

# ランダム面上のくりこみ群と弦理論

京都大学大学院 理学研究科 福間将文\*

## Abstract

本テキストでは、講義でとりあげる話題の基礎的な部分について、入門的な解説を行う。

## 0 はじめに

弦理論は、量子重力を consistent に含む統一理論の最有力候補である。この理論の基本的な考え方は、物質や力の起源となる“素粒子”が点粒子ではなく実は有限の広がりを持つひも(弦)である、という事である。その際、低エネルギーで観測される様々な粒子は、弦の揺らぎの様々なモードに対応していると解釈される。また、弦が有限の広がりを持つという事から、重力の短距離での揺らぎがコントロールされ、重力の量子化が可能になる。しかしながら、広がりを持つものを相対論と整合性を保ちながら量子化しようとする、一般に強い制約が生じる。その為、弦が運動できる時空自身についても、その構造がある程度決まってしまう。他方、弦の軌跡は2次元の世界面を生むが、弦の振動によってこの世界面はランダムに揺らぐランダム面になる。つまり、弦理論は時空に埋め込まれたランダム面の理論と等価である。

このサブゼミでは、物性の若手の方々を対象に、ランダム面の理論のくりこみ群的解析から弦理論における時空の描像を解説する。とくに、物性の研究者にもなじみの深い模型を題材とする事で、弦理論において様々なアイデアが交叉する状況を解説したい。

講義内容(予定)

### 1. 弦理論の基礎

- ・弦理論とランダム面の関係
- ・Polyakov 作用と経路積分
- ・共形ゲージと Liouville 場と共形対称性

---

\*e-mail: fukuma@gauge.scphys.kyoto-u.ac.jp

## 2. 弦理論が記述する時空

- ・ ランダム面 (世界面) 上のくりこみ群
- ・ (時空の) 低エネルギー有効理論
- ・ 双対性 (主に T-duality)
- ・ 非可換な時空 (時間があれば)

## 3. 行列模型

- ・ ランダム面と行列模型
- ・ ランダム面上の可解格子模型と線形ディラトン時空
- ・ ランダム面上の XY 模型と 2次元ブラックホール時空
- ・ 時空を生成する行列模型と、弦理論の構成的定式化 (時間があれば)

以下、上に挙げた事項のうち、基礎的なものについて入門的な解説を行う。

# 1 弦理論の基礎

## 1.1 点粒子と場の理論

$d$ 次元ユークリッド空間中の自由な点粒子を考える。この点粒子の軌跡を固有時間  $\tau$  について  $x^i(\tau)$  ( $i = 1, 2, \dots, d$ ) と表す時、古典的な軌跡は、“測地距離” に対応する作用：

$$S_0 = m \int d\tau \sqrt{\dot{x}_i^2} \quad (1)$$

を最小にする事で得られる。量子化するには、この作用を補助場  $e(\tau)$  を用いて

$$S = \int d\tau \left[ \frac{1}{2e} \dot{x}_i^2 + \frac{m^2}{2} e \right] \quad (2)$$

と書き直したほうが便利である。すると、時刻  $\tau = 0$  から  $\tau = 1$  の間に点  $x_0^i$  から  $x_1^i$  へ移る遷移振幅は、この作用を重みとした経路積分：

$$P(x_1, x_0) = \int_{x(0)=x_0, x(1)=x_1} \frac{[dx^i(\tau)] [de(\tau)]}{\text{vol}(\text{diff}_1)} e^{-S[x^i(\tau), e(\tau)]} \quad (3)$$

で与えられる。ここで、作用と測度に 1次元の一般座標不変性：

$$x^i(\tau) \mapsto x^i(f(\tau)), \quad e(\tau) \mapsto f'(\tau)e(\tau) + f(\tau)e'(\tau) \quad (f(\tau) \text{ は任意の関数}) \quad (4)$$

