}}[\phi(q)/q]$ $(\equiv S(u) \geq 0)$	$-\frac{dD(q)}{d(1-q)^{-1}}$ $(\equiv \alpha - f(\alpha) \geq 0)$	$-\frac{d}{dq^{-1}}(-\zeta(q)/q)$ $(\equiv 3 - D(h) \geq 0)$
$\frac{S(u)}{du} = \beta$	$\frac{dS(u)}{du} = q$	$\frac{d(\alpha - f(\alpha))}{d\alpha} = 1 - q$	$\frac{d(3 - D(h))}{d(-h)} = q$
$F = u - \frac{S(u)}{\beta}$	$\frac{\phi(q)}{q} = u - \frac{S(u)}{q}$	$D(q) = \alpha - \frac{\alpha - f(\alpha)}{1 - q}$	$\frac{-\zeta(q)}{q} = -h - \frac{3 - D(h)}{q}$

表 1: 熱力学形式との比較

1.2 熱力学形式

ここまででパラメータとして q 、物理量として $\phi(q), S(u), u(q)$ が出てきたが、これらは実は一つのセットを作っており、それらの間の関係は熱力学と形式的に対応している (図 1)。このような形式のことを熱力学形式と言う。

このような形式的対応が得られる原因は、基本的にはランダムな変数の統計的独立性にある。時系列の場合は弱相関ゆらぎを足し合わせたものを考えているわけだが、足し合わせる部分時系列は部分系ではあるけれどゆらぎの相関時間に比べると十分大きいものを考えている。ここから熱力学の部分系を足しあわせたものを考えることとの繋がりが出てくるのである。

ただ、熱力学の場合の温度 β に対応するパラメータとして大偏差統計では q が出てくるが、この q は u の値の大きいところを見るか、小さいところを見るかを選ぶ選択パラメータであり、熱力学の温度ほどの物理的意味はない。

1.3 まとめ

平均からのずれが大きい (大偏差な) 現象を捉えるには、1 次や 2 次のモーメントによる時系列の特徴付けでは不十分である。しかし、さらに高次のモーメントを見る方法で精度を上げていくと、無限個のモーメントを見ることになり、非常にわかりにくくなってしまふ。

やはり何か一つの関数で時系列を特徴づける方法がわかりやすく、そのような方法の一つとして大偏差統計がある。時系列の違いはゆらぎスペクトル $S(u)$ によって表現され、この $S(u)$ の中にはあらゆる次数のモーメントに関する情報が入っている (しかしどういう形

で入っているかはわからない)。この $S(u)$ を使うことで、(平均からのゆらぎが小さい部分も大きい部分も) 時系列の特徴を一目で見ることができるようになるわけである。

2 自己相似性の統計理論

2.1 フラクタル

2.1.1 ユニフラクタル

図1のような d 次元空間に分布する点集合を考える。この空間を間隔 l の格子に切ったとき、点が入っている領域 (セル) の個数を N_l と書く。この N_l が

$$N_l \propto l^{-D} \quad (19)$$

となっている場合、この点集合のフラクタル次元は D である⁴と言う。もし集合が線や面の場合、普通に言う次元と同じようにそれぞれ $D = 1, 2$ となり、フラクタル次元は普通の次元の拡張となっている。このようなフラクタル集合の例としては、海岸線、結晶成長、粘菌が作るパターン、星の分布などがある。

点集合の次元が非整数になっている場合、その分布が一様であれば、集合のどの部分を取ってきてもフラクタル次元 D で特徴づけることができるが、分布が一様でない場合、つまり点が密な部分と疎な部分がある場合は、フラクタル次元を拡張する必要がある。この拡張が次に述べるマルチフラクタルである。

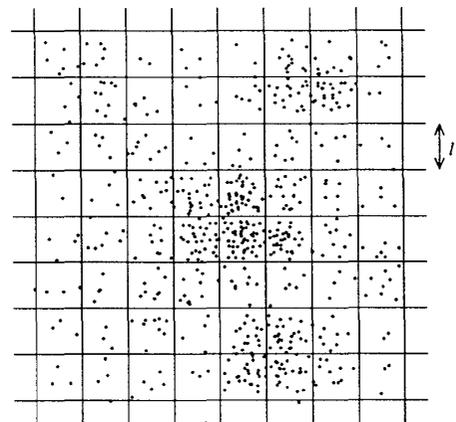


図 1: d 次元空間に分布した点集合

2.1.2 マルチフラクタル

再び図1のような d 次元空間に分布する点集合を考え、この空間を間隔 l の格子に切って、セルに番号をつける。 j 番目のセルに点が入る確率を p_j とする。 l を小さくしたときに p_j が

$$p_j \propto l^{\alpha_j} \quad (20)$$

と変化するとして、 j 番目のセルに α_j を対応させる。この α_j は点が j 番目のセルに入る確率を見積る量で、特異性指数と呼ばれる。これは j 番目のセルの局所的フラクタル次元を表す量と考えることができる。

分布の非一様性は、この α の値が場所によって異なることで表現される。特異性指数が α であるセルの個数 $N_l(\alpha)$ が

$$N_l(\alpha) \equiv \sum_j \delta(\alpha_j - \alpha) \propto l^{-f(\alpha)} \quad (21)$$

⁴このようにして定義された D のことを Box counting dimension と言う。

と書けると仮定する。ここで、 $f(\alpha)$ は特異性指数 α をもつ部分領域のフラクタル次元である。従って $f(\alpha) > 0$ でなければならない。この $f(\alpha)$ のことを特異性スペクトルと呼び、 α が分布を持つとき点集合はマルチフラクタルであると言う。

ここで、次のような関数 $Z_l(q)$ を定義する:

$$Z_l(q) = \sum_j p_j^q. \quad (22)$$

$Z_l(q)$ が $l \rightarrow 0$ で $Z_l(q) \propto l^{\tau(q)}$ と書けると仮定すると、式(21)から

$$Z_l(q) \approx \sum_j l^{q\alpha_j} = \int l^{q\alpha} N_l(\alpha) d\alpha \approx \int_0^\infty l^{q\alpha - f(\alpha)} d\alpha \quad (23)$$

と変形できるので、この積分を鞍点法を用いて評価すると、

$$\tau(q) = \min_\alpha [q\alpha - f(\alpha)] \quad (24)$$

となる。また、マルチフラクタル次元 $D(q)$ を

$$D(q) = \frac{\tau(q)}{q-1} \quad (25)$$

で定義すると、 $D(q)$ は q の減少関数となる。

2.1.3 熱力学形式との対応

マルチフラクタルを特徴づける $f(\alpha)$, $Z_l(q)$, $D(q)$ は、表1のような対応づけをすることで、時系列解析の場合と同様に熱力学形式と対応がつく。従って、熱力学と大偏差統計とマルチフラクタルは形式的には同じものと見ることができる。

ここで重要なことは、大偏差統計やマルチフラクタルは「解析の枠組」である、ということである。何か現象があったときに、それをマルチフラクタル的な解析や大偏差的な解析をすると全く新しいことが分かるということではなくて、そういう見方で見ると現象の違った側面を見ることができるのである。

$f(\alpha)$ がどんな形をとるかとか、 $S(u)$ や $\phi(q)$ がどんな形を取るかというのは見る現象に(システムに)依っているものであり、時間変動の場合は力学方程式、あるいはランジュバン方程式が決まらないことには形は決まらない。これは統計力学でも同じで、枠組は非常に一般的だけれども、実際に自由エネルギーがどうなるか、というのはどういうシステムを考えるかによって変わってしまう。そういう意味で、大偏差統計やマルチフラクタル解析は「枠組」なのである。

2.2 発達した乱流

2.2.1 乱流の自己相似性

ここでは3次元 Navier-Stokes 方程式に従う流体の乱流を考える。

3次元 Navier-Stokes 乱流では、ある大きなスケール L で (運動) エネルギーが注入されると、非線型項の効果で徐々に小さなスケールへとエネルギーが伝達していき、最後には粘性が卓越するスケールで熱に変わると考えられている。このマクロスケールからミクロスケールへのエネルギーの流れのことをエネルギーカスケードと言う。

大きなスケールから、一つ小さなスケール、もう一つ小さなスケールと色々なスケールがあるわけだが、これらのスケール間のエネルギーの流れについての最も簡単な仮定は、各スケールでエネルギーの流れ方は全て同じであるというものである。この仮定を解析の出発点にする。

このスケール間 (波数間) エネルギー輸送率が波数に依らないという仮定と、乱流のミクロスケールでの相似性ことから後で述べる Kolmogorov の 1941 年の理論が導かれる。

ここでは、非平衡でありながら定常な状態があるということが大前提になっている。つまりマクロスケールでのエネルギー注入とミクロスケールでのエネルギー散逸がバランスしている非平衡定常状態があると仮定している。

乱流のエネルギーカスケード描像というのは、概念的には大きな渦が小さな渦に壊れるというプロセスが自己相似的に繰り返されているものと考えられている (図 2)。つまり、どのスケールを拡大しても、元と同じような運動が見られるということを仮定していて、このことをカスケードプロセスの自己相似性と言う。

