複素力学系と量子カオス

首藤 啓
東京都立大学 大学院理学研究科
shudo@phys.metro-u.ac.jp

1. 複素力学系と半古典論

多項式写像 $z_{n+1} = z_n^2 + c$ に代表される複素力学系は，ジュリア集合・マンデルブロー集合の名前で知られる美しいフラクタル図形を生み出す．フラクタル図形そのものは，さまざまな物理現象に普遍的に現れ，物理学者にとっていまや何の違和感も感じないが，複素力学系そのものは，フラクタルを体感するための抽象的な例題でこそあれ，物理現象の記述手段として意識されることはあまりない．複素領域の力学は純粋に数学的な対象としては意味はあっても，「観測可能なもの」のみを対象とする物理とは接点を見出しにくい，ということがその理由のひとつとして挙げられるかもしれない*．

一方，複素力学系の研究自身も，物理現象を解析・解釈することを目的として発展してきたわけではないため，仮に，ある特定の物理現象の中に複素力学系と関連しそうなものが見つかったとしても，複素力学系の中にそれを理解するための手法なり結果が容易されている必然性は全くない．

ここでは，主にこの10年あまりの間に進展した多次元複素力学系の基礎理論をもとに，複素力学系が，「カオス的トンネル効果」に象徴される非可積分系の量子現象を記述する (恐らく) 必要にしてかつ十分な，そしてもっとも自然な古典対応物になっていると考えられる証拠をいくつかの厳密な結果と共に紹介したい．特に，複素力学系の中にあるいくつかの未解決問題が，カオス系の純量子効果を定性的に分類することに直結していることを強調する．

2. 近可積分系の古典量子化

カオス系の純量子効果が問題になってくるのは，系が近可積分にあるときである．近可積分系の問題を考える前に，完全可積分系と双曲系という2つの理想極限を振り返っておく．

完全可積分系の固有状態はトーラス上に局在する．すなわち，完全可積分系の固有状態は半古典極限で，

$$W_I(q,p) = \frac{1}{(2\pi)^n}\delta(I - I(q,p)) \tag{1}$$

となる．ここで，$W(q,p)$ はウィグナー関数である．一方，トーラスが位相空間上に全く存在しない，理想カオス系の固有関数は，半古典極限で古典リュービル測度に漸近する，すなわち，

$$W_E(q,p) = \frac{\delta(E - H(q,p))}{\int dqdp\, \delta(E - H(q,p))} \tag{2}$$

となることが予想され (Berry-Voros の予想)，いつくかの理想力学系に対しては厳密な証明が与えられている．いずれの場合も，古典位相空間の中の不変構造が固有状態の対応物であることは共通する．カオス系の場合，位相空間には，周期軌道をはじめとして無数の不変構造が存

---

* 複素古典力学には，一般に，連続時間をもつ複素古典力学と，離散時間をもつ複素写像とが考えられるが，ここで，複素力学系といった場合は，後者のものを指すことにする．

在し，スカーの存在など依然として明確な説明の与えられていないものもあるが，上記予想は概ね正しいと信じられている．

それに対して，準周期的運動とカオス的運動とが混在している近可積分系での固有状態は多くの点でまだよくわかっていない．そのような中で，最も素朴な考え方は，位相空間上，トーラス領域とカオス領域とはそれぞれ独立に量子化されている，と考えるものであろう．実際，この描像は，近可積分系の固有関数には，トーラス領域を量子化しているものか，さもなければ，カオス領域に広がったものか，いずれかが現れ，両者が渾然一体と混じったようなものは存在しない，という数値計算の観察事実に支えられている．近可積分系でのレベル統計を議論する際，Berry-Robnik 公式と呼ばれる完全可積分系とカオス系をつなぐ，一種の内挿する公式が知られているが，これは，**トーラス領域とカオス領域に対する量子状態を全く独立に重ね合わせる**ことを前提に導出されるものである [1]．近可積分系のレベル統計の数値計算結果も，この内挿公式が，かなりの精度で，純粋に量子力学的に計算されたものを再現することから，トーラス領域とカオス領域とがそれぞれ別々に量子化される，という描像を少なくとも第 0 近似的には支持する [2]．

しかしながら，この考え方には，近可積分系に関する問題の中で，最も大事な (と同時に難しい) 点が全く考慮されていない点で不満が残る．というのは，近可積分系の位相空間上に存在するトーラス領域とカオス領域とは，一般に，互いに複雑な入れ子構造を作っており，系のパラメータを動かすことなどによってそれぞれの構造を独立にコントロールすることはできない，それぞれが互いに絡み合って混在していることこそ近可積分系の位相空間の本質であるからである．