がある為に、それに対応する群の体積  $vol(\text{diff}_1)$  で割っておいた<sup>1</sup>。この時、 $e(\tau) = \text{const.} (\equiv T)$  となるゲージ固定を行えば、

$$\begin{aligned} P(x_1, x_0) &\sim \int_0^\infty dT \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{ik(x_1-x_0)} e^{-T(k^2+m^2)/2} \\ &\sim \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{ik(x_1-x_0)} \frac{1}{k^2 + m^2} \end{aligned} \quad (5)$$

となり、自由場の2点関数を正しく再現している。

## 1.2 弦理論とランダム面

上の議論を点粒子から1次元の閉じたひも(閉弦)に拡張する。この時、固有時間を  $\tau$ 、弦のパラメータを  $\sigma$  ( $0 \leq \sigma \leq 2\pi$ ) とすれば、弦の座標は  $x^i(\tau, \sigma)$  と表される。作用は、世界面の面積に置き換わり、

$$S_0[x^i(\xi)] = T \int d^2\xi \sqrt{\bar{\gamma}}, \quad \bar{\gamma}_{ab} \equiv \partial_a x^i \partial_b x_i, \quad \sqrt{\bar{\gamma}} \equiv \sqrt{\det(\bar{\gamma}_{ab})} \quad (6)$$

で与えられる。ここで、 $\xi = (\xi^a) = (\xi^1 = \tau, \xi^2 = \sigma)$ 、また  $T$  は弦の張力 (string tension) に対応する。以下、 $T = 1/2\pi\alpha'$  と書くが、 $\alpha' \rightarrow 0$  ( $T \rightarrow \infty$ ) は、張力が無限大の極限に対応し、弦が点につぶれてしまう極限になっている。弦理論では  $\alpha'$  のみが次元を担う量であるため、以下ではとくに必要のない限り  $\alpha' = 1$  とおく。

さて、上の作用は、補助場  $\gamma_{ab}(\xi) = \gamma_{ba}(\xi)$  ( $a=1, 2$ ) を用いる事で、

$$S[x^i(\xi), \gamma_{ab}(\xi)] = \frac{T}{2} \int d^2\xi \sqrt{\gamma} \gamma^{ab} \partial_a x^i \partial_b x_i \quad (7)$$

とも書ける<sup>2</sup>。この時、弦の軌跡の総和(分配関数)は経路積分により、

$$Z = \int \frac{[dx^i(\xi)][d\gamma_{ab}(\xi)]}{vol(\text{diff}_2)} e^{-S[x^i(\xi), \gamma_{ab}(\xi)]} \quad (8)$$

と書かれる。 $vol(\text{diff}_2)$  で割っているのは、2次元の一般座標変換  $\xi^a \mapsto f^a(\xi)$  に対し、場の次の変換：

$$x^i(\xi) \mapsto f^* x^i(\xi) \equiv x^i(f(\xi)), \quad \gamma_{ab}(\xi) \mapsto (f^* \gamma)_{ab}(\xi) \equiv \partial_a f^c(\xi) \partial_b f^d(\xi) \gamma_{cd}(f(\xi)) \quad (9)$$

<sup>1</sup>作用の不変性は、 $e(\tau)^2$  が1次元の計量になっている事に注意すれば明らかであろう。なお、測度の不変性については講義の際に説明する予定である。

<sup>2</sup> $S_0$  を南部-後藤作用、 $S$  を Polyakov 作用と呼ぶ。(7) の  $\gamma_{ab}$  に対する運動方程式から  $\gamma_{ab} \propto \bar{\gamma}_{ab}$  が示され、これを(7)に代入すれば(6)が得られる。

のもとで、作用と測度が不変だからである (次節参照)。

次に、上のゲージ対称性に対してゲージ固定を行う。ここでは、共形ゲージ：

$$\gamma_{ab}(\xi) = e^{\phi(\xi)} \hat{\gamma}_{ab}(\xi) \quad (10)$$

をとる事にする。ここで、 $\hat{\gamma}_{ab}(\xi)$  は世界面上の固定された計量テンソルである。これにより、3成分あった  $\gamma_{ab}$  のうち、座標変換の自由度に対応する2つが固定され、 $\gamma_{ab}$  の揺らぎは  $\phi(\xi)$  だけで代表されるようになる。この  $\phi(\xi)$  を Liouville 場と呼ぶ。ところが、このゲージ固定は実は十分でなく、背景計量  $\hat{\gamma}_{ab}$  についての共形変換：

$$\xi^a \mapsto f^a(\xi), \quad \text{s.t. } (f^* \hat{\gamma})_{ab}(\xi) = \rho(\xi) \hat{\gamma}_{ab}(\xi) \quad (\rho(\xi) \text{ はある関数}) \quad (11)$$