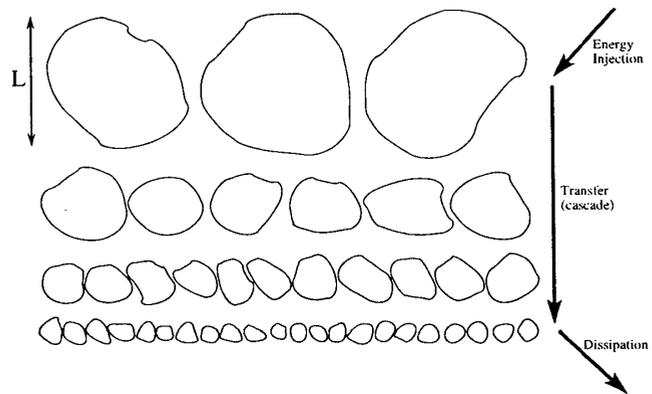


図 2: エネルギーカスケード描像

2.2.2 普遍性

ここで普遍性と相似性という言葉について説明しておく。

普遍性の例の一つとして上げられるものに、相転移での臨界現象がある。相転移の臨界点近傍では、比熱や帯磁率や液体の場合だと圧縮率などの発散してしまう量があるのだが、そういう臨界点での異常性を表す指標に $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ という 6 つの臨界指数がある。例えば比熱 C の場合だと、 T を温度、 T_c を臨界温度として $C \propto |T - T_c|^{-\alpha}$ のようになる。これらの臨界指数が、異なるシステムでも同じ値を取るということを臨界現象の普遍性と呼ぶ。しかしここで注意しなくてはならないのは、臨界現象を示すどの系でも同じ臨界指数を持つわけではなくて、臨界現象はいくつかのクラスに分けることができ、同じクラスに属するシステムでは同じ臨界指数を取る。

このクラスのことを「普遍性クラス (Universality Class)」と言う。このように現象を普遍性クラスに分けることができるというのは非常に重要な考え方である。

臨界現象の普遍性クラスは、空間次元や秩序変数の成分数、相互作用のタイプなどによって分かっている。例えば、中性の気体-液体転移と、常磁性-強磁性転移のイジングモデルは同じ普遍性クラスに属している。つまり同じ臨界指数を持つ。

乱流に話を戻すと、乱流のエネルギースペクトルは Kolmogorov スペクトル $E(k) \propto k^{-5/3}$ を取ると考えられているが(正確には少しずれる)、このエネルギースペクトルの波数依存性は乱流がどのようなメカニズムで生成されたかということに依らない。

乱流がどのように生成されたかというのはマクロスケールの情報なので、エネルギースペクトルがこれらに依らないということは、小さなスケールではマクロスケールでのエネルギー注入や境界条件がどんなものであれ同じ状態(普遍的状态)に達していることを示唆している。このことを指して乱流の普遍性という言葉を使う。

2.2.3 相似性

相似性も例を上げて説明しておく。

まず力学的相似性だが、例えばニュートンの運動方程式で二体ポテンシャルが冪的な場合、つまり

$$U \approx |r_i - r_j|^k \quad (26)$$

となっている場合、周期運動だと運動方程式の次元解析から

$$T^2 L^{k-2} = \text{const.}, \quad E = L^k \quad (27)$$

という関係が運動の周期 T 、スケール L 、エネルギー E の間に成り立つ。このような相似性のことを力学的相似性と言う⁵。

臨界現象での相似性について上向きと下向きの二つの状態をとるスピン系を例にとって説明する。常磁性状態(高温)のときは上向きと下向きのスピンは同程度に混ざっており、強磁性状態(低温)のときは上向きと下向きのどちらかの状態が多くなってスピンの揃った状態になっている。臨界点では、上向きと下向きの混ざり具合は同じくらいになっているのだが、系のどの部分を拡大しても混ざり方のパターンが全体と同じようなものになる。つまりスピンの配置が自己相似的になっており、このことを臨界現象の相似性と言う。

では流体力学の相似性だが、Euler 方程式

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla P \quad (28)$$

は次のようなスケール変換に対して不変である。

$$r' = \lambda r, \quad u_{r'} = \lambda^{-z} u_r, \quad t' = \lambda^{1+z} t \quad (29)$$

λ の値は任意に取ってよい。ここで重要な量として z が出てくるが、これもどんな値でもよい。後に述べる K41 では $z = \frac{1}{3}$ と決めることに対応している。

相似性というのは以上のようなものを考えているのだが、以後相似性があるようなゆらぎをどのように定式化すればよいか、ということが問題になってくる。相似性があるということは、相関が非常に強いということである。実際に乱流は非常に強い相関を持つ系であり、臨界現象の場合は臨界点において相関長(例えばあるスピンの上を向いているという情報が伝わる距離)は無窮大になっている。

乱流の場合は、エネルギースペクトルが冪則を持つということ自体が相関が非常に強いということを意味している。

⁵詳しくは Landau の教科書 1 巻参照。

2.2.4 乱流における間欠性の問題

ここからは3次元の一様等方乱流⁶を考える。基礎方程式は非圧縮 Navier-Stokes 方程式である:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0. \end{aligned} \quad (30)$$

ここで、 $\mathbf{u}, P, \mathbf{f}$ はそれぞれ時刻 t 、位置 \mathbf{x} での速度、圧力、外力を表し、 ρ, ν はそれぞれ流体の密度、動粘性率を表すものとする。この方程式は、特徴的長さ L と特徴的速さ U を使って無次元化することで、パラメータは粘性項の係数として出てくるレイノルズ数 Re だけに行うことができる。

$$Re = \frac{UL}{\nu} \quad (31)$$

このレイノルズ数 Re は移流項と粘性項の大きさの比になっている。一般に乱流は Re が大きい所で見られる現象で、ここでは $Re \gg 1$ という十分に発達した乱流を考える。

エネルギー注入スケールを先程と同じように L とおく。このスケールでのエネルギーを U^2 とすると、空間スケール L での時間スケールは L/U となり、次元解析からエネルギー輸送率は U^3/L くらいと見積ることができる。

このエネルギーが熱に変わるスケール (エネルギー散逸スケール) を η とする。これは Kolmogorov 長さスケールと言われているもので、平均エネルギー散逸率 $\bar{\epsilon}$ と粘性 ν とを使って次元解析することで得られるものである。エネルギー散逸率は考えている領域 Ω の体積を V として、

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{V} \int_{\Omega} \epsilon(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \epsilon(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \nu \sum_{i,j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 \quad (32)$$

によって定義され、これと ν から速度、長さ、時間の次元を作ると

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\bar{\epsilon}} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad v_{\eta} = (\bar{\epsilon} \nu)^{\frac{1}{4}}, \quad \tau_{\eta} = \left(\frac{\nu}{\bar{\epsilon}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (33)$$

となる。これらはそれぞれ Kolmogorov 長さ、速度、時間と呼ばれる。このスケールでのレイノルズ数を計算すると、

$$Re_{\eta} = \frac{v_{\eta} \eta}{\nu} = 1 \quad (34)$$

であり、Navier-Stokes 方程式の粘性項と非線形項 (慣性項) がちょうど釣り合っているスケールであることがわかる。このスケールよりも小さな所では粘性が卓越することから運動工

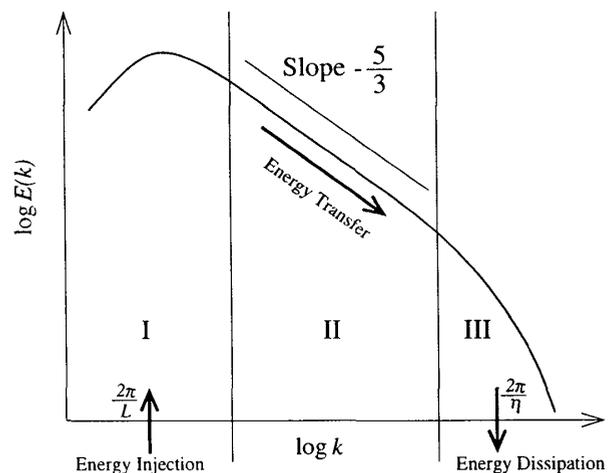


図 3: 乱流運動のスケール。乱流の運動は大きく3つの領域に分けることができ、I をエネルギー保持領域、II を慣性領域、III をエネルギー散逸領域と言う。

⁶統計的に一様等方かつ定常な乱流

エネルギーの大部分が熱に変わってしまうので、 η, ν, τ_η は乱流における最も小さなスケールと考えることができる。

このように、乱流場における特徴的長さスケールには η と L の二つがある。乱流の運動を考えたとき、スケール L の領域を、全体の殆んどのエネルギーを担っていることからエネルギー保持領域と呼び、スケール η の領域を、エネルギーが散逸するスケールであることからエネルギー散逸領域と呼ぶ。 $Re \gg 1$ であればこの二つのスケールはかなりよく分離していると考えられるので、この二つのスケールの間で $L \gg r \gg \eta$ となる領域があるが、この領域では粘性の効果が小さく、乱流は慣性項 (移流項) だけで駆動されていると考えられるので慣性領域と呼ぶ (図 3)。

単位質量あたりのエネルギー $\langle |\mathbf{u}|^2 \rangle$ のフーリエ変換をエネルギースペクトル $E(k)$ と呼ぶ:

$$E(k) = \int_{|\mathbf{k}|=k} d\mathbf{k} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \langle u_i(\mathbf{x}) u_i(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle d\mathbf{r}. \quad (35)$$

この $E(k)$ の波数依存性については、先程も述べたように、 Re が非常に大きいとあるスケールより小さいところで $E(k)$ の形は乱流の生成メカニズムに依らずに、ある冪分布になると考えられている。

ここで 1941 年に Kolmogorov が提出した 3次元 Navier-Stokes 乱流についての理論 (K41) を簡単に説明しておく。K41 は次の 3つの仮説に基づいている。

