

# Commensurability と 励起ギャップ

押川 正毅 (東京工業大学 物性物理学専攻)

URL: <http://www.stat.phys.titech.ac.jp/~oshikawa/index-j.html>

e-mail: [oshikawa@stat.phys.titech.ac.jp](mailto:oshikawa@stat.phys.titech.ac.jp)

2002年8月

## 1 はじめに

この講義では、格子上の量子多体系について議論する。世話人の方から、なるべく研究の最前線に近い話題を、と言うリクエストもあったので、実際私が最近まで研究してきた、また今も考え続けている問題について紹介しようと思う。主題は、格子上で定義された量子力学的な多粒子の系の定性的な性質と粒子数 (粒子密度) の間の、非常に一般的な (と思われる) 関係である。

なるべく予備知識のいらない講義を考えたが、やはりテーマの性質から言って、受講前に第二量子化についてある程度知識のあることが望ましい [1]。また、量子力学の抽象的な状態空間や演算子の概念に慣れていることも必要だろう。例えば、Hubbard モデルの Hamiltonian を見て、その意味がわかるような状態であって欲しい。一方、Hubbard モデルについての摂動計算などの計算手法はとりあえず知らなくても受講には差し支えないだろう。

この講義の一つの中心は、7節で議論する Lieb-Schultz-Mattis (LSM) の方法である。これは非常に強力な議論だが、技術的には簡単であり第二量子化さえ理解していれば計算も十分フォローできるはずである。受講後にでも、是非自分で手を動かして計算をフォローしてみたい。

それ以前の数節は、LSM の方法によって導かれる結論の物理的意味を理解するための準備とも言える。まず2節で大ざっぱな問題意識を述べる。次に、3節で、量子スピン系における磁化プラトーと言う興味深い現象について紹介する。この現象について、4節では量子多体問題の観点からその意義を考える。ここで、系の定性的な性質と、粒子数の関係についてある「予想」を提出する。この講義の目標は、その予想について証明または反証を行おうと言うことである。予め言っておくと、その目標は現時点では不完全にしか達成されていない。私も現在考え続けている問題だが、この講義を受講した皆さんの中から何か良いアイデアが出てくれば素晴らしいと思う。

本題に入る前に、5節では量子多体系と古典統計力学系の対応について紹介し、量子多体系における励起ギャップについてこの観点から論じている。ただし、この節の内容

はまともに扱うとそれだけで一本のまとまった講義を要するであろう。ここでは結果だけをかなり荒っぽく紹介している。ここでの内容は、現代の理論物理学の一つのベースになっている考え方なので、特に理論をやりたい人はこの講義とは別に勉強して頂きたい [2, 3]。一方、本講義では特に技術的に5節の内容を用いているわけではないので、良くわからない場合は「そんな話もある」程度に思っておいてくれてそれ以下に支障はないはずである。次の6節では、Nambu-Goldstoneの定理について述べる。これも、講義の主題からは外れているので、証明について詳しく述べることはしないし、フォローしきれなくても以下に問題はない。しかし、この節の内容は、本講義の主題の物理的な意義を理解する上で助けになるだけでなく、Nambu-Goldstoneの定理の証明と次のLSMの議論との類似がわかるようにしたい。私が個人的にこの問題を面白いと思う理由の一つは、物理学における様々な(一見かなり遠い)概念が結び付いてくるところである。そんな面白さも感じてもらえれば幸いである。

その次に、ようやく本題のLSMの方法に入り、1次元の場合について上記の予想を(部分的に)証明する。このテキストはここでほとんど終わっているが、実際の講義ではその後時間の許す限り、高次元のケースなど、講義の主題に沿ったいくつかの話題を紹介したい。これらの話題がこのテキストに掲載されていないのは、私の遅筆と言う以外に、現在進行中の研究であり私の理解自体が今でも変化し続けていると言う要因もある。

## 2 電子系と様々な相

物性物理学の課題は、物質の示す多彩な性質の解明である。様々な物質は多数の原子からなり、その組み合わせによって無数の物質が存在し、それぞれに個性がある。一方で、多数の異なる物質が共通の性質を示すと言う事実もある。

物質の電氣的な特性について注目しよう。金属は基本的に電気を良く通す導体であり、それに対して電気をあまり流さない絶縁体、中間的な半導体などが存在する。これらの境界線は有限温度では必ずしも明確ではないが、絶対零度の極限と言う理想的な状況では、導体と絶縁体は明確に区別できると考えられる。さらに、多くの導体は十分低温で超伝導状態になる。

多くの物質中では電流を運ぶのは電子なので、このような電氣的性質の違いは、物質中の電子状態の違いに対応している。直観的に言えば、導体は電子が移動できる、いわば流体的な状況に対応している。一方、絶縁体は、電子が動けない状態に対応している。いわば固体である。もちろん、ここでは単に直観的なイメージを述べているだけであり、例えば「電子の流体とは何か?」と言うことをきちんと定義してはいない。実のところ、(少なくとも私の中では)未だに完全な答えがあるわけではない。この講義を通じて、そう言うことも考えてみたい。

さらに直観的な話を続けよう。絶縁体では、電子が簡単に動けない状態になっている。従って、絶縁体の基底状態に何らかの外力を加えて、状態を変化させるには一定以上のエネルギーが必要であろう。量子力学的には、基底状態のエネルギーと最低励起状態のエネルギーに差があり、その分のエネルギーを与えないと系の状態が変化しないことに対応している。このような基底状態と最低励起状態のエネルギー差を「励起ギャップ」と呼ぶ。すなわち、絶縁体では励起ギャップが有限であると期待される。一方、導

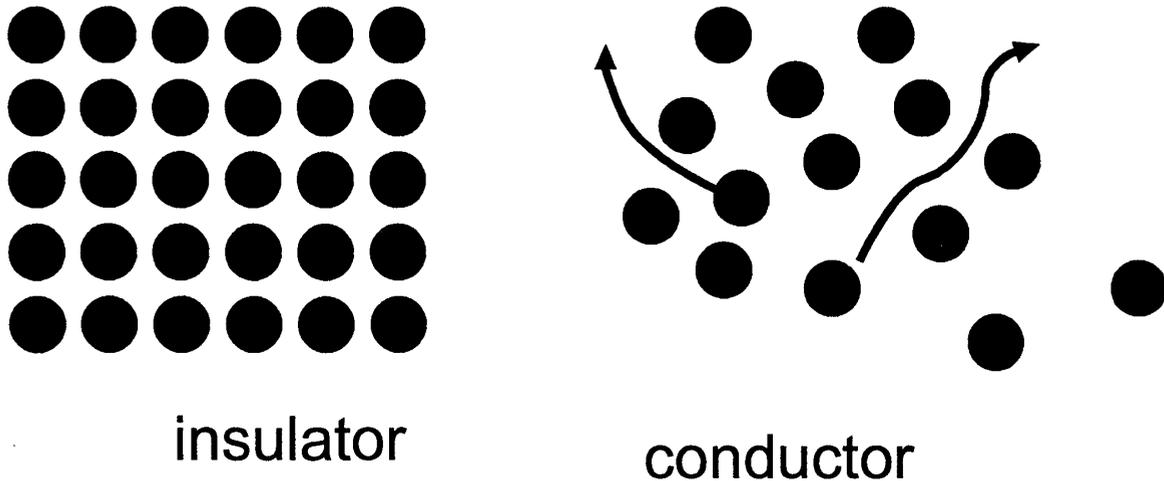


Figure 1: 導体と絶縁体のイメージ。導体は電子の流体に対応し、絶縁体は電子が「固まった」状態に対応する。

体では電子が動いて電流を運べる状態なので、無限小のエネルギーでも電子が移動して状態が変化する、すなわち励起ギャップはゼロであり基底状態の上に連続的な励起状態のスペクトルが存在すると期待される。実際、電子の間の相互作用を無視して単純なバンド理論を適用すれば、絶縁体では有限のギャップが存在し、導体(金属)ではギャップがゼロになる。しかし、相互作用のある場合にこのような話が成立するかどうかは単純な問題ではない。