に対するゲージ対称性が固定されずに残ってしまう。従って、経路積分の測度は結局

$$\frac{[d\gamma_{ab}(\xi)]}{\text{vol}(\text{diff}_2)} = \frac{[d\phi(\xi)]}{\text{vol}(\text{conf}_2)} \quad (12)$$

となる。ここで、 $\text{vol}(\text{conf}_2)$  は、2次元の共形変換群の体積である。

以上の事は、結局、共形ゲージをとって  $\phi(\xi)$  で書き直した理論が2次元の共形対称性を持つべき事を意味している。つまり、弦理論を2次元の場の理論として解釈した場合、書き直された理論は臨界点直上のスケール不変な理論になっていなくてはならない。実際、上の計算を精密に行った場合、共形対称性がえられるのは、 $d = 25$ に限られる事が示される。次節で見るように、Liouville 場  $\phi(\xi)$  自身が空間の座標の一つとみなす事ができる為、弦は合計26次元でのみ consistent に存在できる事がわかる (超対称性などがなく、かつ平坦な時空の場合)。

## 2 弦理論が記述する時空

### 2.1 ランダム面上のくりこみ群と時空の低エネルギー有効理論

さて、これまで平坦なユークリッド空間を考えていたが、これを一般の背景時空まで拡張する。そのとき、作用は一般に

$$\begin{aligned} S[x^i(\xi), \gamma_{ab}(\xi)] \\ = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\xi \left\{ [\sqrt{\gamma} \gamma^{ab} G_{ij}(x) + \epsilon^{ab} B_{ij}(x)] \partial_a x^i \partial_b x^j + T(x) + \alpha' R_\gamma \Phi(x) \right\} \quad (13) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $G_{ij}(x)$  は弦が運動する時空の計量テンソル場、 $B_{ij}(x) = -B_{ji}(x)$  は2階の反対称テンソル場、また  $T(x)$  と  $\Phi(x)$  はそれぞれタキオン場、dilaton 場と呼ばれるスカラー場である。

作用(13)は、 $G_{ij}(x)$ 、 $B_{ij}(x)$ 、 $T(x)$ 、 $\Phi(x)$  を結合“定数”とする非線形シグマ模型とみなせる。前節の議論はこの背景に対してもそのまま適用できる為、結局、弦理論が consistent に存在できる時空は、この非線形シグマ模型の conformal fixed point に対応している事になる。

この議論を進める為、経路積分の測度を定義しておく。もともとの場  $x^i(\xi)$  と  $\gamma_{ab}(\xi)$  は関数空間の元とみなせるが、この関数空間の2点  $(x^i, \gamma_{ab})$  と  $(x^i + \delta x^i, \gamma_{ab} + \delta \gamma_{ab})$  の間の測地距離を

$$ds^2 = \|\delta x^i(\xi)\|^2 + \|\delta \gamma_{ab}(\xi)\|^2 \equiv \int d^2\xi \sqrt{\gamma} \left[ G_{ij}(x) \delta x^i \delta x^j + \gamma^{ac} \gamma^{bd} \delta \gamma_{ab} \delta \gamma_{cd} \right] \quad (14)$$

ととれば、これから関数空間上の測度  $[dx^i(\xi)]_\gamma [d\gamma_{ab}(\xi)]_\gamma$  が2次元の一般座標変換に対して不変なように定義される<sup>3</sup>。上の測地距離は、共形ゲージのもとで

$$ds^2 = \int d^2\xi \sqrt{\hat{\gamma}} e^\phi \left[ G_{ij}(x) \delta x^i \delta x^j + \delta \phi^2 \right] \quad (15)$$