局所等方性仮説 十分 Re が大きければ、小さなスケールにおいて場は統計的に一様かつ等方である⁷。

第一相似性仮説 局所一様等方領域において、速度場の N 点連結分布関数⁸はエネルギー散逸率 $\bar{\epsilon}$ と粘性 ν にしか依らない。

第二相似性仮説 局所一様等方領域で η よりも十分大きいスケール (慣性領域) においては、速度場の N 点連結分布関数はエネルギー散逸率 $\bar{\epsilon}$ にしか依らない。

これらの仮説の帰結として、慣性領域における速度場の p 次構造関数 $\langle |\delta \mathbf{u}(\mathbf{r})|^p \rangle$ ($\delta \mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \mathbf{u}(\mathbf{x})$) とエネルギースペクトル $E(k)$ は次のようになることが導かれる:

$$\langle |\delta \mathbf{u}(\mathbf{r})|^p \rangle \propto r^{\zeta_p}, \quad \zeta_p = \frac{p}{3}, \quad (36)$$

$$E(k) \propto k^{-5/3}. \quad (37)$$

これが有名な Kolmogorov の $k^{-5/3}$ スペクトルである。

K41 では、エネルギー散逸率は一様に $\bar{\epsilon}$ であるとして考えているが、ランダウが指摘したように小さなスケールではエネルギー散逸率は本来揺らいでいる量なので、本当はこのゆらぎを考慮しなくてはならないはずである。エネルギー散逸率のゆらぎを取り込むと、式 (37) の指数は K41 からはずれると予想される。

そこで、エネルギー散逸率 ϵ のゆらぎをどのように理論に取り込むかということが問題になる⁹。実際に実験やシミュレーションで ϵ のゆらぎを調べると、間欠的に極めて大きな値を示す様子が見られる。この間欠性は乱流の特徴の一つであり、 ϵ のゆらぎの問題は間欠性の問題と呼ばれる。

⁷この領域のことを局所一様等方領域と呼ぶ。

⁸ N 個の点を考えたときに、それぞれの位置 \mathbf{x}_n で時刻 t_n に速度が U_n である確率分布関数。

⁹実は、統計物理の人が乱流に興味を持ったのはこのことと関係している。ウィルソンの繰り込み群の理論

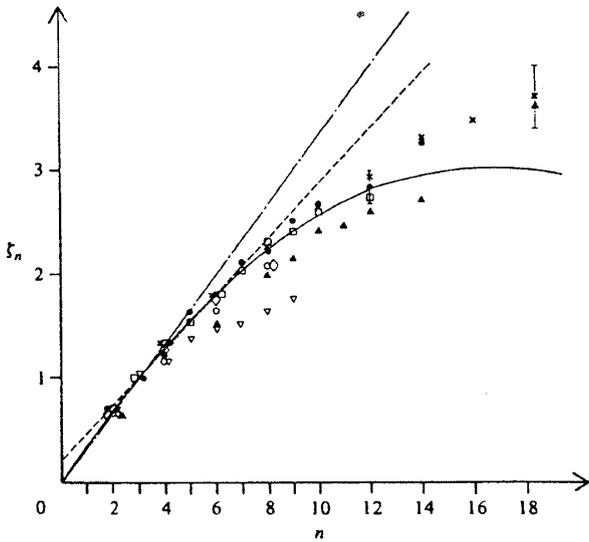


図 4: 実験で測定された ζ_n . 実線は Log-Normal 理論、破線は β モデル、一点鎖線は K41 による予想。(文献 [8] より転載)

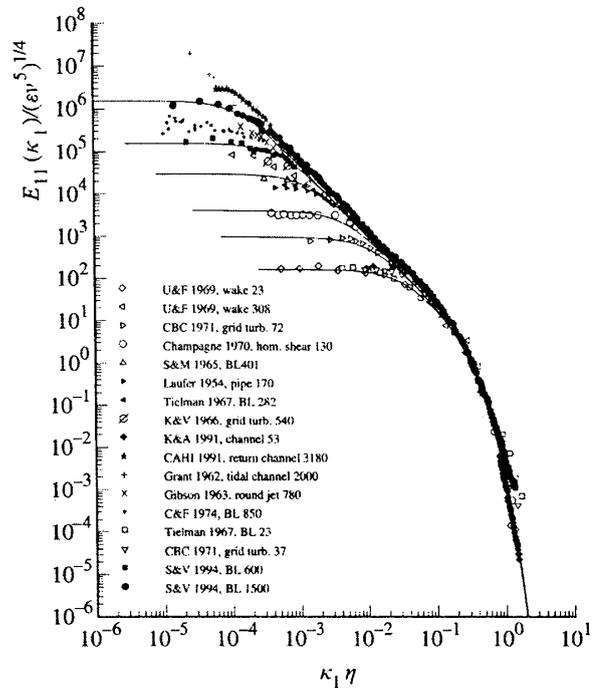


図 5: 実験によって測定された速度場のエネルギースペクトル。中間領域の冪分布となっている部分の傾きはほぼ $-5/3$ である。(文献 [9] より転載)

ここで実験で測定された $E(k)$ と ζ_p を見てみると、 $E(k)$ に関してはほぼ K41 の予測通りとなっているが、 ζ_p に関しては特に p が大きいところで K41 から大きくずれている (図 4、図 5)。このずれをエネルギー散逸率のゆらぎを取り込むことで説明しようとするのだが、以下に述べるように取り込み方には二つの典型的な方法がある。

2.2.5 間欠性の古典論 1(Log-normal 理論)

そのうちの 하나가、Kolmogorov と Obukhov によって独立に作られた log-normal 理論である。この理論は Kolmogorov が 1962 年に提出したことから K62 と呼ばれる。log-normal 理論では、まず局所的なエネルギー散逸率を粗視化したものを次のように定義する:

$$\epsilon_r(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi r^3/3} \int_{|\mathbf{r}| < r} \epsilon(\mathbf{x} + \mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (38)$$

K41 では $\epsilon = \bar{\epsilon} = \langle \epsilon(\mathbf{x}, t) \rangle$ と考えているので、

$$\langle |\delta \mathbf{u}(\mathbf{r})|^p \rangle \propto \langle (\epsilon r)^{p/3} \rangle \quad (39)$$

は 30 年くらい前に出たが、このウィルソンの理論というのは臨界現象のランダウ理論 (平均場理論) からのずれを繰り込み群の形で取り込んでいくという形をしている。統計物理の人は $E(k) \approx k^{-5/3}$ が平均場理論に対応するものであると推測して、K41 からのずれは繰り込み群を使って計算できだろうと考えたのである。しかしこのアプローチはこれまでいろんな人によって試みられているが、今のところまだ成功していないように思われる。

$$= (\bar{\epsilon}r)^{p/3} \quad (40)$$

となるのに対して、 ϵ のゆらぎを粗視化エネルギー散逸率という形で取り込むと次のように変形される:

$$\langle |\delta \mathbf{u}(\mathbf{r})|^p \rangle \propto \langle \epsilon_r(\mathbf{x})^{p/3} \rangle r^{p/3}. \quad (41)$$

ここで出てきた $\langle \epsilon_r(\mathbf{x})^{p/3} \rangle$ の扱いが問題となるが、K62では $\epsilon_r(\mathbf{x})$ の分布が log-normal 分布であるという仮定をする。

何故 log-normal 分布を仮定するのかについては次のように説明される。

まず、空間スケールの

$$l_n = L\xi^{-n} \quad (42)$$

という分割を考える (普通は $\xi = 2$ ととる)。大きなスケールを $1/\xi$ に繰り返し分割するわけである。スケール l_n に対応する粗視化エネルギー散逸率を ϵ_{l_n} として、隣合うスケールの ϵ_{l_n} の比を

$$\chi_n = \frac{\epsilon_{l_{n+1}}}{\epsilon_{l_n}} \quad (43)$$

とおく。この χ_n はゆらいでいる量だが、 χ_n の分布は n に依存せずには決まると仮定する。これはカスケードプロセスが自己相似的かつ定常であることによる。もし n に依らずに常に $\chi_n = 1$ であるとする、 ϵ は定数となり、K41 が再現される。

ここで $\epsilon_0 = \bar{\epsilon}$ であることを考えると、

$$\frac{\epsilon_{l_n}}{\bar{\epsilon}} = \chi_0 \chi_1 \cdots \chi_{n-1} \quad (44)$$

と書くことができるので、

$$\epsilon_{l_n} = \exp(\log \epsilon_{l_n}) \quad (45)$$

$$= \bar{\epsilon} \exp\left(\sum_{j=0}^{n-1} \log \chi_j\right) \quad (46)$$

と変形できる。 χ_n が n に依らない分布に従うことから $\sum_{j=0}^{n-1} \log \chi_j$ は同じ分布に従うランダム変数の和になるので、 n が十分大きければ (十分に小さいスケールでは) 中心極限定理から $\sum_{j=0}^{n-1} \log \chi_j$ は正規分布に従う。よって ϵ_{l_n} の分布 (十分小さなスケールでの $\epsilon_r(\mathbf{x})$ の分布) は log-normal になるというわけである。

K62では中心極限定理を使っているので、平均からの小さなゆらぎに対してしか正しくない。これを後で述べるように大偏差統計を用いることで大きなゆらぎに対しても正しい形を与えるように拡張することができる。K62はアプローチ自体は良いのだが、当時はまだ大偏差統計がよく知られていなかった¹⁰ので中心極限定理を使っているのである。