実際の電子の間にはクーロン斥力と言う相互作用が働いている。相互作用の効果が強い場合の電子状態の理論は難しいが、同時に高温超伝導などの多くの興味深い物理現象を理解するのに重要だと考えられている。電子間の相互作用の効果を調べるために、最も簡単なモデルとして Hubbard モデルに代表されるような格子上の電子系を考えることがある。これは、電子が格子点の上になら存在することができず、ある格子点から隣の格子点に移動する、と言うようなモデルである。具体的には、Hubbard モデルの Hamiltonian は

$$\hat{H} = -t \sum_{(jk)\alpha} (\hat{c}_{j\alpha}^\dagger \hat{c}_{k\alpha} + \hat{c}_{k\alpha}^\dagger \hat{c}_{j\alpha}) + U \sum_j \hat{n}_{j\uparrow} \hat{n}_{j\downarrow} \quad (1)$$

で与えられる。例えば  $d$  次元立方格子を考えることにしよう。 $j, k$  はその上のサイト(格子点)のラベルである。 $\sum_{(j,k)}$  は隣接格子点についての和を表す。 $\alpha = \uparrow, \downarrow$  は電子のスピンを表す。ここで、 $\hat{c}_{j\alpha}$  は、サイト  $j$  でスピン  $\alpha$  の電子を「消す」いわゆる消滅演算子であり、 $\hat{c}_{j\alpha}^\dagger$  は逆に電子の生成演算子である。

$$\hat{c}_{j\alpha}^\dagger \hat{c}_{k\alpha}$$

は、サイト  $k$  の電子を消して、同じスピンを持つ電子を格子点  $j$  に作るので、電子の移動を表す。また、

$$\hat{n}_{j\alpha} = \hat{c}_{j\alpha}^\dagger \hat{c}_{j\alpha}$$

は格子点  $j$  においてスピン  $\alpha$  を持つ電子の個数演算子である。電子はフェルミ粒子なので、 $\hat{n}_{j\alpha}$  の固有値は 0 または 1 である。これらより、Hubbard モデルの Hamiltonian の第一項は隣接サイト間の電子の移動、第二項は同一サイトにおける電子間の相互作用を表す。 $U > 0$  ならば同一サイトにおける電子間の斥力、 $U < 0$  ならば引力を表す。

実際の物質では、もちろん電子は連続的な空間中を運動し、また原子核とも相互作用するのではるかに複雑な問題である。Hubbard モデルは、実際の物質の電子状態を高度に単純化したものである。しかし、Hubbard モデルには電子の移動と相互作用と言う二つの要素が共存し、モデルの単純さにもかかわらず、そのふるまいを正確に知るのは非常に難しい。Hubbard モデルには様々な一般化が考えられる。例えば、格子の形を三角格子等に変更する、隣接サイトだけではなく次近接サイト (正方格子の場合、単位格子の対角線方向) への電子の移動を取り入れる、同一サイトだけではなく隣接サイト間での相互作用を取り入れる、などである。これらの変更によって系の性質が大きく変わる場合もある。

実際の物質には多かれ少なかれ不純物などのランダムな要素がある。このようなランダムさの与える効果も物理学の重要なテーマであるが、この講義ではランダムな要素は考えず、周期的な格子上のモデルに限って考えることにする。また、実際の実験はもちろん有限温度の環境下で行われるが、この講義では絶対零度の極限と言う理想的な場合に絞って議論することにする。

一方、Hubbard モデルのような格子上の多体系として、フェルミ粒子ではなくボース粒子を考えることもできる。これは電子系には対応しないが、様々な物理系のモデルとなる。もちろん一般的には、系の性質は粒子がフェルミ粒子であるかボース粒子であるかに強く依存する。

### 3 量子スピン系と磁化プラトー

絶縁体では、2節で考察したように、電子が動けなくなってしまうと考えられる。しかし、電子の持っているスピンの自由度は生き残っていて、物質の磁性に寄与する。従って、磁性体のモデルとして、格子点上にスピンのみが存在し、これらが相互作用すると言うものを考える。典型的なものとして、例えば Heisenberg モデル

$$\mathcal{H} = J \sum_{\langle jk \rangle} \vec{S}_j \cdot \vec{S}_k \quad (2)$$

がある。すなわち、隣接サイトのスピンの等方的な相互作用をしている。 $J$  は相互作用の強さを表す。

スピンの簡単な (古典的な) イメージとしては、磁石の向きを矢印で表して考えることができる。古典的なスピン (「矢印の向き」) が相互作用するようなモデルを古典スピン系と呼ぶ。まず古典スピンで考えれば、(2) の意味を理解しやすいだろう  $J < 0$  では隣接スピンの向きが同じ向きを向いている方がエネルギーが低く、 $J > 0$  では反対方向を向いている方がエネルギーが低い。これらをそれぞれ強磁性的、反強磁性的な結合と呼ぶ。

しかし、実際のスピンは量子力学的なものであり、古典的なイメージで捉えきれない。量子力学の特徴の一つとして、物理量が演算子で表され、異なる物理量どうしは

一般には互いに非可換であるということがある。実際、スピンは角運動量の交換関係  $[S^x, S^y] = iS^z$  (およびこれらの巡回置換) で特徴づけられており、異なる成分どうしは非可換である。このために様々な興味深い性質が生じる [4]。

スピン量子数を  $S$  として  $\vec{S} = (\hat{S}_j^x, \hat{S}_j^y, \hat{S}_j^z) = S\vec{n}$  と置くと、 $S \rightarrow \infty$  の極限で

$$\vec{n}^2 = \frac{S(S+1)}{S^2} \rightarrow 1 \quad (3)$$

$$[n^x, n^y] = \frac{i}{S} n^z \rightarrow 0 \quad (4)$$

となる。従って、 $S \rightarrow \infty$  の極限では、非可換性は効かなくなり、スピンを規格化した  $\vec{n}$  を成分が互いに可換な単位ベクトルとして扱っても良いだろう。すなわち、(単純に言えば)  $S \rightarrow \infty$  の極限では量子スピンは古典スピンのように帰着すると考えられる。

逆に、電子の持つスピン  $1/2$  は量子性の強い極限と考えられる。スピン  $1/2$  の場合、スピンは  $\vec{S} = \vec{\sigma}/2$  で与えられる。ただし、 $\vec{\sigma} = (\hat{\sigma}^x, \hat{\sigma}^y, \hat{\sigma}^z)$  であり、各成分の行列表示は

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^x &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \hat{\sigma}^y &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ \hat{\sigma}^z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

となる。これらを Pauli のスピン行列と呼ぶ。

さて、反強磁性体では、各スピンの打ち消しあって、全体としての磁化はゼロになっている。ここに外から磁場を掛けた場合の変化を考察しよう。仮に相互作用がなければ、スピンの磁場の方向を向いた状態が基底状態となる。しかし、このような状態は反強磁性的な相互作用と競合するため、磁場が弱い場合はエネルギーが高い。系の基底状態は磁場を強くして行くにつれて連続的に変化し、磁化が増加して行くと考えられる。全てのスピンの磁場の方向を向いてしまうと磁化が最大になり、それ以上磁化が増加することはない。磁化を磁場の関数としてグラフにしたものを磁化曲線と呼ぶ。これは実験的にもよく測定されているものである。典型的な磁化曲線を図2に示す。