量子論では不確定性関係があるため，固有関数は，位相空間上，無限に細かい構造を作ることができない．そのため，トーラス領域とカオス領域とはさらに混じり合い境界が曖昧になることが予想される．例えば,「トーラスを量子化している」と見られる固有関数は，トーラス上にそのほとんどの確率密度を局在させているものの，その裾がカオス領域に入ったところでは必ずカオス領域の影響を受ける．一方,「カオスのみを量子化している」はずの固有関数も，カオス領域全体に広がることができるばかりでなく，その裾がトーラスにかかった辺りではトーラス領域にしみ込むことができるはずである．つまり，近可積分系では，一見，トーラスとカオスのいずれかに局在しているかのように見える固有関数も，実際にはそのひとつの状態の中に，トーラス・カオス両方の性質を具備していることになる．この事実こそが，近可積分系の波動関数の特徴付けるものであって，この点を無視し，それぞれのエルゴード成分を独立に処理してしまうと，近可積分系固有の面白さは半減してしまう．

量子論は，古典的に遷移不可能な不変集合の間どうしであっても波動効果を使うことにより遷移が可能になる．仮に，古典的に遷移不可能な波動効果すべてを引っくるめて,「トンネル効果」と呼ぶことにすると（特に，位相空間の不変構造間のトンネル効果の場合，動的トンネル効果，と呼ばれることが多い），近可積分系の量子論の最も大きな問題は，トーラスとカオスという，質的にまったく異なる不変集合がトンネル効果を伝っていかに結合するか？ということになるだろう．

3. 複素力学系の収束定理と不変測度

系が双曲的な場合，固有関数は，(2) で与えられるように，半古典極限で古典的リュービル測度に漸近する．エネルギー固有値の半古典公式である，Gutzwiller の跡公式も，古典リュービル測度に（正確にはそのサポートに）稠密に存在している不安定周期軌道を量子化条件として

用いる.

それに対して，系が近可積分にある2次元保測写像（混合位相空間をもつ）では，KAMトーラスによりカオス領域は分断され，双曲系のような位相空間全面をカバーするエルゴード的な測度の存在は，当然ながら期待できないし実際存在もしない.

ところが，力学系を複素領域に拡張すると，驚くべきことに，実領域に制限した混合位相空間では有り得ない，位相空間全体を覆うエルゴード的な測度が存在する. 以下では，この事実を主張するBedford-Smillieの定理を紹介する. このような測度の存在が厳密に証明されるのは，今のところ多項式の自己同型写像，あるいは，それに非常に近い系に限られるが，数値計算の観測結果からは，より広い系に対しても同様のことが期待できそうな状況にある. 厳密な結果が得られているのは，例えば，以下のエノン写像：

$$f \equiv f_{c,b} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 + c - by \\ x \end{pmatrix} \tag{3}$$

である. ここでは，半古典論を通した，量子・古典の対応に興味があるので，面積保存の場合，すなわち，$|b| = 1$の場合のみを想定しているが，以下の結果は，$|b| \neq 1$を含めて広く成り立つ.

まず，Bedford-Smillieが得た，複素領域内の力学系の不変測度に関する最も基本的な主張は以下の「収束定理」である[7].

定理1(Bedford-Smillie) Mを$J^{\pm}$内の局所1次元部分多様体，あるいは，ある複素1次元代数的集合とするとき，ある正数cが存在して，

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{2^n}[f^{\mp n}M] = c \cdot dd^c G^{\pm} \tag{4}$$

ただし，

$$G^{\pm}(x,y) \equiv \lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{2^n} \log^+ \|f^n(x,y)\| \tag{5}$$

は，滞留点集合

$$K^{\pm} \equiv \mathbf{C^2} \setminus U^{\pm} \quad ただし, U^{\pm} \equiv \{(x,y) |\ \| f^{\pm}(x,y) \to +\infty\ (n \to +\infty)\} \tag{6}$$

に対するグリーン関数で，$dd^c u \equiv 2i \sum_{j,k} \partial u/\partial z_j \partial \bar{z}_k dz_j \wedge d\bar{z}_k$で定義される複素ラプラシアンである. また，$[M]$は，$M$の積分カレントであり，$[M](\phi) = \int_M \phi|_M$で与えられる.