以上より、K62で ϵ_r の分布は μ を普遍定数として

$$P(\epsilon_r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_r\epsilon_r}} \exp\left(-\frac{(\log \epsilon_r - m_r)^2}{2\sigma_r^2}\right) \quad (47)$$

$$m_r = \log \bar{\epsilon} - \frac{1}{2}\sigma_r^2 \quad (48)$$

$$\sigma_r^2 = A + \mu \log\left(\frac{L}{r}\right) \quad (49)$$

¹⁰大偏差統計が良く知られるようになったのは1970年代以降

と書くことができる。従って、

$$\langle \epsilon_r^p \rangle = \int_0^\infty \epsilon_r^p P(\epsilon_r) d\epsilon_r \quad (50)$$

$$= \exp \left(pm_r + \frac{p^2 \sigma_r^2}{2} \right) \quad (51)$$

$$\propto \bar{\epsilon}^p \left(\frac{L}{r} \right)^{\mu p(p-1)/2} \quad (52)$$

となる。 $\langle \epsilon_r^p \rangle \propto r^{\tau(p)}$ と書くと

$$\tau(p) = \frac{\mu}{2} p(1-p) \quad (53)$$

である。これらを用いると速度場の p 次構造関数は、

$$\langle |\delta \mathbf{u}(\mathbf{r})|^p \rangle \propto \langle \epsilon_r(\mathbf{x})^{p/3} \rangle r^{p/3} \quad (54)$$

$$\propto \bar{\epsilon}^{p/3} r^{p/3 + \tau(p/3)} \quad (55)$$

となるので、K62での ζ_p は

$$\zeta_p = \frac{p}{3} + \tau \left(\frac{p}{3} \right) \quad (56)$$

$$= \frac{p}{3} + \frac{\mu}{2} p(1-p) \quad (57)$$

と求まる。

2.2.6 間欠性の古典論 2(ユニフラクタル理論)

もう一つのアプローチは、1964年に Novikov, Stewart、1978年に Frish, Sulem, Nelkin が β モデルとして提唱したもので、今ではユニフラクタル理論と言われているものである。

今までと同じようにスケール L でエネルギーが注入されており、このスケールでは全領域がアクティブであるとする。これがだんだん小さな渦に分裂していくという過程を考えるわけだが、その時にアクティブな領域の体積が変わらないという状態が間欠性がない状態であると考えことにする(図2)。

ユニフラクタル理論では、大きな渦が小さな渦に分裂するときアクティブでない領域ができると考える。分裂が進むほど(カスケードが進むほど)アクティブでない領域が増えていき、アクティブなのは一部だけになる。これが間欠性の起源であるとするのである(図6)。

この描像で、一回の分裂で β の割合だけがアクティブな領域として残ったとする。例えば一個の渦が半分の大きさに分裂したとすると、間欠性がない場合 $8 = 2^3$ 個渦ができて元の渦と同じだけの領域を埋め尽すが、間欠

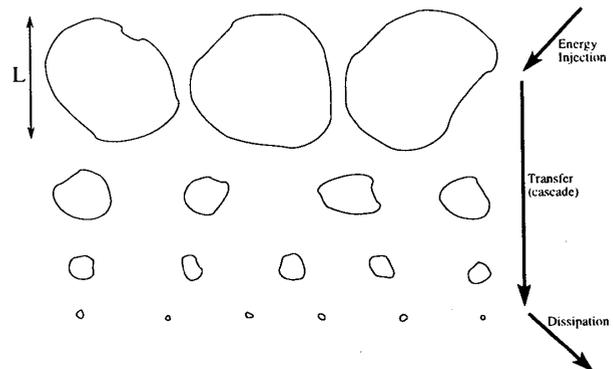


図6: ユニフラクタルモデル (β モデル)

性がある場合は 2^D 個できると考える。一般に D は非整数である。この 2^D の渦は元の渦の $\beta = 2^D/2^3$ の領域をアクティブな領域として残す。 n 回分裂後のスケールを l_n とすると、今の場合は n に依らずに

$$\beta = \frac{(l_{n-1}/l_n)^D}{(l_{n-1}/l_n)^3} = \left(\frac{l_n}{l_{n-1}}\right)^{3-D} \quad (58)$$

なので、

$$\beta^n = \left(\frac{l_n}{L}\right)^{3-D} \quad (59)$$

となる。スケール L の渦が n 回の分裂した後でアクティブな領域が占める体積を Ω_n とすると、

$$\Omega_n = L^3 \beta^n \quad (60)$$

である。慣性領域において各スケールでのエネルギー輸送率はエネルギー注入とつりあっていることから、

$$\bar{\epsilon} L^3 = \epsilon_n \Omega_n \quad (61)$$

が成り立つので、スケール $l_n = 2^{-n}L$ でのエネルギー輸送率のモーメントは

$$\langle \epsilon_n^p \rangle = \left(\frac{\bar{\epsilon} L^3}{\Omega_n}\right)^p \frac{\Omega_n}{L^3} = \bar{\epsilon}^p \beta^{(1-p)n} = \bar{\epsilon}^p \left(\frac{l_n}{L}\right)^{(3-D)(1-p)} \quad (62)$$

と求まる。従って、ユニフラクタル理論での $\tau(p)$ と $\zeta(p)$ は、

$$\tau(p) = \mu(1-p) \quad (63)$$

$$\zeta(p) = \mu(1-p) + p/3 \quad (64)$$

となる。ここで $\mu = 3 - D$ を間欠性指数という。

実験から μ を求めると、 $\mu = 0.2$ くらいで、 $D = 2.8$ となる。つまり渦が一回分裂すると $2^{2.8}$ 個の小さな渦が生まれることになる。

2.2.7 大偏差統計による間欠性解析

log-normal 理論では $\tau(p)$ は p の二次関数であり、ユニフラクタル理論では一次関数であった。一体このどちらが正しいのか、あるいはどちらも間違っているのかという疑問が起こるが、この二つは以下述べるように大偏差統計を介して繋っており、どちらも近似としては正しいと考えられる。

大偏差統計を用いた間欠性の解析は、log-normal 理論と同様な方針で行う。まず、式(42)のようにスケールを分割し、各スケールでのエネルギー輸送率の比を式(43)と定義し、 n 回分裂後のエネルギー輸送率を式(46)と書きかえる。ここで、K62と同じように、カスケードプロセスの相似性から χ_n の分布は n に依らないとする。便宜上、 $\chi_n = \exp(z_n)$ として

$$\epsilon_{l_n} = \bar{\epsilon} \exp(n\bar{z}_n), \quad \bar{z}_n \equiv \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} z_j \quad (65)$$

と書くことにする。このとき、

$$\langle \epsilon_{l_n}^q \rangle = \epsilon_L^q \langle e^{q\bar{z}_n n} \rangle \approx \epsilon_L^q e^{-\tau(q)n} \implies \langle \epsilon_r^q \rangle = \bar{\epsilon}^q \left(\frac{L}{r} \right)^{-\tau(q)} \quad (66)$$

である。

log-normal 理論ではここで中心極限定理を用いたが、ここでは大偏差統計を用いる。つまり、 \bar{z}_n はランダム変数の和であることから、 \bar{z}_n の漸近分布 $Q_n(z)$ は次のように書けるとする:

$$Q_n(z) \approx \sqrt{n} \exp(-S(z)n), \quad (S(z) \geq 0, S''(z) > 0). \quad (67)$$

これを用いて $\langle \epsilon_{l_n}^q \rangle$ を評価すると、

$$\langle \epsilon_{l_n}^q \rangle = \epsilon_L^q \int e^{qz n} Q_n(z) dz \approx \int \exp[(qz - S(z))n] dz \approx e^{-\tau(q)n} \quad (68)$$

$$\tau(q) = \min_z [S(z) - qz] \quad (69)$$

となる。また、 ϵ の分布は、

$$P_r(\epsilon) \approx \frac{\epsilon^{-1}}{\sqrt{\log(L/r)}} \left(\frac{L}{r} \right)^{-S(z_r(\epsilon))} \quad (70)$$

$$z_r(\epsilon) = \frac{\log(\epsilon/\bar{\epsilon})}{\log(L/r)} \quad (71)$$

のように書くことができる。これが大偏差統計を用いた間欠性解析の枠組である。

2.2.8 マルチフラクタル理論

間欠性をマルチフラクタルを用いて解析する理論が 1986 年に Parisi, Frisch によって提案されている¹¹。この理論では、空間を半径 r の領域に分け、 j 番目の領域でのエネルギー散逸率 $\epsilon_{r,j}$ が

$$\epsilon_{r,j} \propto r^{\alpha_j - 1} \quad (72)$$

とスケールすると考える。特異性指数 α をもつ部分領域のフラクタル次元 (特異性スペクトル) を $f(\alpha)$ とする。特異性指数 α を持つ領域の割合は $r^{-f(\alpha)}/r^{-3} = r^{3-f(\alpha)}$ なので、 $\langle \epsilon_r^q \rangle$ は次のように書ける:

$$\langle \epsilon_r^q \rangle = \int r^{(\alpha-1)q} r^{3-f(\alpha)} d\alpha. \quad (73)$$

$\langle \epsilon_r^q \rangle \propto r^{\tau(p)}$ より $\tau(p)$ を求めるには、上式で鞍点法を用いて

$$\tau(p) = \min_{\alpha} [(\alpha-1)q + 3 - f(\alpha)] \quad (74)$$

となり、 $f(\alpha)$ が決まれば $\zeta(p) = p/3 + \tau(p/3)$ により $\zeta(p)$ が求まる。これがマルチフラクタルによる間欠性解析の枠組である。