さて、古典的にはこの磁化曲線は図3のように理解できる。すなわち、ネール状態に磁場を掛けると、ネール構造を保ちながらスピンの傾き、この傾き角が連続的に増加することによって磁化が増加する。もちろん、量子スピン系の場合は古典スピンによる計算結果とは定量的には異なる磁化曲線を与えるが、磁化曲線の大きな形は、例えば量子性の強い一次元  $S = 1/2$  反強磁性体であっても同様である。

一方で、最近では量子スピン系で磁化曲線が変わった振舞いを示す場合が注目されている。例えば、 $S = 1/2$  から成る反強磁性体である  $\text{NH}_4\text{CuCl}_3$  について実験的に測定された磁化曲線 [6] では、以下のような予想外のふるまいが見られた。温度が高い場合は、普通の磁化曲線とあまり違いが見えない。しかし、低温になるに従って階段状の構造がはっきりと現れている。絶対零度の極限では、図4のように磁化曲線に完全に平坦な部分が出現すると考えられる。このような、磁化曲線の途中に現れる平坦部分をプラトーと呼ぶ。他にも様々な物質やモデルでプラトーの出現が実験的、理論的に研究されている [7]。

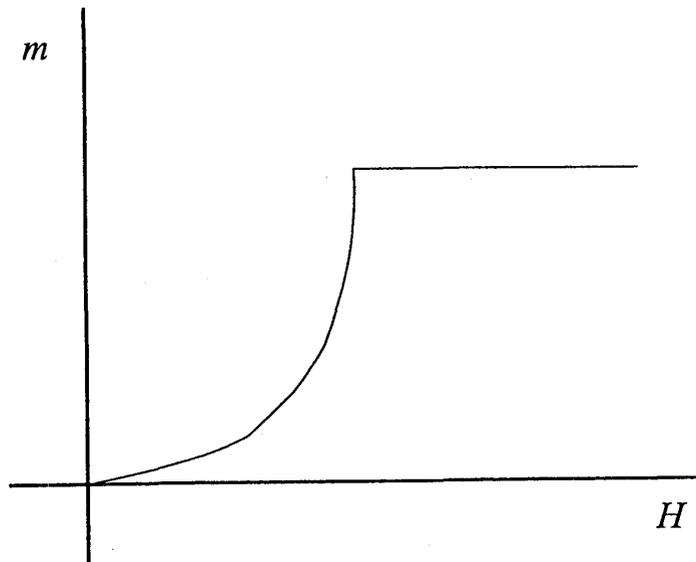


Figure 2: 典型的な磁化曲線。磁場  $H$  の増加とともになめらかに増加する。

多くの系に現れるプラトーに関する普遍的な法則として、プラトーにおける磁化の量子化<sup>1</sup>が提案されている [8]。それは、スピン  $S$  から成る系においては、プラトー上でのスピン 1 個あたりの磁化  $m$  は

$$n(S - m) = \text{整数} \quad (6)$$

という関係式を満たすというものである。ただし、 $n$  は基底状態の単位格子に含まれるスピンの数である。磁化曲線におけるプラトーは量子ホール効果に一見類似している。もちろん、物理現象としては全く異なるのだが、理論的には共通する側面もある。例えば、量子化則 (6) の著しいところは、量子化された磁化の値は相互作用の強さなど系の詳細によって連続的に変化することがなく安定であることである。このような性質を理解する有力な可能性として、トポロジカルな量子化という考え方がある。すなわち、トポロジカルな量はそもそも連続変形に対して安定なので、これが物理量と関連がつけば安定性は自然に保証されるのである。量子ホール効果がその典型的な例である [9] ことは良く知られているが、後で見るように、プラトーにおける磁化の量子化も一種のトポロジカルな量子化と考えることができる。

さて、上で述べた量子化されたプラトーは、古典スピンの描像では理解し難いものである。図 3 のような考え方をすると、プラトーは傾き角が特定の角度で固定されることに相当する。しかし、傾き角が特定の角度に固定される理由は考えにくい。また、量子化則 (6) はそもそも磁化を  $\hbar$  の単位で測ったものなので、古典論では理解できないだろう。

<sup>1</sup>ここで言う「量子化」と言うのは量子ホール効果の場合と同様に、物理量が特定の値に固定される、という意味である。

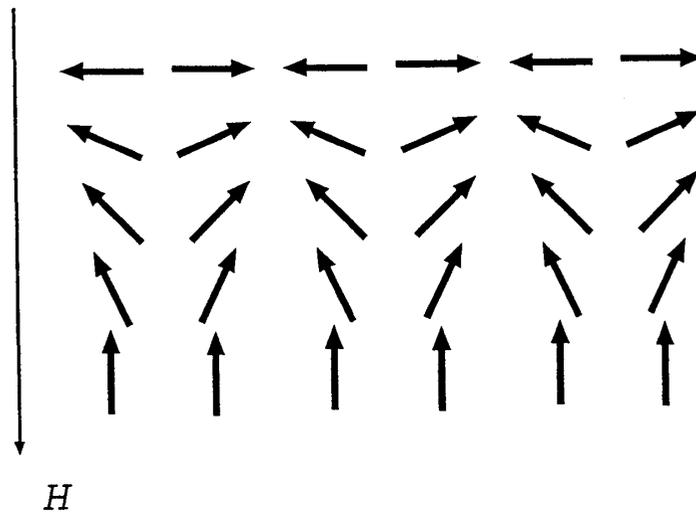


Figure 3: 古典的抗強磁性体の磁化過程。スピンの磁場の方向に傾く角度が磁場  $H$  の増加とともに連続的に変化する。

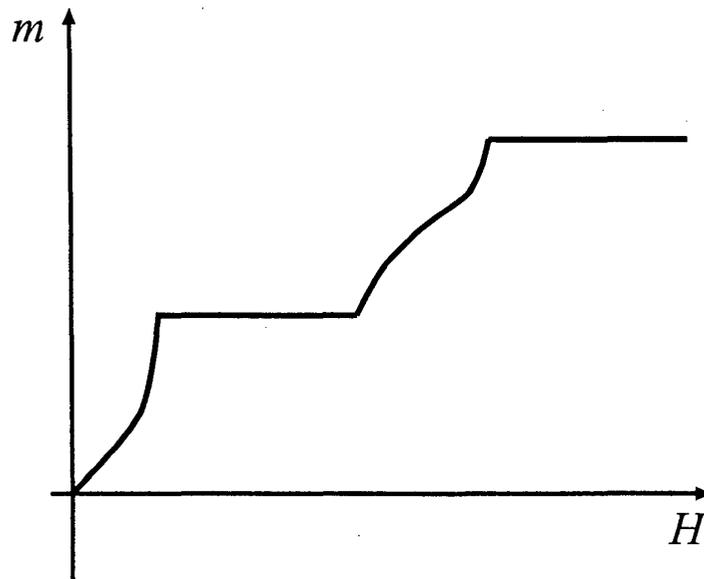


Figure 4: プラトー（平坦部）を持つ磁化曲線の例。

## 4 量子化則と commensurability

プラトーの出現と量子化則を理解するために、量子スピン系を別の観点から考察してみよう。簡単のため、再び  $S = 1/2$  から成る系を考える。このとき、全系の状態は各スピンの  $z$  成分を対角化するような  $2^N$  個の基底  $|\uparrow\uparrow\uparrow\dots\rangle$  の重ねあわせで表せる。さて、ここで仮想的な粒子を導入して、 $\downarrow$  を「その場所に粒子がない」、 $\uparrow$  を「その場所に粒子がいる」と解釈することにしよう。量子力学では、同種粒子に区別がつかないので、このような対応関係が正確に成立する。