と書けるが、これに対して、 $\phi$  の並進に対して不変な測地距離

$$d\hat{s}^2 = \int d^2\xi \sqrt{\hat{\gamma}} \left[ G_{ij}(x) \delta x^i \delta x^j + \delta \phi^2 \right] \quad (16)$$

を導入すると、これから定義される測度  $[dx^i(\xi)]_{\hat{\gamma}} [d\gamma_{ab}(\xi)]_{\hat{\gamma}}$  は上のものとヤコビアンのみで補正がかかる。

以上の議論をまとめると、結局、分配関数は

$$\begin{aligned} Z &= \int \frac{[dx^i(\xi)]_\gamma [d\gamma_{ab}(\xi)]_\gamma}{\text{vol}(\text{diff}_2)} e^{-S[x^i(\xi), \gamma_{ab}(\xi)]} \\ &= \int \frac{[dx^i(\xi)]_{\hat{\gamma}} [d\phi(\xi)]_{\hat{\gamma}}}{\text{vol}(\text{conf}_2)} e^{-\hat{S}[x^i(\xi), \phi(\xi)]} \end{aligned} \quad (17)$$

となる。ここで、 $\hat{S}[x^i, \phi] (= S[x^i, \gamma_{ab}] - \log(\text{Jacobian}))$  は、一般に次の形をとる:

$$\begin{aligned} \hat{S}[x^i(\xi), \phi(\xi)] &= \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\xi \left\{ \left[ \sqrt{\hat{\gamma}} \gamma^{ab} \hat{G}_{\mu\nu}(x^i, \phi) + \epsilon^{ab} \hat{B}_{\mu\nu}(x^i, \phi) \right] \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \right. \\ &\quad \left. + \hat{T}(x^i, \phi) + \alpha' \int d^2\xi \sqrt{\hat{\gamma}} R_{\hat{\gamma}} \hat{\Phi}(x^i, \phi) \right\} \end{aligned} \quad (18)$$

<sup>3</sup>有限次元の Riemann 多様体  $\mathcal{M} = \{q = (q^i)\}$  に対しては、2点  $q$  と  $q + \delta q$  の間の測地距離を  $ds^2 = g_{ij}(q) \delta q^i \delta q^j$  とおく事で、測度が  $d\mu \equiv \prod_i dq^i \sqrt{\det(g_{ij}(q))}$  と定義できた事を思い出そう。

ここで、 $(X^\mu) \equiv (x^i, \phi)$  ( $\mu=1, \dots, d, d+1$ ) とした。この作用における結合“定数”  $\widehat{G}_{\mu\nu}(X)$ 、 $\widehat{B}_{\mu\nu}(X)$ 、 $\widehat{T}(X)$ 、 $\widehat{\Phi}(X)$  は、これが共形不変なものを与えるという要請を満たさなければならぬ。実際に、くりこみ群のベータ関数を計算してみると、

$$\begin{aligned} 0 &\equiv \beta_{\mu\nu}^{\widehat{G}} = \widehat{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{4} \widehat{H}_{\mu\nu\lambda} \widehat{H}^{\mu\nu\lambda} + 2 \widehat{\nabla}_\mu \partial_\nu \widehat{\Phi} - \partial_\mu \widehat{T} \partial_\nu \widehat{T} + (\alpha' \text{ の高次項}) \\ 0 &\equiv \beta_{\mu\nu}^{\widehat{B}} = -\frac{1}{2} \widehat{\nabla}^\lambda \widehat{H}_{\lambda\mu\nu} + \widehat{\nabla}^\lambda \widehat{\Phi} \widehat{H}_{\lambda\mu\nu} + (\alpha' \text{ の高次項}) \\ 0 &\equiv \beta^{\widehat{\Phi}} = 2\lambda - \frac{1}{6} \widehat{H}_{\mu\nu\lambda} \widehat{H}^{\mu\nu\lambda} + 4 (\widehat{\nabla} \widehat{\Phi})^2 - 2 \widehat{\nabla}^2 \widehat{\Phi} + m^2 \widehat{T}^2 + (\alpha' \text{ の高次項}) \\ 0 &\equiv \beta^{\widehat{T}} = m^2 \widehat{T} - \widehat{\nabla}^2 \widehat{T} + 2 \partial_\mu \widehat{T} \widehat{\nabla}^\mu \widehat{\Phi} + (\alpha' \text{ の高次項}) \end{aligned} \quad (19)$$