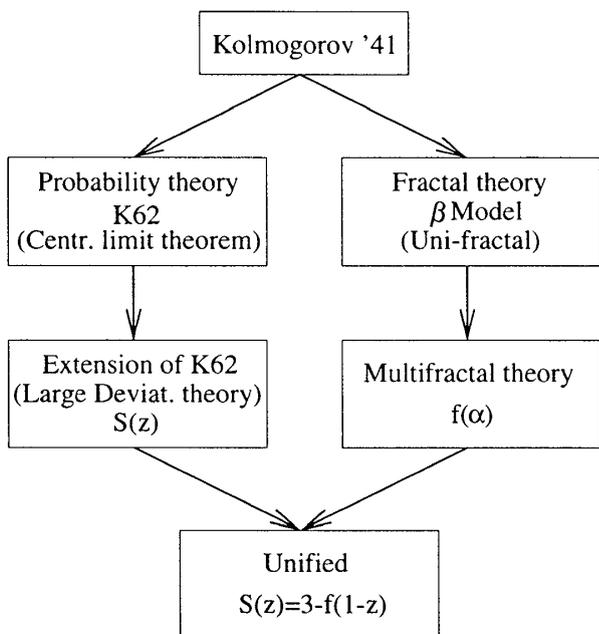


図 7: 間欠性理論間の関係

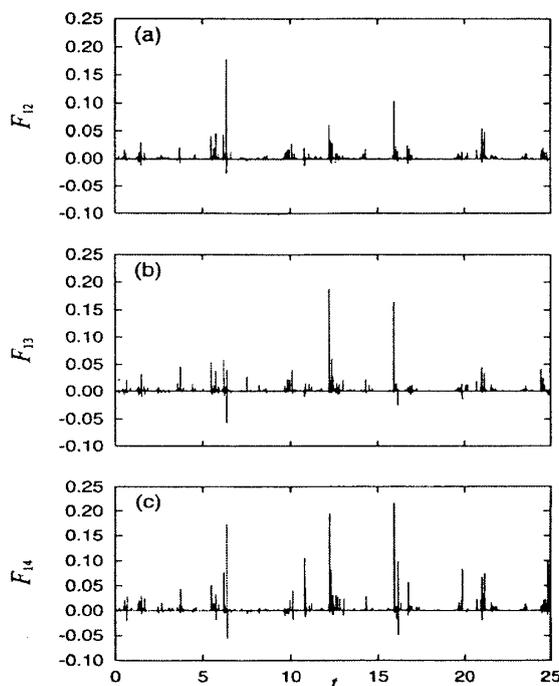


図 8: GOY シェルモデルにおける $n = 12, 13, 14$ のシェルでのエネルギー輸送率の時間変化。(文献 [10] より転載)

2.2.9 まとめ

K62 や大偏差統計が $\langle \epsilon_r^p \rangle$ を扱うのに用いた手はカスケードプロセスの自己相似性であった。それに対してマルチフラクタル理論では先験的に ϵ_r のマルチフラクタル性を仮定しており、一つ論理の飛躍が入っている。

しかし、 $S(z)$ と $f(\alpha)$ の間には

$$S(z) = 3 - f(1 - z). \tag{75}$$

という関係があり、この飛躍を大偏差統計が繋いでいる (図 7)。

従って、結局 Log-normal 理論とユニフラクタル理論とでどちらが正しいのかということ、関数形だけを見ると違うけれども考え方としてはどちらも正しいということになるのである。

大偏差統計の話に戻ると、乱流特性を決めるのは $S(z)$ であるが、この $S(z)$ が原理的にどう決まるかは全くわかっていない¹²。従って今のところ $S(z)$ の形は実験やシミュレーションから決めなくてはならない。

¹¹厳密には Parisi, Frisch が提案したのは速度差の間欠性のマルチフラクタル解析。エネルギー散逸率の間欠性に適用したのは Sreenivasan。

¹²普通の大偏差統計の場合だと、基礎方程式の時間発展を一般化した一般化時間発展演算子の最大固有値で決まる。

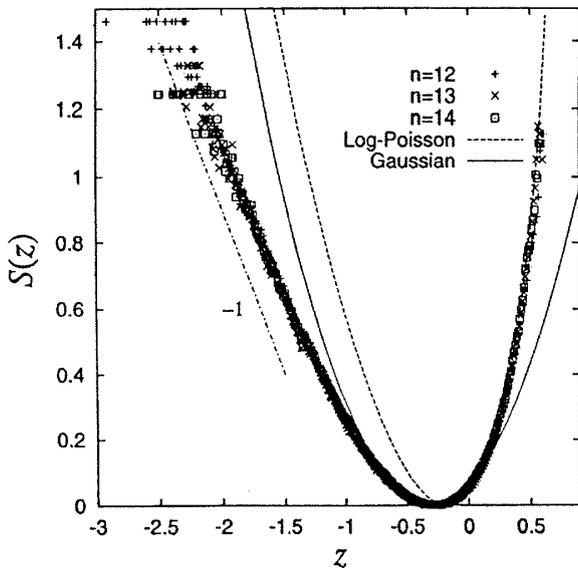


図 9: GOY シェルモデルのシミュレーションによって求めた $S(z)$ 。(文献 [10] より転載)

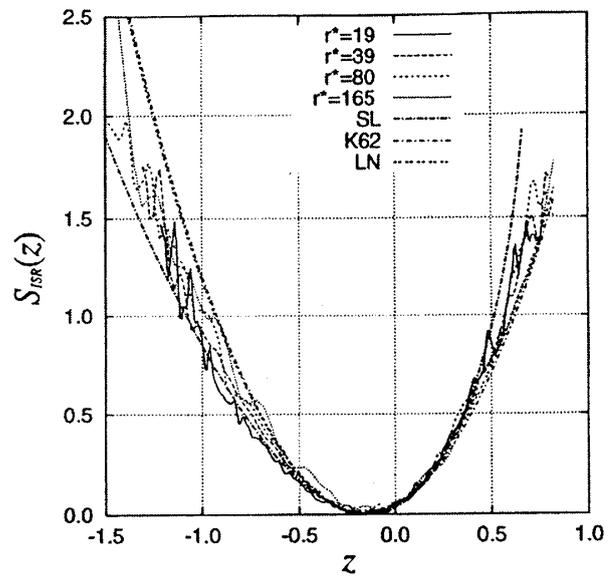


図 10: ジェットフローの実験から求めた $S(z)$ 。(文献 [12] より転載)

まず GOY シェルモデルでのシミュレーション結果を示す¹³。シェルモデルは、3次元の波数空間をシェルに分けて (式 (42) のようにスケール分割された一つのスケールをシェルと呼ぶ) それらのシェル毎にある一つの波数を選び、その波数でシェルを代表させて作ったモデルである。図 8 は $n = 12, 13, 14$ のシェルでのエネルギー輸送率の時間変化である。時々バーストが起こっているのが見られるが、これが今問題になっている間欠性であり、そういうところでエネルギーが一気に次のシェルに流れている。このエネルギー輸送率 ϵ から計算した $S(z)$ を図 9 に示す。 $n = 12, 13, 14$ のシェルで計算した $S(z)$ はほぼ重なっている。

次に実験から求めた $S(z)$ を見てみる。この実験はジェットフローの実験で、Taylor の flozen-hypothesis を用いて計算されたものであるが、図 10 のようにシェルモデルの場合と同じく異なるスケールで計算した $S(z)$ はほぼ重なっている。

このように、異なるスケールでも同じ $S(z)$ を与えることから、乱流を特徴づける一つの $S(z)$ という曲線の存在が示唆される。

¹³GOY シェルモデル:

$$\left(\frac{d}{dt} + \nu k_n^2\right) u_n = i(a_n k_n u_{n+1}^* u_{n+2}^* + b_n k_{n-1} u_{n-1}^* u_{n+1}^* + c_n k_{n-2} u_{n-1}^* u_{n-2}^*) + f \delta_{n,4} \quad (76)$$

ここで、 $n = 1, \dots, N$, $k_n = 2^n k_0$ である。 u_n は複素変数、 a_n, b_n, c_n はモデルのパラメータ、 ν, f はそれぞれ動粘性率、外力を表す。詳しくは文献 [11] を参照。

2.3 オンオフ間欠性

2.3.1 オンオフ間欠性

ここでは次のようなカオス的な挙動を示す力学系を考える:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t). \quad (77)$$

この力学系をカオス素子と呼ぶことにして、カオス素子の結合系を考える。物理的には電子回路や化学反応などにこのような系が見られる。ここでは話を簡単にするために次のような非常に簡単な結合系を考える:

$$\frac{d\mathbf{X}_1}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{X}_1, t) + \frac{D}{2}(\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1), \quad (78)$$

$$\frac{d\mathbf{X}_2}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{X}_2, t) + \frac{D}{2}(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2). \quad (79)$$

D は二つのカオス素子の結合の強さを表すパラメータで、結合定数と呼ぶ。

もし $D = 0$ ならば、 \mathbf{X}_1 と \mathbf{X}_2 の二つの Chaos 素子は独立に振動する。独立に振動している状態から、 $D > 0$ として結合を加えていく状況を考える。

式を見れば明かなように、この系は $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ に関して対称なので、 $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2$ とおくとカップリング項が消えて二つのカオス素子がシンクロして振動する。この状態のことをカオス同期状態と呼ぶことにする。