スピン  $1/2$  の場合、ある場所には粒子が一個しか入れないことになる。これは一見フェルミ粒子的であるが、フェルミ粒子の本質的な特徴は同じ場所に粒子が一個しか入れないということよりも、むしろ粒子を入れ換えたときにマイナスの符号が付くことにある。スピン系を上のような対応で粒子と見なした場合は、フェルミ粒子ではなく、入れ換えても符号の変わらないボース粒子に対応する。もう少し具体的に言うと、例えばスピンの上昇演算子  $\hat{S}^+$  は粒子がない状態  $\downarrow$  から存在する状態  $\uparrow$  に変化させるので、粒子の生成演算子  $\hat{a}^\dagger$  に対応すると考えられる。フェルミ粒子の場合、異なるサイトの生成演算子どうしは反可換である ( $\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_k^\dagger = -\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_j^\dagger$ )。しかし、異なるサイトのスピン演算子どうしは可換なので、フェルミ粒子の生成演算子とは同一視できない。ただし、次元の場合は Jordan-Wigner 変換 [19] によってフェルミ粒子系に対応させることもできるが、ここでは触れない。一方、異なるサイトのボース粒子の生成演算子は互いに可換なので、この点で自然にスピン演算子と対応する。しかし、ボース粒子の場合はあるサイトに何個でも入れるのに対し、スピン  $1/2$  を「粒子」と見なした場合は一つのサイトには一つしか入れないという問題が残る。同じサイトの粒子の間に強い斥力相互作用を導入して、一つのサイトに粒子は一つしか入れない (ハードコア条件) とすれば、スピン  $1/2$  に対応させることができる [5]。

上のような対応によると、スピンの  $z$  成分はサイトに存在する粒子の個数 (ハードコア条件より、実際は  $0$  と  $1$ ) に対応し、 $\hat{S}^z = \hat{n} - 1/2$  と書ける。ただし、 $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$  は粒子の個数を表す演算子である。スピン間の相互作用のうち、 $\hat{S}_j^z \hat{S}_k^z$  の項は近接粒子間の相互作用エネルギーを表すことになる。反強磁性的な相互作用の場合は、反発的なものになる。一方、 $\hat{S}_j^+ \hat{S}_k^-$  の項は、 $k$  サイトの粒子を消して  $j$  サイトに作る、粒子の移動 (ホッピング) を表すことになる。従って、量子スピン系は相互作用する量子力学的な粒子の系と等価である。例えば、スピン  $1/2$  から成るスピン系のハミルトニアン

$$\hat{H} = J_\perp \sum_{(j,k)} (\hat{S}_j^x \hat{S}_k^x + \hat{S}_j^y \hat{S}_k^y) + J_\parallel \sum_{(j,k)} \hat{S}_j^z \hat{S}_k^z \quad (7)$$

は、次のようなハミルトニアンを持つボース粒子の系と等価である。

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \frac{J_\perp}{2} \sum_{(j,k)} (\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_k + \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_j) + U \sum_j \hat{n}_j (\hat{n}_j - 1) \\ & + J_\parallel \sum_{(j,k)} (\hat{n}_j - \frac{1}{2})(\hat{n}_k - \frac{1}{2}) \end{aligned} \quad (8)$$

ここで、 $\hat{a}_j, \hat{a}_j^\dagger$  はサイト  $j$  でのボース粒子の消滅、生成演算子である。ボース粒子の個数

を表す演算子である。ただし、 $U \rightarrow +\infty$ の極限を取り、同一サイトに二個以上のボース粒子が存在できないようにしてハードコア条件を実現する。

今考えているハミルトニアンは、 $z$ 方向の全磁化  $M = \sum_j \hat{S}_j^z$  と可換である。すなわち、全磁化  $M$  は保存量である。これは、ハミルトニアンが  $z$  軸回りの回転に対して不変であるという  $U(1)$  対称性を持っていることによる。もちろん、実際の磁性体ではこの対称性は必ずしも成立していないが、近似的に成立する場合も多いので、本稿ではこの  $U(1)$  対称性の存在するケースに限って考えることにする。粒子系として考えると、全磁化は全粒子数に対応する。電子系や液体ヘリウムなどの本来の粒子系では実際、全粒子数は保存量になっている場合が多い。スピン系において、 $z$  方向に掛けられた外部磁場  $H$  はハミルトニアンへの付加項  $-HM$  で表される。このような外部磁場は、粒子系における化学ポテンシャルに対応する。

このような観点から、磁性体の磁化過程とプラトーの量子化則を再検討してみよう。粒子系としてみると、磁化過程というのは化学ポテンシャルの関数としての粒子数の変化に他ならない。磁化が滑らかに増加するような「通常」の磁化過程は、化学ポテンシャルの変化に伴って粒子の個数が連続的に変化する状況に対応する。絶対零度においては、これは基底状態に粒子を一個追加するのに必要なエネルギーが無限に小さいことを意味する。一方、磁化曲線のプラトーは、化学ポテンシャルをある程度変化させないと粒子の個数が全く変化しない状況に対応している。これは、基底状態に粒子を一個追加するのに有限の（ゼロより大きい）エネルギーが必要であるということである。すなわち、2節の議論を振り返れば、仮にスピンを記述するために導入した「粒子」が電荷を持っていると考えるとプラトーはギャップが有限の「絶縁体」状態に、また非プラトー状態は、ギャップがゼロの「導体」または流体状態に対応すると考えられる。

プラトーの量子化条件 (6) は、有限のギャップを持つ安定な基底状態は特別な磁化の値でのみ存在できるということの意味する。スピン系を粒子の系と見なすと、この量子化条件は自然に理解できる。たとえば先に考えた  $S = 1/2$  の場合を考えるとわかりやすいが、一般に、 $S - m$  はサイトあたりの粒子数に対応する。すなわち、量子化条件 (6) とは、

周期的な系で、励起ギャップが存在する「絶縁体」状態になるためには基底状態の単位格子あたりの粒子数が整数であることが必要

という主張に対応する。これを「整合性条件」と呼ぼう。これは直観的に考えても非常に自然であり、単位格子あたりの粒子数が整数である場合は安定な状態がつくれそうである。このような場合を粒子数が commensurate (整合) と呼ぶ。一方、そうでない incommensurate な場合は粒子が落ち着けるような安定な状態は考え難い。この場合には、基底状態の上に任意の低いエネルギーを持つ (ギャップレスな) 励起が連続的に存在することが期待される。

実際、相互作用のないフェルミ粒子系では commensurate の場合に限りバンドが全て占有され有限のギャップを持つことができる。このように、粒子数が格子とマッチしているかどうかを commensurability (整合性) と呼ぶことにしよう。励起ギャップと commensurability の関係は、粒子の統計性には特に依存しないと思われる。もちろん、ここまでで理論的に commensurability と励起ギャップの関係をきちんと示したわけでは

全くない。この時点では一種の「予想」である。この予想をめぐっての、いくつかの理論的な試みを紹介するのが本講義の目的である。

## 5 量子臨界現象と励起ギャップ

量子多体系におけるギャップの有無を、統計力学との対応から一般的に考えてみよう。

まず、古典統計力学の代表的なモデルである Ising モデルを考える。Ising モデルでは、やはり格子点(サイト)上にスピンの配置されている。サイト  $i$  におけるスピン  $\sigma_i$  は  $\pm 1$  の値を取るものとする。これはスピンの上向き/下向き 2つの状態を取れるということに対応している。そして、各スピンの状態の取る状態の確率分布は、次のようなカノニカル分布で与えられる。

$$P(\{\sigma_j\}) = \frac{1}{Z} \exp\left[-\frac{1}{k_B T} \mathcal{E}(\{\sigma_j\})\right] \quad (9)$$