エノン写像は，非線形性を表すパラメータcの変化に応じて，双曲系から混合位相空間へと移り変わるが，上記，収束定理は，エノン写像のパラメータがいかなるときにも成立する. すなわち，適当な多様体（数学的には上記の仮定を満たす）を初期条件して写像の反復を繰り返すと，どんな多様体でも，必ず，$dd^c G^{\pm}(x,y)$の台へ収束する，そしてその事実は，**KAMトーラスとカオス領域とが実面に共存する近可積分系においても成立する**. 実面に制限された力学系では，明かに上記と類似は成立しない. 実近可積分系では，カオス領域がKAMトーラスによって分断されており，カオス領域内にある任意の初期値集合がたった1つの不変集合に収束することは明らかに有り得ない. このことから，Bedford-Smillieの収束定理が，複素力学系固有の著しい性質を主張していることがわかる.

ここで，$J \equiv J^+ \cap J^-$によって定義されるジュリア集合（ただし，$J^{\pm} \equiv \partial K^{\pm}$）は，力学系から定義されるグリーン関数とと$G^{\pm}(x,y)$以下のような関係で結ばれている. すなわち，グリーン関数$G^{\pm}(x,y)$から(1,1)-カレント

$$\mu^{\pm}(x,y) \equiv \frac{1}{2\pi} dd^c G^{\pm}(x,y) \tag{7}$$

を定義すると，supp $\mu^{\pm} = J^{\pm}$ となり [7]，さらに，$\mu \equiv \mu^{+} \wedge \mu^{-}$ によって与えられる μ は f-不変な確率測度になる [7]．また，一般に $J^{*} \equiv \mathrm{supp}\ \mu \subset J$ となる [7]（f が双曲的な場合は，$J^{*} = J$）が言える．さらに，

定理 2(Bedford-Smillie) μ は混合的，かつ，双曲的測度である．

実の力学系の場合と同様，混合性から μ のエルゴード性が従う．ここで，双曲的測度とは，不変な確率測度 μ に対する f の特性指数 λ_1, λ_2 が，$\lambda_1 > 0 > \lambda_2$ なる関係を満足するものを言う．

以上の状況は，電磁気学とのアナロジーをつかって説明すると理解しやすいかもしれない．まず力学系の iteration から決まるグリーン関数 $G^{\pm}(x,y)$ を考え，そのグリーン関数をポテンシャルとみなしたときの電荷分布 $\mu^{\pm}(x,y)$ が (7) によって決まる．つまり (7) は，電磁気学のポアッソン方程式に当たるものである．通常の電磁気では，電荷分布 $\mu(x,y)$ を given として，ポテンシャルを未知関数としてポアソン方程式を考えるが，今の場合は，ポテンシャルが先に力学系によって与えられ，それから電荷分布 $\mu(x,y)$ が誘起される，と考えるわけである．そして，その誘起された電荷分布 $\mu(x,y)$ のサポートがジュリア集合になっている，というのが Bedford-Smillie の主張である．さらに，その誘起された分布に対する平均を取ると，その上の軌道は双曲的になっているわけである．

このように，複素エノン写像の $J^{*} = \mathrm{supp}\mu$ 上では，系が近可積分にあってもエルゴード性が成り立っている．当然のことながら，J^{*} は，写像 f に対してただひとつ定まるものであるから，ラフに言えば，複素領域には 1 つのカオス領域しか存在しないことをこの定理は主張していることになる．

4．近可積分系の滞留点集合

以上の Bedford-Smillie の結果は，散逸系を含むすべてのエノン写像に適用される．次に保測エノン写像の場合，上の事実に加えて，保測写像固有の事情が近可積分系の量子・古典対応を知る上で重要になってくることを示す．

ここでは，保測エノン写像の滞留点集合 $K^{\pm}$ の体積（4 次元体積）に注目する．$|b|$ をエノン写像のヤコビアン，$m(\cdot)$ を 4 次元体積とすると，系が保測でない場合，$|b| < 1$ では，$m(K^{-}) = 0$ で，$m(K^{+}) = 0$ または ∞，さらに，$|b| > 1$ では，$m(K^{+}) = 0$ で，$m(K^{-}) = 0$ または ∞ となるが，$|b| = 1$ のとき，$m(K) = m(K^{+}) = m(K^{-}) < +\infty$ まではわかっているが，その体積が有限か 0 かはわかっていない．充填ジュリア集合 K が 4 次元体積をもつときには，充填ジュリア集合 K は内点をもち，その定義より，$J \neq K$ である．