となる。ここで、 $\widehat{H}_{\mu\nu\lambda} \equiv \partial_\mu \widehat{B}_{\nu\lambda} + \partial_\nu \widehat{B}_{\lambda\mu} + \partial_\lambda \widehat{B}_{\mu\nu}$  は  $\widehat{B}_{\mu\nu}$  の field strength であり、また、

$$2\lambda = \frac{2}{3\alpha'}(d-25), \quad m^2 = -\frac{4}{\alpha'} \quad (20)$$

である。

実は面白い事に、上の方程式は、次の  $(d+1)$  次元の作用の運動方程式となっている。

$$\begin{aligned} S_{d+1}[\widehat{G}_{\mu\nu}(X), \widehat{B}_{\mu\nu}(X), \widehat{\Phi}(X), \widehat{T}(X)] \\ = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^{d+1}X \sqrt{\widehat{G}} e^{-2\widehat{\Phi}} \left[ 2\lambda - \widehat{R} + \frac{1}{2 \cdot 3!} \widehat{H}_{\mu\nu\lambda} \widehat{H}^{\mu\nu\lambda} \right. \\ \left. - 4 (\widehat{\nabla} \widehat{\Phi})^2 + (\widehat{\nabla} \widehat{T})^2 + m^2 \widehat{T}^2 + O(\alpha') \right] \end{aligned} \quad (21)$$

これは、重力が様々な場と結合した系を表す Einstein-Hilbert 作用に他ならず、弦理論が記述する時空についての低エネルギー有効作用と解釈できる。以下、これの特解を挙げる。

#### 例1：線形 dilaton 時空

$$\widehat{G}_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}, \quad \widehat{B}_{\mu\nu} = 0, \quad \widehat{\Phi} = Q\phi, \quad \widehat{T} = 0 \quad \left( Q \equiv \sqrt{\frac{\lambda}{2}} = \sqrt{\frac{25-d}{6\alpha'}} \right) \quad (22)$$

これより、とくに時空が完全に平坦なとき ( $Q=0$ ) には  $d=25$  ( $d+1=26$ ) でなければならない事がわかる。なお、非線形シグマ模型の作用 (13) が Gaussian である事からもわかるように、上の解は厳密解になっていて、 $\alpha'$  の全次数について成立する。

#### 例2：2次元 (ユークリッド) ブラックホール時空

$$\begin{aligned} \widehat{G}_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu &= \frac{1}{4} [\tanh^2 \phi dx^2 + d\phi^2], \quad \widehat{B}_{\mu\nu} = 0, \\ \widehat{\Phi} &= -\log \cosh r, \quad \widehat{T} = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

これは (19) を満たすが、実は  $\alpha'$  展開の最低次でしか成り立たない。厳密解は共形場理論を用いた解析から求められていて、

$$\begin{aligned}\hat{G}_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu &= (k-2) \left[ \left( \coth^2 \phi - \frac{2}{k} \right)^{-1} dx^2 + d\phi^2 \right], \quad \hat{B}_{\mu\nu} = 0, \\ \hat{\Phi} &= -\log \left[ \sinh x \left( \coth^2 x - \frac{2}{k} \right)^{1/2} \right], \quad \hat{T} = 0\end{aligned}\tag{24}$$