ただし  $T$  は温度、 $k_B$  は Boltzmann 定数であり、また  $Z$  は確率  $P$  の和が 1 になるように定めた規格化因子である。 $Z$  は統計力学では分配関数と呼ばれる重要な量である。

Ising モデルでは、古典的なエネルギーとして

$$\mathcal{E}(\{\sigma_j\}) = -K \sum_{\langle jk \rangle} \sigma_j \sigma_k \quad (10)$$

を考える。(ここでは強磁性の場合  $K > 0$  を考えよう。) すなわち、隣接スピンの同じ向きを取るとエネルギーが低くなる。Ising モデルではスピンが取れる状態が二つだけであり、連続的な方向を取れないという点では量子力学的なスピンを考えているとも言える。しかし、Ising モデルの Hamiltonian には互いに非可換な演算子が現れないため、Ising モデルは古典スピン系と分類するのが普通である。

空間次元が 2 次元以上の Ising モデルでは、次のような事実が知られている。

- 十分小さな温度は、全体のスピンの向きが自発的にそろった、秩序相になる。
- 十分高い温度では、スピンの向きが全体的に乱雑になる、無秩序相になる。
- 中間のある温度  $T_c$  で 2 次の相転移が起こる。すなわち、 $T > T_c$  では無秩序相、 $T < T_c$  では秩序相である。

Ising モデルにおけるある物理量の期待値は

$$\langle A \rangle \equiv \sum_{\{\sigma_j\}} A P(\{\sigma_j\}) \quad (11)$$

で与えられる。これを用いてスピンの相関関数を次のように定義する。

$$f_{jk} \equiv \langle \sigma_j \sigma_k \rangle - \langle \sigma_j \rangle \langle \sigma_k \rangle \quad (12)$$

ただし、第二項は自発磁化の生じる秩序相でのみ寄与する。この相関関数は、その名の通りスピンの向きの相関を表していて、 $\sigma_j$  と  $\sigma_k$  の距離  $r_{jk}$  が大きくなるにつれて減少する。通常は、距離とともに

$$f_{jk} \propto \exp\left(-\frac{r_{jk}}{\xi}\right) \quad (13)$$

のように指数関数的に減少する。この時の  $\xi$  を相関距離と呼ぶ。相関距離は温度によって変化するが、 $T \rightarrow T_c$  で無限大に発散する。 $T = T_c$  では、ある臨界指数  $\eta$  に従い、

$$f_{jk} \propto \left(\frac{1}{r_{jk}}\right)^\eta \quad (14)$$

のように距離の巾乗で減少する。

さて、本講義の主題である格子上の量子多体系と、上述の Ising モデルのような古典統計力学は一見全く別の問題のように見える。しかし、実はこれらの問題は密接に結びついているのである [2, 3]。  $d$  次元空間中の量子多体系を経路積分で扱うと、場の全ての可能な時間変化について積分することになる。これは、 $d+1$  次元の古典統計力学系において、全てのスピン配置について足し上げるのと類似した問題になる。一方、 $d+1$  次元の古典統計力学系は、転送行列の方法で考えることができる。転送行列の働く方向を「時間軸」だと思えば、この転送行列はある時刻から、次の時刻の状態の変化を記述するものになる。従って、転送行列は空間  $d$  次元の量子系の Hamiltonian に対応するものになる。

すなわち、ある  $d$  次元量子多体系には、それに等価な  $d+1$  次元古典統計力学系が存在し、逆もまた然り<sup>2</sup>とすることになる。上述の  $d+1$  次元の古典 Ising モデル (10) に対しては、 $d$  次元の量子横磁場 Ising モデルが対応することが知られている。

$$\hat{H} = -K \sum_{\langle jk \rangle} \hat{\sigma}_j^z \hat{\sigma}_k^z - \Gamma \sum_j \hat{\sigma}_j^x \quad (15)$$

ここで、 $\hat{\sigma}^z, \hat{\sigma}^x$  は Pauli のスピン行列である。これらのスピンは  $d$  次元の格子上で定義されている。Hamiltonian(15) の第二項を横磁場と呼ぶ。この量子横磁場 Ising モデルは  $\hat{\sigma}^x$  と  $\hat{\sigma}^z$  という非可換な演算子を含んでいるため、通常の Ising モデルと異なり量子スピン系に分類される。実際、通常の Ising モデル (10) では基底状態は全てのスピンが同じ向きを向いた状態であることは自明であるが、量子横磁場 Ising モデルでは基底状態を求めるのも非自明な問題になる。

横磁場は、スピンの上下を反転させる効果を持つ。つまり、スピンの上下が確定した状態は、 $\hat{\sigma}_j^z$  の固有状態

$$\hat{\sigma}_j^z |\uparrow\rangle_j = +|\uparrow\rangle_j \quad (16)$$

$$\hat{\sigma}_j^z |\downarrow\rangle_j = -|\downarrow\rangle_j \quad (17)$$

<sup>2</sup>実際にはもちろんそんなに単純ではなく、例えば量子多体系における位相の効果で完全に古典的な統計力学系にマップできない例も存在する。

である。しかし、それらに  $\hat{\sigma}_j^x$  を作用させると、

$$\hat{\sigma}_j^x |\uparrow\rangle_j = |\downarrow\rangle_j \tag{18}$$

$$\hat{\sigma}_j^x |\downarrow\rangle_j = |\uparrow\rangle_j \tag{19}$$

とスピン状態は反転する。従って、横磁場はスピンの秩序を乱す働きをする。このような、演算子の非可換性による秩序の乱れの効果を「量子ゆらぎ」と呼ぶ。この横磁場 Ising モデルにおける量子ゆらぎは、古典 Ising モデルにおける熱ゆらぎに対応している。大きな横磁場  $\Gamma$  は、古典 Ising モデルにおける高い温度  $T$  に対応している。

さらに、相関距離  $\xi$  と励起ギャップ  $\Delta$  は一般に

$$\Delta \propto \frac{1}{\xi} \tag{20}$$

と言う関係にある。以上をまとめると次のような対応になる。

$d$ 次元量子多体系	$d+1$ 次元古典統計力学系
量子ゆらぎ	熱ゆらぎ
経路積分	全ての古典的配置に関する和
Hamiltonian	転送行列
励起ギャップ $\Delta$	相関距離の逆数 $1/\xi$
量子力学的な観測期待値	統計力学的な期待値 (熱平均)

古典 Ising モデルでは、温度  $T$  の変化によって秩序相と無秩序相の間で相転移が起きることを先に述べた。従って、上述の対応関係より、量子横磁場 Ising モデルでも横磁場  $\Gamma$  を変化させることにより、 $\Gamma > \Gamma_c$  で無秩序相、 $\Gamma < \Gamma_c$  で秩序相となり、臨界点  $\Gamma = \Gamma_c$  で相転移が起きることになる。これは、量子系において絶対零度で量子ゆらぎの効果によって起きる量子相転移の一例となっている。

さて、相関距離と励起ギャップの関係より、量子横磁場 Ising モデルでは一般の横磁場  $\Gamma$  に対しては有限の励起ギャップ  $\Delta > 0$  が存在することになる。一方、臨界点  $\Gamma = \Gamma_c$  では、対応する古典 Ising モデルでの相関距離の発散を反映して、ギャップが消失する。これはあくまでも一例であるが、一般にギャップの消失は量子臨界点の特徴である。

量子横磁場 Ising モデルの場合は、 $\Gamma$  を  $\Gamma_c$  から少しでも動かすとギャップが有限になる。このように、量子臨界点は Hamiltonian に含まれるパラメータが特別の値を取る場合にのみ生じるのが一般的である。この観点からすると、量子多体系の励起ギャップが消失するのはむしろ特殊なケースであり、パラメータを特に調節しなければ励起ギャップは有限になると期待される。