ではこのカオス同期が実際に観測されるかどうかということを考えてみる。観測されるということは、カオス同期状態の運動が安定でなければならない。

図 11 の (c),(d) はカオス素子の結合系の時間発展を模式的に描いたものである。横軸が一番目のカオス素子の状態変数、縦軸が二番目のカオス素子の状態変数を表す。45度線は、 $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2$ なのでカオス同期状態を表している。45度線上にある点 P を考えると、この点から出発して時間発展を計算しても安定不安定にかかわらず常に同期状態を保つ。そこで、同期状態から少しずれた点 Q を考えて、状態 P, Q の差の時間発展を見てみる。図 11(c) では、時間が進むにつれて線分 PQ は 45度線に近づいている。これは時間発展とともに同期状態に近づいているということで、同期状態は安定であることを示している。一方図 11(d) では時間が進むにつれて線分 PQ は 45度線からどんどん離れていく。これは同期状態が不安定であることを示している。

線分 PQ の長さは、図 11(c),(d) どちらの場合も指数関数的に増大しているが、これはカオスの持つ軌道不安定性によるものである。もし P, Q ともに 45度線上に取っても、線分 PQ の長さは指数関数的に増大する。これはカオス結合系の特徴である。

カオス結合系に対して、図 11(a),(b) は周期振動子を結合させた場合(非カオス結合系)で、図 11(a) はリミットサイクル上の同期状態が安定、図 11(b) は不安定な場合である。カオス結合系と違うところは、45度線方向のずれ (l_{\parallel}) はほとんど変わらないということで、これは軌道不安定性がないということに対応している。

カオス同期状態が安定である為には、少なくとも線形安定でなければならない。そこで、まず線形安定性を調べてみることにする。

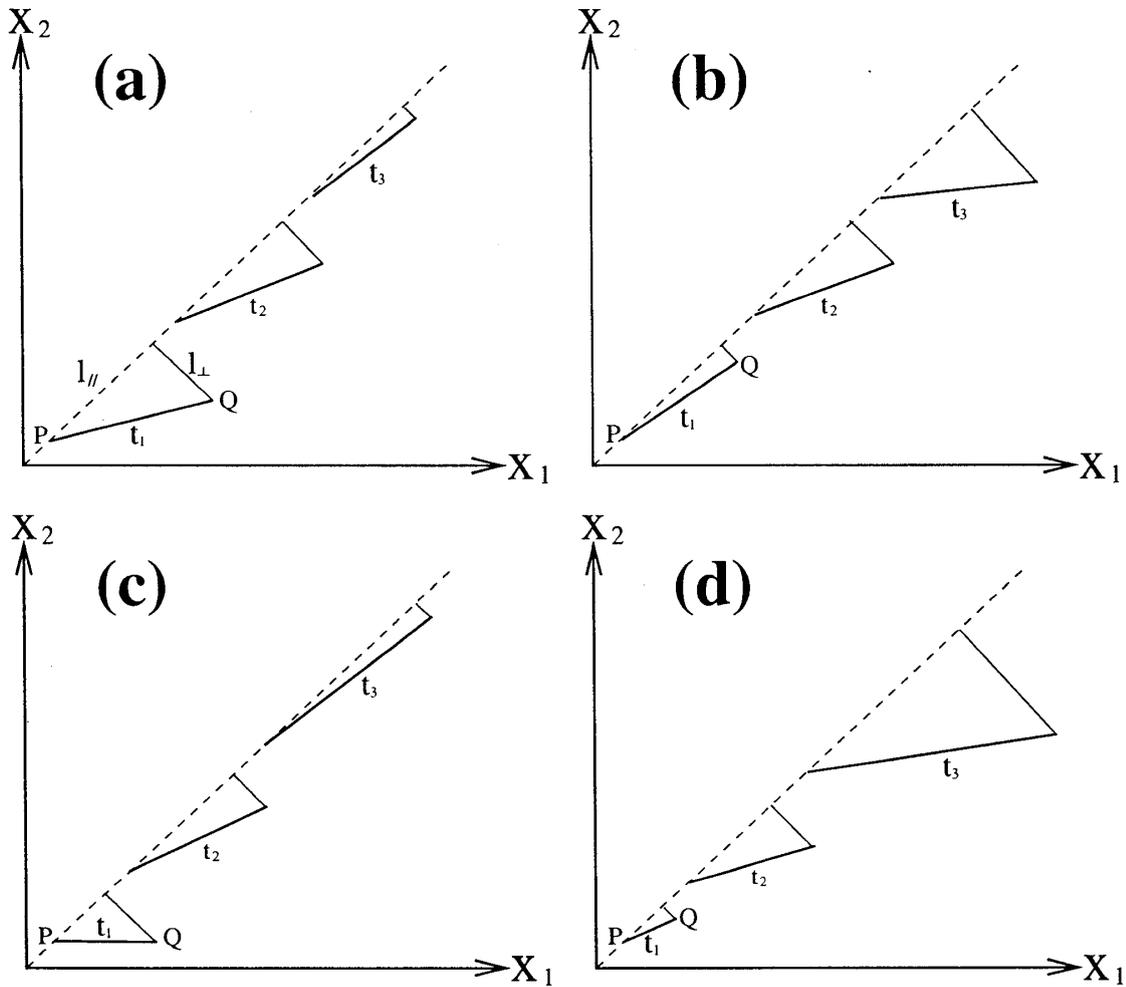


図 11: リミットサイクル振動子結合系 (a)(b) とカオス素子結合系 (c)(d) での時間発展の様子。 $t_1 < t_2 < t_3$ 。(a),(c) は同期状態が安定な場合。(b),(d) は不安定な場合。点線は同期状態を表す。

カオス同期解を

$$\mathbf{X}_1(t) = \mathbf{X}_2(t) \equiv \mathbf{X}^0(t), \quad (80)$$

$$\dot{\mathbf{X}}^0(t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}^0(t)) \quad (81)$$

とおき、それに対し次のように微小攪乱 $x^{(j)}(t)$ を加える:

$$\mathbf{X}_j(t) = \mathbf{X}^0(t) + \mathbf{x}^{(j)}(t) \quad (j = 1, 2). \quad (82)$$

微小攪乱の時間発展を

$$\dot{\mathbf{x}}^{(j)} = \hat{G}(t)\mathbf{x}^{(j)} \quad (83)$$

とすると、図 11 の l_{\parallel}, l_{\perp} の時間発展はそれぞれ

$$\mathbf{x}_{\parallel}(t) \equiv \mathbf{x}^{(1)}(t) + \mathbf{x}^{(2)}(t) \quad \dot{\mathbf{x}}_{\parallel}(t) = \hat{G}(t)\mathbf{x}_{\parallel}(t) \quad (84)$$

$$\mathbf{x}_{\perp}(t) \equiv \mathbf{x}^{(1)}(t) - \mathbf{x}^{(2)}(t) \quad \dot{\mathbf{x}}_{\perp}(t) = (\hat{G}(t) - D)\mathbf{x}_{\perp}(t) \quad (85)$$

と書ける。カオス結合系なので、攪乱の時間発展は

$$|\mathbf{x}_{\parallel}(t)| \approx e^{\lambda t} |\mathbf{x}_{\parallel}(0)| \quad (86)$$

$$|\mathbf{x}_{\perp}(t)| \approx e^{\lambda_{\perp} t} |\mathbf{x}_{\perp}(0)| \quad (87)$$

のように書くことができる。ここで、 λ はカオス素子の最大 Lyapunov 指数で、素子自身の特性によるものである。 λ_{\perp} は横断 Lyapunov 指数で、次のように定義される:

$$\lambda_{\perp} = \lambda - D. \quad (88)$$

同期状態の安定性に関係するのは λ_{\perp} だが、 λ は素子の特性によって決まっている量であり、結合させても変化しない。コントロールできるのは結合定数 D だけである。

カオス系を考えているので $\lambda > 0$ であり、結合定数が臨界結合定数 $D = D_c \equiv \lambda$ となるところで $\lambda_{\perp} = 0$ となる。 $D > \lambda$ であれば $\lambda_{\perp} < 0$ となりカオス素子の状態はカオス同期状態へ漸近する。つまりカオス同期状態は安定である。これをカオスのホイヘンス現象と呼ぶ。 $D < \lambda$ の時はカオス同期状態は不安定である。

λ はカオス素子間のずれを拡大しようとする効果を持ち、今考えている結合系の場合 D はずれをなくそうとする効果を持っているから、 λ と D のバランスでカオス同期状態の安定性が決まっているのである。

これは例えば Ising スピン系の常磁性-強磁性転移と形の上で良く似ている。Ising スピン系ではスピンのお互いに揃おうとする傾向と、熱ゆらぎによって乱される効果のどちらが勝つか、つまり熱エネルギーと交換エネルギーのどちらが勝つかによって常磁性か強磁性かが決まる。温度が高ければ乱雑化しようとする効果が勝ってスピンは揃わないが、逆に温度が低いときは乱雑化の効果が相対的に小さくなってスピンが揃い強磁性を示す。

では実際のカオス結合系の例を見てみる。図 12 はカオス写像結合系¹⁴のシミュレーションで、 D の値を臨界結合定数近傍で変えた時の様子である。 X_n, Y_n は二つのカオス素子の状態変数である。それぞれを単独に見ても分かりにくいので、差 $X_n - Y_n$ を見ることにする。

$D > D_c$ (図 12(b))の場合、過渡状態を経た後にカオス同期状態になっている。

$D < D_c$ (図 12(a))の場合、一時的にシンクロしてカオス同期状態になっているように見えるが、しばらくするとバーストを起こすという間欠的な挙動を繰り返している。この間欠性のことをオンオフ間欠性と呼ぶ。