一方，K が 4 次元体積をもたないときには，再び定義より，$J = K$ となる．実面の KAM 曲線上の軌道は，前方，および後方時間発展双方に対して有界なので，当然 K の要素であるが，K が 4 次元体積をもたないときには，KAM 曲線がジュリア集合 J の要素であることになる．ジュリア集合は，複素空間上でのカオス的に振る舞う成分であることが予想されるので（正確には**定理 2** より，J ではなく J^{*} をサポートにもつ μ が双曲的であることがそれに対応する），その中に KAM 曲線が含まれることは実力学系の世界からはいささか奇妙に聞こえるが，論理的にはそうなっていなければならない．J^{*} 上の確率測度 μ がエルゴード的である，という **定理 2** と併せて考えると，仮に $J^{*} = J = K$ であれば，実面の KAM 曲線上の任意の近傍に，J 上をエルゴード的に経巡る軌道（当然，複素軌道）が存在することになる．実面上では，KAM トーラスが作る円環領域の間に挟まれて外に出ることのできない軌道も，初期条件にわ

ずかでも虚部をもたすことによって（ただし，ジュリア集合の中に入るようにして）J 上どこにでも到達させることができることになる．

類似のことは，標準写像を使った複素ホモクリニック軌道に対しての数値的な考察によっても予想されている [8]：

予想 3(Lazutkin-Simó) 標準写像における複素安定・不安定多様体の閉包は全実面を含む．

量子・古典の対応に関して，滞留点集合 K の体積が問題になる理由は以下である．例えば，勝手な量子状態 $\Psi_0(q)$ を初期状態にとり時間発展を行うことを考える．ただし，初期量子状態 $\Psi_0(q)$ は，半古典極限で位相空間上のある滑らか多様体に漸近する，という意味で，古典極限が存在する場合を考える．具体的には，運動量 p あるいは，座標 q を指定した状態などがその典型例であるが，位相空間上の滑らかな曲線に漸近するような状態であればどんなものでも構わない．いずれも，古典対応物は位相空間上の 1 次元曲線になっている場合を考える．

このような実位相空間上にのった 1 次元曲線が，もし，KAM 曲線に囲まれているとすると，この 1 次元曲線は，実のダイナミクスの中では，KAM 曲線の外に出ることはできない．ところが，初期状態に対応する 1 次元曲線を複素に解析接続したものを考えると事情は変わってくる．複素に広げた古典対応物は，複素 1 次元曲線（実 2 次元曲面）になるが，仮に，この複素 1 次元曲線を包むような障害物 —実位相空間の KAM 曲線のような— が複素位相空間に存在しなければ，この 1 次元曲線は (実位相空間では外に出ることができなくとも) 複素位相空間を使っていつかは外に出ることができるはずである（必ず任意の場所に到達できるかどうかは別にして）．

ところが，もし，滞留点集合 K が $\mathbf{C}^2$ の中で体積をもっていたとすると，適当に取った初期状態の古典対応物である複素 1 次元曲線の中で，その滞留点集合から出ていけないものが「たくさん」出てきてしまう．「たくさん」という意味は，初期量子状態 $\Psi_0(q)$ の古典極限である複素 1 次元曲線，すなわち，実 2 次元面の中で面積をもった領域が，滞留点集合と交わりをもってしまう，ということである．4 次元空間の中にこのような内点をもった不変集合が存在したとすると，半古典論を用いてトンネル効果を記述しようとした際，半古典プロパゲータに寄与する軌道を仮に複素領域まで拡張したとしても，決して外に出ていかない初期状態の集合が存在することになる．

5. 複素 KAM 曲線と自然境界

量子化されるべき古典対応物を探すために，さらに話しを絞って，初期状態の古典対応物である 1 次元曲線として KAM 曲線を取った場合を考える．量子系の固有関数は，時間発展に対して不変な状態である．したがって，その古典対応物も時間発展に対する不変構造であると考えるのは自然である．冒頭に触れた，近可積分系での固有関数が，半古典極限でいかなる古典不変構造に漸近すべきか？という問いに対して，各 KAM 曲線 (およびカオス領域) が独立に量子化される，とする最もナイーブな立場は，KAM 曲線を表す 1 次元曲線が時間発展しない，すなわち不変に保たれる，という事実に依拠している．もちろん，この仮定は，KAM 曲線の定義そのものから，実位相空間上では常に正しい．

ところが，KAM 曲線を複素領域に解析接続すると話しは違ってくる．というのは，もともと KAM 曲線は，周波数 ω を固定するごとに，その周波数をもつ円周上の等速回転に共役になるような曲線のことであるが，一般に，その共役関係を与える関数 (Lindstedt 級数と呼ばれることがある）は，複素角変数上で，自然境界をもってしまうからである [9, 10]．自然境界