ところが、磁化プラトーの現象ではこれがむしろ逆になっていて、一般の磁化では励起ギャップがゼロであり、特定の磁化でのみ励起ギャップが生じる。ただし、実験的に直接コントロールできるのは磁化ではなく磁場なので、有限の範囲の磁場に対してギャップの有限なプラトー相が実現される。一方、プラトー相以外の領域に注目すれば、ある臨界的な磁場の値だけではなく有限の範囲の磁場に対して系がギャップレスとなることには変わりはない。これは上で述べた一般論からするとむしろ不思議なことなのである。

磁化プラトーの問題に限らずとも、物性物理に現れる多くの物質あるいはモデルは、特にパラメータを調節しなくてもギャップレスになっている場合が多い。典型的な例としては、金属がある。統計力学的な観点からすると、このように「自然に」ギャップレスになっている系には、何かしら理由があるはずだと言うことになる。このような、「系をギャップの生成から守るメカニズム」としては、あまり多くが知られているわけではない。incommensurability (粒子数が格子と非整合であること) はそのようなメカニズムの一つである、と言うのが4節で立てた予想である。

## 6 Nambu-Goldstone の定理

本講義の主題に入る前に、「系をギャップの生成から守るメカニズム」として重要な、Nambu-Goldstone の定理 [10, 11] について述べよう。この定理は、

短距離相互作用をする系において、連続的な対称性が自発的に破れると、基底状態の上にギャップレスの励起が存在する。

と言うものである。対称性の自発的な破れとは、Hamiltonian が対称性を持つ (ある変換に対して不変) であるが、基底状態がその対称性を持たない (同じ変換に対して不変でない) ことを指す。

この定理は、物理学において最も重要な定理の一つであり、幅広い適用範囲を持つ。例えば、量子スピン系の例として、XXZ モデル (7) を考えよう。 $d$  次元の立方格子の上にスピンを配置した、 $J_{\perp} > J_{\parallel} > 0$  の反強磁性体を考える。 $d \geq 2$  では、基底状態は Néel 秩序を持つ。すなわち、スピンの向きが  $xy$  平面内で特定の方向を向き、反強磁性体なので隣接サイト間でスピンの向きは交互に反転する。これは、スピン空間における  $z$  軸周りの回転対称性と言う連続的な対称性を自発的に破れている。この時のスピンの期待値を自発磁化と呼ぶ。

もちろん、元のモデル (7) が  $z$  軸周りの回転について対称なので、Néel 状態では、スピンは  $xy$  平面内のどの方向を向いても良い。従って、スピンの向きに対応して無限個の基底状態が縮退していることになる。スピンの期待値をこれらの縮退した基底状態全てについて平均すると、当然ゼロになってしまう。自発磁化を議論するには、特定の基底状態を取り出す必要がある。これを理論的に行うには、特定の方向の Néel 秩序を誘起するような外場を導入して、熱力学極限を取ってから外場をゼロにする極限を考えるのが便利である。具体的には、外場  $h$  を含む Hamiltonian を

$$\mathcal{H}(h) \equiv \mathcal{H}_{XXZ} - h \sum_j (-1)^{s_j} \hat{S}_j^x \quad (21)$$

とする。ただし、 $\mathcal{H}_{XXZ}$  は元の XXZ モデルの Hamiltonian (7) であり、 $s_j$  は格子点がどちらの副格子に属するかに応じて 0 か 1 の値を取る。この Hamiltonian を  $L^d$  の大きさの格子上で考え、スピンの期待値

$$m_s = \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{L \rightarrow \infty} \langle S_0^x \rangle \quad (22)$$

を考えると、秩序相では  $\hbar \rightarrow 0$  としたにも関わらず  $m_s > 0$  となる。これが自発磁化を表す。最初に外場を加えて熱力学的極限を考えたために、特定の基底状態を一つ選び出したことになる。

さて、この基底状態の上に低エネルギーの励起が存在するかどうかを考えよう。もともと、Hamiltonian は  $z$  軸周りの回転に対して不変であった。基底状態を  $z$  軸まわりに一様に回転すると、別の基底状態になる。そこで、基底状態を小さな振幅で、ゆっくりと「ひねる」ことを考えよう。つまり、各スピンを  $z$  軸周りに微小回転するのだが、回転角が場所によって異なるようにするのである。この操作は、ユニタリ演算子

$$\hat{U}_{\vec{q}} = \exp [i\epsilon \hat{S}^z(\vec{q})] \quad (23)$$

によって表すことができる。ここで、 $\vec{r}_j$  をサイト  $j$  の位置として

$$\hat{S}^z(\vec{q}) \equiv \sum_j \cos(i\vec{q} \cdot \vec{r}_j) \hat{S}_j^z \quad (24)$$

である。 $\vec{q} = 0$  とすると一様な回転を表すが、有限の波数  $\vec{q}$  はスピンを場所によって異なる角度で回転することに対応する。 $\vec{q}$  を小さくすれば、系をゆっくりひねることになる。

そこで、小さな  $\vec{q}$  について  $\hat{U}_{\vec{q}}$  を基底状態  $|\Psi_0\rangle$  に掛けてやれば、低エネルギーの状態を作れることが期待できる。回転の振幅  $\epsilon$  も小さくすると、もちろん得られる状態はもとの状態に近づくが、

$$\hat{U}_{\vec{q}}|\Psi_0\rangle = |\Psi_0\rangle + i\epsilon \hat{S}^z(\vec{q})|\Psi_0\rangle + O(\epsilon^2) \quad (25)$$

なので、微小回転によって新たに生じる状態として

$$|F(\vec{q})\rangle = \hat{S}^z(\vec{q})|\Psi_0\rangle \quad (26)$$

を考えれば良いことになる。実はこの状態は、Feynman が超流動液体ヘリウムにおける励起状態を研究するのに用いた変分波動関数に対応している [12]。

本講義の主題ではないので詳しい議論は文献 [13, 14] に譲るが、 $XXZ$  スピン系について、次の不等式を厳密に示すことができる。

$$\begin{aligned} \lim_{\hbar \rightarrow 0} \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\langle F(\vec{q})|\mathcal{H}(\hbar)|F(\vec{q})\rangle}{\langle F(\vec{q})|F(\vec{q})\rangle} - \langle \Psi_0|\mathcal{H}(\hbar)|\Psi_0\rangle \leq \\ \frac{2dJ_{\perp}(\rho_x + \rho_y)}{m_s^2} \sqrt{\rho_x[1 + \lambda\gamma(\vec{q})] + \rho_z[\lambda + \gamma(\vec{q})]}\sqrt{1 - \gamma(\vec{q})} \end{aligned} \quad (27)$$

ただし、 $\lambda = J_{\parallel}/J_{\perp}$

$$\rho_{\alpha} \equiv - \lim_{\hbar \rightarrow 0} \lim_{L \rightarrow \infty} \langle \Psi_0 | \sum_{j,k} S_j^{\alpha} S_k^{\alpha} | \Psi_0 \rangle \quad (28)$$

$$\gamma(\vec{q}) \equiv \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \cos q_i \quad (29)$$