このようなオンオフ間欠性は、最近では磁性体のスピン化不安定や液晶の間欠的パターン形成など、凝縮系物理の実際の系でも観測されている。

$D < D_c$ の場合、バースト状態からシンクロ状態に戻るのは何故かという疑問が起こるが、これは λ 自身のゆらぎによるものである。カオス同期状態は不安定であるためある時点で二つの素子の状態は離れていくが、系が有限の領域に閉じこめられて運動している場合は必ず近くの状態に戻ってくることがある。また一般的な系では λ は時間的に揺らいでいるために、 λ_{\perp} は平均値としては正であってもある時間領域で負になりえる。従って、結合系が同

¹⁴次のようなロジスティック写像の結合系:

$$X_{n+1} = f(X_n) + \xi[f(Y_n) - f(X_n)], \quad (89)$$

$$Y_{n+1} = f(Y_n) + \xi[f(X_n) - f(Y_n)]. \quad (90)$$

但し、 $f(X) = 3.8X(1 - X)$, $\xi = (1 - e^{-D})/2$ である。

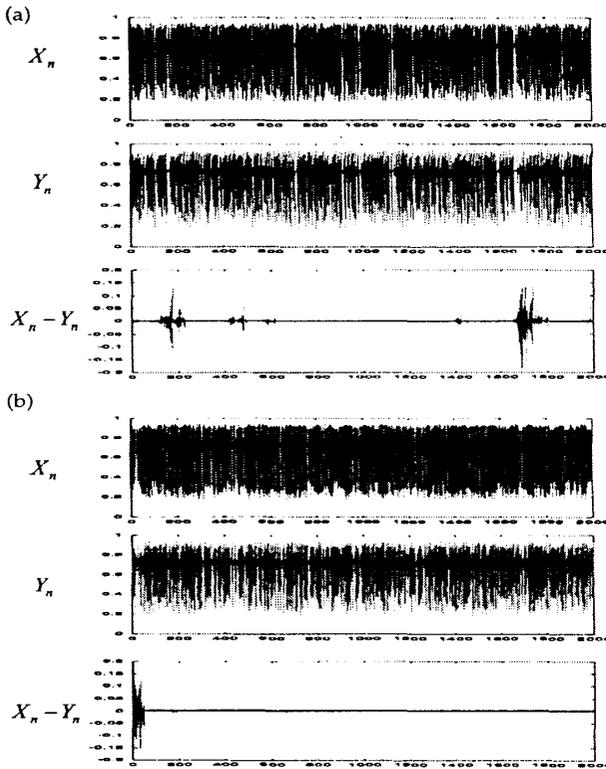


図 12: 臨界結合定数近傍でのカオス写像結合系の挙動。(a) は $D = D_c - 0.002$ 。(b) は $D = D_c + 0.003$ 。(a) では間欠的にバーストが起こっている。

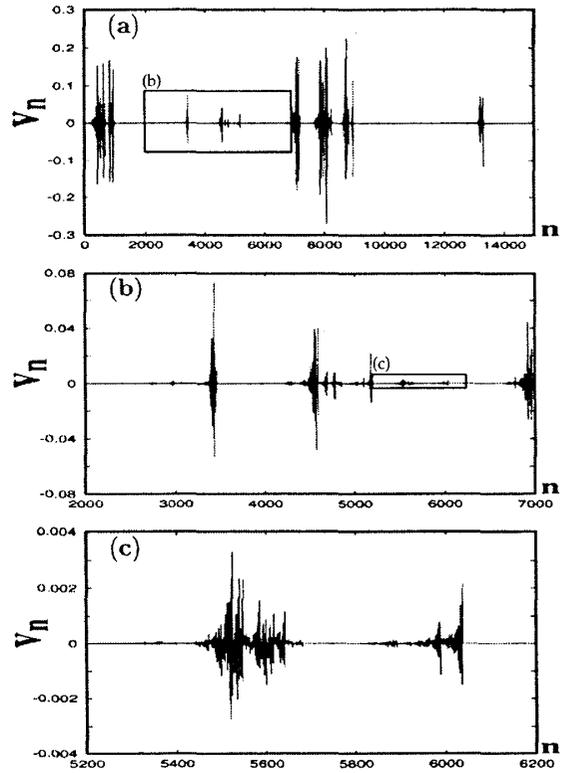


図 13: オンオフ間欠性の自己相似性。(a) の一部を拡大したものが (b)、(b) の一部を拡大したものが (c)。一部を拡大しても全体とほぼ同様な形が見られる。(文献 [15] より転載)

期状態近傍に来たときに λ_{\perp} が負になると結合状態に吸い込まれて擬似的にカオス同期状態に落ちこんだように見える ($l_{\perp} \approx 0$ になる) のである。

しかし同期状態よりは微少にずれた状態までしか行かないので、平均的には $\lambda_{\perp} > 0$ であることから時間が経てば再びバーストを起こす。このようにしてオンオフ間欠性は起こるのである。

2.3.2 オンオフ間欠性の統計特性

このオンオフ間欠性は非常に面白い性質を持っていて、以下のようないくつかの特有な冪則を示す:

$$P(l) \approx l^{-1+\eta}, \quad (91)$$

$$I(\omega) \approx \omega^{-\frac{1}{2}}, \quad (92)$$

$$Q(\tau) \approx \tau^{-\frac{3}{2}}. \quad (93)$$

ここで、 $P(l)$ はバーストサイズの確率分布関数 (PDF) で、 η は $\eta \propto \lambda_{\perp}$ となるような小さな量である。 $I(\omega)$ はバーストの絶対値のスペクトル強度である。これは非常に不思議な性

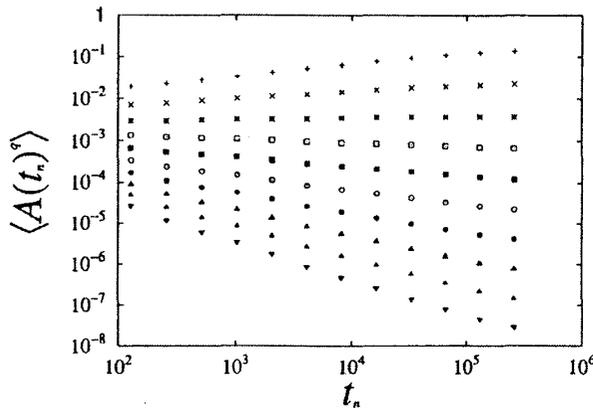


図 14: 粗視化バースト強度のモーメント。(文献 [16] より転載)

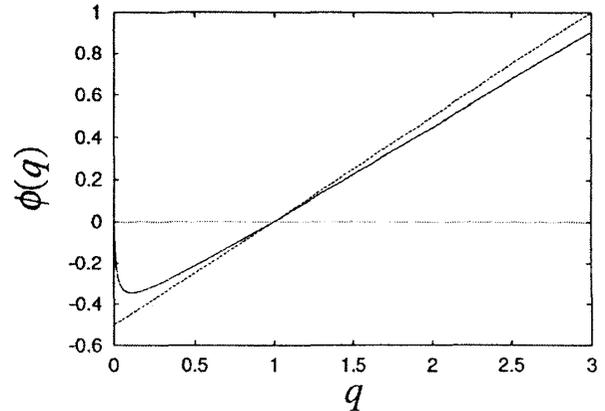


図 15: 粗視化バースト強度のモーメントの指数の指数依存性。(文献 [16] より転載)

質をもっており、バーストそのもののスペクトル強度はほとんどホワイトであるが、バーストの絶対値のスペクトル強度は $\omega^{-\frac{1}{2}}$ なる冪則を示す。この $\frac{1}{2}$ という指数は理論的に導くことができる。

$Q(\tau)$ はラミナー長 (カオス同期状態にある時間幅) 分布の PDF である。バーストサイズに閾値 ϵ を設けて、 ϵ より小さい所はラミナー (同期状態)、大きい所はバーストとする。あるバーストから隣のバーストまでの長さ (τ) の分布を見ると、その分布がかなり広い範囲で $\tau^{-\frac{3}{2}}$ に従っているのが見られる。 ϵ の値を変えても $\frac{3}{2}$ という指数は殆んど変わらず、冪則が成立する領域が少し変わる¹⁵。

これらの冪則を生み出す原因は、図 13 に見られるような自己相似性にある。このような自己相似性が成立している領域 (強相関領域) では普通の大偏差統計的手法が使えないので、統計的にどのように扱うかということが問題になる。

2.3.3 強相関領域での自己相似性の解析

今考えているカオス結合系には二つの特徴的時間スケールがある:

$$\tau = \Gamma^{-1}, \tag{94}$$

$$T = \left(\frac{\lambda_{\perp}^2}{\Gamma} \right)^{-1} \propto \lambda_{\perp}^{-2}. \tag{95}$$

Γ は局所横断 Lyapunov 指数のゆらぎ強度¹⁶ である。 τ はマイクロな時間スケール、 T はマクロな時間スケールと見ることができる。 $D \rightarrow D_c$ となるにつれて T はいくらでも大きくなる。

¹⁵ この冪則が発見されてオンオフ間欠性は有名になったが、この冪則はブラウン運動の初期通知時間分布から簡単に得られるものであり、深遠な法則ではない。

¹⁶ 時刻 t における局所横断 Lyapunov 指数を $\lambda_{\perp}(t)$ 、長時間平均を $\bar{\lambda}_{\perp}$ として、 $\lambda_{\perp}(t)$ のゆらぎを $f(t) = \lambda_{\perp}(t) - \bar{\lambda}_{\perp}$ と書くとする。このとき、局所横断 Lyapunov 指数のゆらぎ強度は次のように定義される:

$$\Gamma \equiv \int_0^{\infty} \langle f(t)f(0) \rangle_{\text{time}} dt. \tag{96}$$