において  $k = 9/4$  とおいたものになる事が知られている<sup>4</sup>。

## 2.2 コンパクト化と T-duality

今  $(d+1)$  次元時空のうち  $n$  次元がトーラス  $T^n$  にコンパクト化した状況を考える。このとき、 $X^\mu = (x^\alpha, y^i)$  ( $\alpha = 1, \dots, D; i = 1, \dots, n$ ) と分解すれば、 $G_{ij}$ 、 $B_{ij}$  についての有効作用は、トーラスの半径を 0 にした極限で (つまり  $y$ -依存性を無視した極限で)、

$$S_D = \int d^D x \sqrt{\det(g_{\alpha\beta})} e^{-2\varphi} g^{\alpha\beta} \text{tr} \left( \partial_\alpha M^{-1} \partial_\beta M \right)\tag{25}$$

$$\left( \hat{G}_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu \equiv g_{\alpha\beta}(x) dx^\alpha dx^\beta + G_{ij}(x) dy^i dy^j \right)\tag{26}$$

と書ける。ここで、 $M(x)$  は  $(2n) \times (2n)$  行列で

$$M \equiv \begin{bmatrix} G^{-1} & G^{-1} B \\ B G & G - B G^{-1} B \end{bmatrix} \quad (G = (G_{ij}), \quad B = (B_{ij}))\tag{27}$$

また、 $\varphi \equiv \Phi - (1/2) \log \sqrt{\det(G_{ij})}$  である。作用  $S_D$  は、

$$\Lambda^T \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\tag{28}$$

をみたす  $SO(n, n; \mathbf{Z})$  の変換  $\Lambda \in S(n, n; \mathbf{Z})$  について

$$M \mapsto M' = (\Lambda^{-1})^T \cdot M \cdot \Lambda^{-1}\tag{29}$$

に対して不変である。この  $SO(n, n; \mathbf{Z})$  を T-duality 群と呼ぶ<sup>5</sup>。

<sup>4</sup> $\alpha'$  の展開は  $1/k$  の展開に対応している。

<sup>5</sup>形式的には (25) は  $SO(n, n; \mathbf{R})$  について不変であるが、講義で説明するように、弦理論ではこれが  $SO(n, n; \mathbf{Z})$  まで破れてしまう。

例:  $n = 1$

この時、 $R = \sqrt{G_{11}}$  はコンパクト化した  $S^1$  の半径になり、 $M = \begin{bmatrix} 1/R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \end{bmatrix}$  の形から、

$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in SO(1, 1; \mathbf{Z})$  に対して半径は

$$R \mapsto R' = 1/R (= \alpha'/R) \quad (30)$$

と変換し、 $1 (= \sqrt{\alpha'})$  を中心にして反転する事が分かる。講義で説明するように、実はこの変換は、弦の重心の  $y^1$  方向の運動量と弦の  $S^1$  に対する巻きつき数を入れ替えるものになっている。また、半径が  $l_s \equiv \sqrt{\alpha'}$  で反転するという事は、弦理論においては基本的に  $l_s$  以上の領域だけ考察すればよいという事を意味している。

### 3 行列模型

本節では、 $d$ 次元の時空にランダム面のアンサンブルを作る手法を概説する。まず、 $N \times N$  エルミート行列に値をとる場  $M(x) = (M_{ab}(x))$  ( $a, b = 1, \dots, N$ ) を導入し、次の分配関数を考える:

$$Z = \int [dM(x)] \exp \left\{ -N \int d^d x \operatorname{tr} \left[ \frac{1}{2} (\partial_i M(x))^2 + \frac{m^2}{2} M(x)^2 - \frac{\lambda}{3} M(x)^3 \right] \right\} \quad (31)$$

この時、場について2次の部分のまわりで摂動展開を行えば Feynman 図が得られるが、その際、場が2個の添え字  $a, b$  を持つ事からプロパゲータは2重線で表され

$$\langle M_{ab}(x) M_{cd}(y) \rangle = \frac{1}{N} \delta_{ad} \delta_{bc} \Delta(x-y) \quad (32)$$

と書かれる。ここで  $\Delta(x-y)$  は点粒子の場合のプロパゲータである:

$$\Delta(x-y) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{ik(x-y)} \frac{1}{k^2 + m^2} \quad (33)$$