と定義する。

$\vec{q}$  をゼロに近づけると、不等式の右辺は  $|\vec{q}|$  に比例して小さくなる。一方、不等式の左辺は試行状態  $|F(\vec{q})\rangle$  のエネルギー期待値と基底状態のエネルギーの差を表している。 $\vec{q} \rightarrow 0$  とすれば、いくらでも小さなエネルギーの状態が存在することになる。ただし、エネルギー期待値が小さいと言うだけでは  $|F(\vec{q})\rangle$  が  $\vec{q} \rightarrow 0$  で基底状態  $|\Psi_0\rangle$  に近づくとする可能性もある。しかし、今の場合は、 $|F(\vec{q})\rangle$  は、基底状態を基準として運動量  $\pm\vec{q}$  を持つことが簡単にわかるので、 $|F(\vec{q})\rangle$  は基底状態  $|\Psi_0\rangle$  と直交している。

以上より、XXZ モデルは実際に基底状態の上に連続的な低エネルギー励起を持ちギャップレスであることが示される。これが XXZ モデルの場合の Nambu-Goldstone の定理に相当する。なお、不等式 (27) の右辺は  $1/m_s^2$  の因子を含んでいるため、自発的対称性の破れがあり自発磁化  $m_s$  がゼロでない場合に限りギャップレスであることが証明される。

## 7 1次元の場合: Lieb-Schultz-Mattis の方法

さて、本題である整合性条件の議論に入ろう。多粒子系が超流動 (超伝導) 状態にある場合、量子力学の位相に関する  $U(1)$  対称性が自発的に破れているため、Nambu-Goldstone の定理が適用できる。しかし、もちろん導体が必ず超伝導体であるとは限らないので、4節での予想を論ずるには Nambu-Goldstone の定理では不十分である。実際、常伝導金属相では、格子上の多粒子系は何ら連続的な対称性を破っていないように見える。従って何か別のことを考える必要がある。ここでは、1次元の場合について、Lieb-Schultz-Mattis (LSM) の議論 [15] の応用 [8] を論じよう。LSM の論文は既に 40 年以上前に発表されたものだが、その後何度か新しい応用が見いだされてきた。

1次元多粒子系のハミルトニアンが全粒子数を保存し、かつ並進対称であると仮定する。更に、時間反転対称性または、サイト間のホッピングの存在するリンクについての鏡映対称性のどちらかを持つことも仮定する。以下では、簡単のため具体例として

$$\begin{aligned} \hat{H} = & -t \sum_j (\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_{j+1} + \hat{a}_{j+1}^\dagger \hat{a}_j) \\ & + U \sum_j \hat{n}_j (\hat{n}_j - 1) + V \sum_j \hat{n}_j \hat{n}_{j+1} \end{aligned} \quad (30)$$

を考察するが、上の仮定を満たす一般の一次元に容易に適用できる。

周期的境界条件を課した長さ  $L$  の系を考え、このときの系の基底状態を  $|\psi_0\rangle$  としよう。もちろん、一般にスピン系の基底状態  $|\psi_0\rangle$  は複雑な状態であるが、それを具体的に求めなくても以下の議論には支障がない。これは6節での議論と同様である。実際、これからの議論は、6節における Nambu-Goldstone の定理の証明に通じるものがある。すなわち、基底状態をゆっくり「ひねって」低エネルギーの励起状態を構成しようと言うのが基本的アイデアである。大きな違いは、Nambu-Goldstone の定理の場合、基底状態での自発磁化の存在を仮定しているのだから、基底状態の微小なひねりによって、基底状態と異なる状態を作ることができたのである。しかし、自発磁化がない場合、微小なひね

りで新しい状態を作れる保証がない。(実際、 $m_s = 0$  ならば6節の証明は当然ながら通用しない。)

そこで、回転角がゆっくり変化するが、回転角自体は小さくないようなひねりを用いてみよう。次のような演算子  $\hat{U}$  を定義する。

$$\hat{U} \equiv \exp \left[ 2\pi i \sum_j \frac{j}{L} \hat{n}_j \right] \quad (31)$$

この演算子は、サイト  $j$  の粒子の持つ量子力学的な位相を  $2\pi j/L$  だけ変化させる働きを持つ。具体的には、生成消滅演算子は

$$\hat{U} \hat{a}_j \hat{U}^{-1} = e^{-2\pi i j/L} \hat{a}_j \quad (32)$$

のように変換される。スピン系に戻って考えれば、サイト  $j$  のスピンを角度  $2\pi j/L$  だけ  $z$  軸まわりに回転させることになる。系の対称性により一様な位相の変化 ( $z$  軸回りの回転) はエネルギーを変えないが、この  $\hat{U}$  は位相変化が場所によって異なるので一般には状態のエネルギーを変えるであろう。しかし、系が十分大きければ、角度変化はゆっくりになるので  $\hat{U}$  によるエネルギーの増加は小さくなることが期待できる。実際、(32) より

$$\hat{U} \hat{H} \hat{U}^{-1} - \hat{H} = -t \sum_j \left[ \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_{j+1} (e^{-2\pi i/L} - 1) + \hat{a}_{j+1}^\dagger \hat{a}_j (e^{2\pi i/L} - 1) \right] \quad (33)$$

となる。従って、

$$\langle \psi_0 | \hat{U} \hat{H} \hat{U}^{-1} - \hat{H} | \psi_0 \rangle = \sum_j \left[ \frac{2\pi i t}{L} \langle \psi_0 | \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_{j+1} - \hat{a}_{j+1}^\dagger \hat{a}_j | \psi_0 \rangle + O\left(\frac{1}{L^2}\right) \right] \quad (34)$$

であり、時間反転対称性またはリンクに関する鏡映対称性を用いると [] 内の第一項はゼロになる。リンクが  $L$  個あるので、全体として上式は  $O(1/L)$  で押さえられることになる。

このことは、 $\hat{U}|\psi_0\rangle$  が基底状態から測って  $O(1/L)$  の低いエネルギーを持った状態であることを意味している。従って、 $\hat{U}$  によってゆっくり位相を捻ると、実際に低エネルギーの状態を与えることがわかった。しかし、実はこれだけでは何も言えたことにならない。上の結果は、 $\hat{U}|\psi_0\rangle$  が  $L \rightarrow \infty$  で元の基底状態  $|\psi_0\rangle$  に漸近する可能性とも矛盾しないのである。真に低エネルギーの励起状態の存在を証明するには、 $\hat{U}|\psi_0\rangle$  が  $|\psi_0\rangle$  と異なる状態であることを示す必要がある。

そのために、1サイトの並進移動演算子  $\hat{T}$  を考える。系の全運動量の演算子  $P$  は  $\hat{T} = e^{i\hat{P}}$  によって定義される。定義より、格子系での運動量  $\hat{P}$  は  $2\pi$  の整数倍の不定性がある。さて、 $\hat{T}$  の  $\hat{U}$  による変換を求めると、

$$\hat{U} \hat{T} \hat{U}^{-1} = \hat{T} \exp \left[ \frac{2\pi i}{L} \sum_j \hat{n}_j \right] = \hat{T} e^{2\pi i \nu} \quad (35)$$

となる。ただし、 $\nu = \sum_j \hat{n}_j / L$  は1サイトあたりの粒子数である。このことから、 $\hat{U}|\psi_0\rangle$  は基底状態から  $2\pi\nu$  の運動量を持っていることがわかる。運動量  $\hat{P}$  はエルミート演算

子であるから、異なる固有値に属する状態は互いに直交する。従って、 $\nu$ が整数でない限り、 $\hat{U}|\psi_0\rangle$ は基底状態と直交することになる！このようにして、 $\nu$ が非整数の場合、有限の系ではサイズ $L$ を大きくすると $1/L$ オーダー以下の低いエネルギーを持つ励起状態の存在が証明された。 $p, q$ を互いに素な整数として、 $\nu = p/q$ と表される場合、上の操作を繰り返すことにより、基底状態を含めて $q$ 個の低エネルギー状態の存在が示される。これは、無限系では次の二つの可能性を意味する。