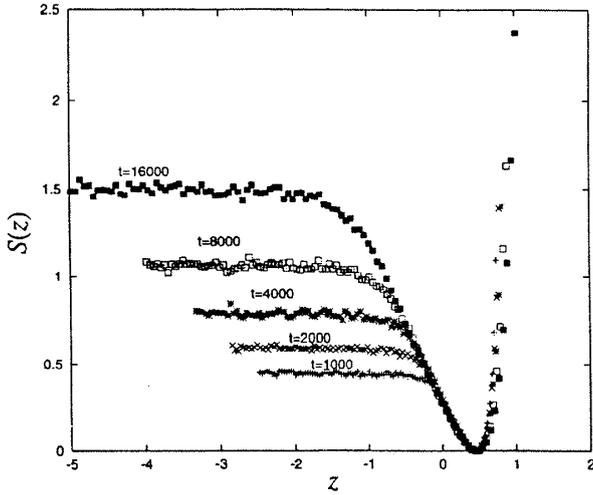


図 16: シミュレーションから求めた $S(z)$ 。(文献 [16] より転載)

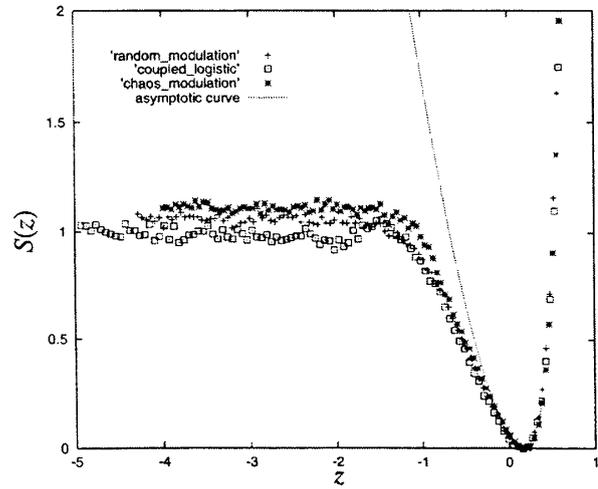


図 17: オンオフ間欠性を示す様々なモデルのシミュレーションから求めた $S(z)$ 。(文献 [16] より転載)

$\tau \ll t \ll T$ の領域において先に述べたような冪則が成立するのだが、これは τ を η 、 T を L と見てやると、乱流での慣性領域とある意味で似たようなものを見ることができる。

粗視化する時間幅を巨視的時間スケールである T よりも十分大きく取れば、 T は相関時間なので粗視化した場所でのゆらぎは独立になる。従って、粗視化時間幅が十分大きければ通常の大偏差統計を用いて解析することができる。

ところが、今考えているような $\tau \ll t \ll T$ の領域では相関が強く残っており(強相関領域)、それぞれの時刻でのゆらぎが独立であると見做すことはできない。この強相関領域での統計の扱いは、強相関領域での特徴である相似性を利用して行う。

まず次のように粗視化バースト強度 $A(t)$ を定義する:

$$A(t) = \frac{1}{t} \int_0^t l_{\perp}(s) ds. \quad (97)$$

$l_{\perp}(s)$ は時刻 s でのバースト強度である、 $A(t)$ のモーメントを次のように書く:

$$\langle (A(t))^q \rangle \approx A_T^q \left(\frac{T}{t} \right)^{\phi(q)}. \quad (98)$$

この $A(t)$ のモーメントを調べたのが図 14 である。3 桁くらいのかかなり広い範囲に渡って冪則が成立していることがわかる。ここから計算した $\phi(q)$ が図 15 である。

乱流で式 (42) という空間スケール分割を考えたのと同様に

$$t_n = T e^{-n}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N) \quad (99)$$

という時間スケール分割を考え、隣合うスケールでの A の比を次のように定義する:

$$\frac{A(t_{n+1})}{A(t_n)} \equiv e^{z_n}. \quad (100)$$

但し $\langle f(t)f(0) \rangle_{\text{time}} \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \int_0^T f(t+s)f(s)ds$ とする。

オンオフ間欠性の自己相似性を反映して、この比が $1 \ll n \ll N$ の領域において n によらない分布に従うと仮定することで、形の上で大偏差統計による乱流の間欠性の扱いと同様になる。このとき、 $A(t)$ の分布 $P(a, t)$ は

$$P(a, t) \approx a^{-1} \left(\frac{T}{t} \right)^{-S(z_t(a))}, \quad (101)$$

$$z_t(a) = \frac{\log \frac{a}{A_T}}{\log \frac{T}{t}} \quad (102)$$

という形になる。

シミュレーション結果から直接計算した $S(z)$ を図 16 に示す。 t の値にかかわらず図の右半分の曲線部は重なっており、この系を特徴づける $S(z)$ の存在が示唆される。このことから、この系に対して大偏差統計解析が妥当なものとなっていると考えられる。

図 17 にはオンオフ間欠性を示す様々なモデルのシミュレーションから求めた $S(z)$ を描いている。これらの曲線は、異なるモデルで計算されたにもかかわらず比較的良く一致している。このことは、オンオフ間欠性の強相関領域には何らかの普遍性があり、強相関領域では系によらずに同じ $S(z)$ で特徴づけられることを示唆しているように思われる。

3 普遍性から超普遍性へ

結局ここまでの内容は、一言で言うと「大偏差統計を用いた強相関ゆらぎの解析」である。

相関時間よりも十分大きな時間幅での粗視量に対しては通常の大偏差統計を使うことができ、ゆらぎスペクトルは一般化時間発展演算子の最大固有値から求めることができる。だが相関時間よりも短い時間幅での粗視量に対しては普通に大偏差統計を使うことはできない。しかしここではそれを逆手にとって、自己相似性があることを利用し、粗視量の指数のゆらぎの形に持っていくことで、弱相関な場合と同様に大偏差統計での解析を行ったわけである。この手法は K62 にヒントを得たものであり、そういうわけでこの話の出発点は K62 にあったと言っているだろう。

このような強相関領域における解析は、乱流やオンオフ間欠性だけでなく、臨界現象や価格変動などの経済現象および心拍変動の解析にも適用することができる。これらの系にも系の詳細に依らない統計則があり、その系の内部での普遍性によっていくつかの普遍性クラスに分けられている。

しかしこれらの異なる系に対しても、強相関ゆらぎという立場から見て大偏差統計を適用することで、ある $S(z)$ という関数を使って強相関ゆらぎに共通する類似な統計構造を見出すことができる。これは、それぞれ個々の系のレベルでの普遍性とは違って、それらをまとめたもう一段上の普遍性(超普遍性 (superuniversality)) の存在を示唆しているように思われる。

臨界現象の普遍性クラスのように確立した話ではないけれども、この超普遍性を特徴づけるいくつかの超普遍性クラスがあり、それらによって現象の一段上の特徴づけができるのではないかと期待している。

参考文献

- [1] 藤坂 博一, 非平衡系の統計力学,(産業図書, 1998) 第4章.
- [2] 藤坂 博一, 粗視化と“大偏差統計力学”, 日本物理学会誌, 第54巻6月号 (1999) p.423.
- [3] C.Beck and F.Sclögl, *Thermodynamics of chaotic systems: An introduction*, (Cambridge Univ. Press, 1993).
- [4] J.Feder, *Fractals*, (Plenum, New York, 1988).
- [5] E.Ott, *Chaos in dynamical systems*, (Cambridge, 1993).
- [6] 神部 勉ほか, 流体力学 安定性と乱流, (東京大学出版会, 1998).
- [7] U.Frisch, *Turbulence*, (Cambridge Univ. Press, 1995).
- [8] F.Anselmet, Y.Gagne, E.J.Hopfinger, and R.A.Antonia(1984), High-order velocity structure functions in turbulent shear flows. *J. Fluid Mech.*,140,p.63.
- [9] S.B.Pope, *Turbulent Flows*, (Cambridge Univ. Press, 2000).
- [10] T.Watanabe, Y.Nakayama, and H.Fujisaka(2000), Large deviation statistics of the energy-flux fluctuation in the shell model of turbulence., *Phys. Rev. E*,61,R1024.
- [11] Yamada, M. and Ohkitani, K.(1987), Lyapunov spectrum of a chaotic model of three-dimensional turbulence. *J. Phys. Soc. of Japan*,56,p.4210.
- [12] H.Fujisaka, Y.Nakayama, T.Watanabe, and S.Grossmann(2002), Scaling hypothesis leading to generalized extended self-similarity in turbulence. *Phys. Rev. E*,65,p.046307.
- [13] 藤坂ほか, カオス間転移とオンオフ間欠性, 日本物理学会誌, 第51巻11月号 (1996) p.813.
- [14] 藤坂, カオス変調下の間欠性現象, 応用数理, vol.90 (1999) p.28.
- [15] H.Fujisaka, S.Matsushita, and T.Yamada(1997), Fluctuation-controlled transient below the on-off intermittency transition. *J. Phys. A*,30,p.5697.
- [16] H.Fujisaka, H.Suetani, and T.Watanabe(2000), Self-Similarity Dynamics of On-Off Intermittency, *Prog. Theor. Phys. Suppl.*,139,p.70.