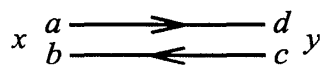


Figure 1: プロパゲータ



一方、相互作用は3点頂点：

$$N \lambda \delta^d(x - y) \delta^d(y - z) \quad (34)$$

であるが、その際向きを保ちながらプロパゲータを結ぶ。

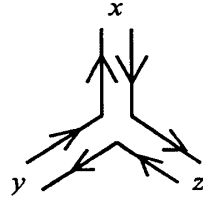


Figure 2: 頂点

また、1つの添え字が縮約するときにはループができるが、それに対しては  $\sum_{a=1}^N 1 = N$  がかかる。

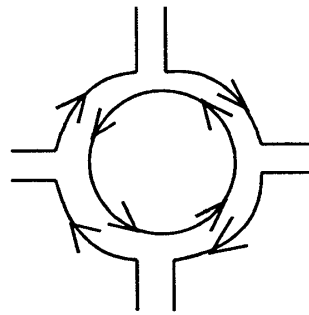


Figure 3: ループ

こうして、1つのグラフは時空の中に網状の(向き付けられた)面を1つ作る事になる。  
また1つのグラフ  $G$  に対する  $N$ -依存性は

$$N^{\#(\text{頂点}) - \#(\text{プロパゲータ}) + \#(\text{ループ})} = N^{\chi(G)} \quad (35)$$

となり、グラフ  $G$  のオイラー数  $\chi(G)$  のみに依るようになる。

以上より、分配関数  $Z$  は、頂点のラベルを  $s$ 、頂点の数を  $A(G) = \sum_s 1$  として、

$$Z = \sum_G N^{\chi(G)} \lambda^{A(G)} \int \prod_{s=1}^{A(G)} d^d x_s \prod_{\langle s', s'' \rangle} \Delta(x_{s'} - x_{s''}) \quad (36)$$

となる。ちなみに、各グラフについて dual グラフをとれば、

$$(\text{頂点}) \leftrightarrow (\text{3 角形}), \quad (\text{プロパゲータ}) \leftrightarrow (\text{辺}), \quad (\text{ループ}) \leftrightarrow (\text{3 角形の頂点}) \quad (37)$$

となり、各グラフは3角形分割された面を表す事になる。

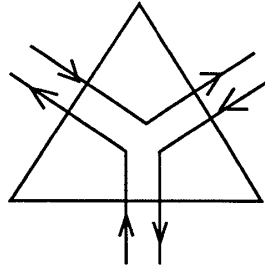


Figure 4: dual グラフ

講義で詳しく触れるが、実は  $d \leq 1$  の場合には厳密に解く事ができ、連続極限 (網の目が細くなる極限、または頂点の数が大きいグラフの寄与が効いてくる極限) で、線形 dilaton 時空を表す。Liouville 場の自由度が入ってくる理由は、 $U(N)$  不変な演算子として

$$\hat{T}(x, \phi) \equiv \frac{1}{N} \text{tr} \delta(M(x) - \phi) \quad (38)$$

などが作れるからである。実際この  $\hat{T}(x, \phi)$  は、連続極限において2節のタキオン場になっている。また、 $d = 1$  の場合に  $x = x^1$  をコンパクト化すると、これはランダム面上の XY 模型と等価になるが、これも厳密に解く事ができ、vortex が凝縮した相で2節の2次元 (ユークリッド) ブラックホールと等価になる。

## [参考文献]

### 1 節・2 節

- ・ A.M. Polyakov, 'Gauge Fields and Strings,' harwood academic publishers (1987)
- ・ M.B. Green, J.H. Schwarz and E. Witten, 'Superstring Theory I & II,' Cambridge University Press (1987)
- ・ J. Polchinski, 'String Theory I & II,' Cambridge University Press (1998)

### 3 節

- ・ E. Brézin and S.R. Wadia (eds), 'The Large  $N$  Expansion in Quantum Field Theory and Statistical Physics: From Spin Systems to 2-Dimensional Gravity,' World Scientific (1993)