1. 基底状態の上に連続的に励起状態が存在し、ギャップがゼロ。
2. 並進対称性が自発的に破れ、基底状態が $q$ 重に縮退する。

後者の場合はギャップが存在しても良いが、基底状態の単位格子は $q$ サイトを含むことになるので、基底状態の単位格子あたりの粒子数は整数となり、確かに整合性条件を満足する。上の議論を振り返ってみると、 $\hat{U}|\psi_0\rangle$ の運動量が正確に $2\pi\nu$ で与えられることが重要であるが、これは低エネルギー状態を構成するための捻り角は系を一周した時 $2\pi$ またはその整数倍しか変化できないと言うトポロジカルな制限から来ている。従って、整合性条件も一種のトポロジカルな量子化と考えることができる。

ただし、上述の議論は有限系に基づくものであり、熱力学的極限における励起状態の取り扱いが厳密でない。厳密には、無限系における励起状態は、無限の基底状態に対する有限の範囲における操作で構成するべきものである。この方針での証明は上のように単純ではなくなるが、可能である [17, 18]。

さて、もともとLSMの方法はスピン系に対して適用されてきたものであるが、上で示したように一次元の量子多体系に対して自然に適用できる [16]。その結果、量子多体系におけるギャップの存在と整合性の関係という非常に普遍的な構造が導かれる。LSMの議論は粒子の統計に依存しないことに注意されたい。

さらに、フェルミ粒子系に対しては、構成された低エネルギー励起状態の運動量 $2\pi\nu$ はいわゆるフェルミ運動量と関連づけることができ、上の議論の結果はフェルミ液体論で知られているLuttingerの定理の一次元版として解釈できる [16]。この方法は摂動論によらないので、従来の証明よりも広い適用範囲を持つ。

このようにLSMの方法は広い適用範囲を持つ強力なものであるが、実は、元々の磁化プラトーの量子化条件の証明にはなっていないことにも注意する必要がある。磁化プラトーの存在は、磁化（全粒子数）を変化させるような励起についての有限のギャップの存在と等価である。一方、LSMの議論で構成する低エネルギー状態は基底状態と同じ磁化を持つ状態である。従って、磁化を変えないセクターでのみギャップがゼロであるような状況が実現されれば、プラトーの量子化条件に対する反例が存在する可能性がある。LSMと相補的な方法としてボソン化法に基づく場の理論 [19] における対称性に着目した議論 [8] がある。この理論の枠内では全粒子数（磁化あるいは「電荷」）を変えるような励起も変えないような励起も同時にギャップレスになる。すなわち磁化プラトーの量子化条件は常に成立する。ボソン化法に基づく一般論は非常に広い範囲のモデルに対して適用できると考えられるが、常に成立するわけでもない。例えばHeisenberg強磁性鎖では低エネルギー励起がLorentz不変性を持たず、ボソン化法によるアプローチは成立しない。ただし、この場合はプラトーの量子化条件の反例にもなっていない。ボソン化法の適用範囲外で、量子化条件に対する反例が構成できるのか、あるいは（何らか

の仮定のもとで) プラトーの量子化条件自体を証明できるのか、は今のところ未解決の重要な問題である。

## 8 高次元に向けて

LSMの方法は、二次元以上では(少なくともそのままの形では)破綻してしまう。これは、 $d$ 次元で $L \times L \times \dots \times L$ の系を考えると、ひねりによる各リンクのエネルギー増加は $O(1/L^2)$ であるがリンクの数は体積 $L^d$ に比例するので全体のエネルギーの増加は $O(L^{d-2})$ になってしまう。従って、 $d \geq 2$ ではこの議論からは何も言えない。

一方、次のような見方もできよう。整合性条件は相互作用のない自由フェルミ系で成立する。相互作用の効果は、一般に低次元であるほど現れやすいが、最も次元の低い1次元でもLSMの議論を用いて整合性条件を示すことができた。従って、一般の次元でも整合性条件が成立すると期待できる。(言うまでもないが、これは厳密な議論では全くない。)

果たして2次元以上でも整合性条件の「予想」は成立するのだろうか。LSMの議論を高次元に拡張する試みとしては、筆者のもの[20, 21]がある。一方、2次元では整合性条件に対する「反例」がいくつか提案されている。(例えば、[22, 23].)ただし、これらは周期的境界条件のもとでは(ある意味で)並進対称性を破るような基底状態を持ち、LSM的な議論には矛盾しない。しかし、この「並進対称性の破れ」は物理的なオプザーバブルで検出できず、非物理的であると考えられている。これらについては講義でも簡単に触れることができただけであるが、詳しくは文献を参照されたい。

## 謝辞

2002年物性若手夏の学校の運営に関わった方々、特にこの講義の世話人の宇田川将文さんと椎野克さん、および講義に参加して頂いた皆さんに感謝します。この講義の内容に関しては多くの方々と有益な議論に基づいていますが、特に文献[8, 16]はIan Affleck, 山中雅則両氏との共同研究です。研究の一部は文部科学省科学研究費補助金によるものです。

## References

- [1] 参考書として、例えば フェッター、ワレッカ 「多粒子系の量子論」
- [2] 参考になるレビューとして、J. B. Kogut, Rev. Mod. Phys. **51**, 659 (1979).
- [3] 最近の代表的な教科書として、永長直人 「物性論における場の量子論」(岩波書店)
- [4] 田崎清明, 講義ノート「量子スピン系の理論」物性研究 **58-2**, 121 (1992). [余談ですが、私が M1 の時に出席した物性若手夏の学校の講義ノートです。この講義がきっかけで私はスピン系を研究することになりました。]

- [5] T. Matsubara and H. Matsuda, *Prog. Theor. Phys.* **16**, 569 (1956).
- [6] W. Shiramura, K. Takatsu, B. Kurniawan, H. Tanaka, H. Uekusa, Y. Ohashi, K. Takizawa, H. Mitamura and T. Goto, *J. Phys. Soc. Jpn.* **67**, 1548 (1998).
- [7] 押川正毅、戸塚圭介、山中雅則、*日本物理学会誌* **54** 巻 第 10 号, 814 (1999).
- [8] M. Oshikawa, M. Yamanaka and I. Affleck, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 1984 (1997).
- [9] M. Stone ed., *Quantum Hall Effect*, World Scientific (1992).
- [10] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, *Phys. Rev.* **122**, 345 (1961).
- [11] J. Goldstone, *Nuovo Cim.* **19**, 154 (1961).
- [12] R. P. Feynman, *Statistical Mechanics* (Perseus Books)
- [13] T. Momoi, *J. Phys. Soc. Jpn.* **63**, 2507 (1994).
- [14] S. Stringari, *Phys. Rev. B* **49**, 6710 (1994).
- [15] E. H. Lieb, T. Schultz, and D. J. Mattis, *Ann. Phys. (N.Y.)* **16**, 407 (1961).
- [16] M. Yamanaka, M. Oshikawa and I. Affleck, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 1110 (1997).
- [17] I. Affleck and E. H. Lieb, *Lett. Math. Phys.* **12**, 57 (1986).
- [18] H. Tasaki, private communications (1997).
- [19] 川上則雄、梁成吉 *共形場理論と1次元量子系 (新物理学選書)*、岩波書店 (1997).
- [20] M. Oshikawa, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 1535 (2000).
- [21] M. Oshikawa, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 3370 (2000).
- [22] L. Balents, M. P. A. Fisher and S. M. Girvin, [arXiv:cond-mat/0110005](https://arxiv.org/abs/cond-mat/0110005).
- [23] G. Misguich, D. Serban and V. Pasquier, [arXiv:cond-mat/0204428](https://arxiv.org/abs/cond-mat/0204428).