の存在に関しては厳密な証明は与えられていないが，多くの数値計算による状況証拠があるので，このことを前提に話しを先に進めことにすると，この事実は，仮に，量子系の初期状態に対応する１次元曲線をKAM曲線に取ることが出来たとしても†，それを複素領域に拡張した途端に不変１次元曲線ではなくなってしまうことを意味する‡．このように，たとえ，実面上のKAM曲線のような力学系の不変集合上に乗るように，「巧く」初期条件を選ぶことが出来たとしても，複素領域にもぐると必ずどこかでその不変集合からはみ出してしまう．別の言い方をすれば，いかなる複素１次元曲線も，系が非可積分であれば，複素面全体で１つの不変集合ではあり得ず，必ず何らかの異なる不変集合との交わりをもってしまう，ということである．もし，交わりをもった点の中に J^* 上の軌道が存在したとすると，先に述べた定理より，J^* のエルゴード性から，その軌道は，J^* 上の任意の点にいくらでも接近することができる．つまり，１次元曲線を古典極限としてもつような量子状態は，J^* 上の軌道を伝って実KAM曲線の外に出ることができる．我々が，カオス的トンネル効果を記述する際に発見した「ラピュータ鎖」と呼んだ初期値面上の特徴的な構造も，実はそのような軌道に対応している [3, 4, 5].

6. ジュリア集合を介したカオス領域とトーラス領域との結合

「２次元保測力学系の充填ジュリア集合 K は４次元体積をもたないこと」（線形化の不可能性，KAMトーラスの自然境界の存在，直接の数値計算などはそのことを強く支持する [?]）が正しければ，KAM曲線も J に属することになり，さらに，「$J^* = J$」が成立していれば，J^* 上のエルゴード的な軌道が有界な領域に留まるすべて点をつないでいることから，異なるKAM曲線も，J^* の軌道を介して繋がっている（正確には，あるKAM曲線の任意の近傍の点が別のKAM曲線の任意近傍に推移することができる）ことになる．当然，そのような軌道は，トーラス的な運動とカオス的な運動の両面を１つの軌道のなかに同時に兼ね揃えているはずであろう．

このように考えてくると，複素力学系の中から出てきた測度 μ，そしてその台になっている J^* は，近可積分系の固有関数が古典極限として漸近する不変集合の最も自然な候補となる．冒頭に提起したように，近可積分系の固有関数は，「トンネル効果」を媒介として位相空間のすべての領域と結合している．カレントの収束定理，および，複素平衡測度 μ の存在は，多次元複素力学系理論の中のいわば基本定理であり，当然のことながら，「トンネル効果」といった物理現象を想定して導かれた主張ではない．にも関わらず，こういった純量子効果のもつべき自然な性質を兼ね揃えていることは，偶然にしては出来すぎにも見える程である．

以上の議論には，上に挙げたような，まだ厳密な証明のない，いくつかの作業仮説が含まれる上に，ストークス現象など，複素半古典論固有の問題なども絡んでくることから [6]，未だ多くの点で推論の域を出ない．しかし，複素領域に力学系を拡張することは，トンネル現象をはじめとして，混合位相空間をもつ近可積分系の量子効果の理解に対する系統的な指針を与えることは確かなように思われる．

以上は，池田研介氏（立命館大学），石井豊氏（九州大学）との共同研究に基づくものである．

† そもそも古典極限がKAM曲線に漸近するような量子状態が果たして取れるかどうかは定かではないが，ここでは思考実験的にそのような状況を想定する

‡ もちろん，Lindstedt 級数は有限の収束半径をもっているので，実面に近いところでは複素KAM曲線が存在するが

References

[1] M.V. Berry and M. Robnik, J. Phys. A **17**, 2413 (1984).

[2] T. Prosen and M. Robnik, J. Phys. A **27** , 8059 (1994).

[3] A. Shudo and K. S. Ikeda, Phys. Rev. Lett. **74**, 682 (1995); Physica D**115**, 234 (1998).

[4] A. Shudo, Y. Ishii and K.S. Ikeda, J. Phys. A (2002) L225; to be submitted.

[5] T. Onishi, A. Shudo, K.S. Ikeda and K. Takahashi, Phys. Rev. E **64**, 025201-1 (2001); to be submitted.

[6] A. Shudo and K.S. Ikeda, Phys. Rev. Lett., **76**, 4151 (1996); 首藤啓, 池田研介 : 数理解析研究所講究録, **1133**, 53 (2000); *ibid*, **1168**, 55 (2000); *ibid*, **1180**, 48(2000); *ibid*, **1220**, 39(2001).

[7] E. Bedford and J. Smillie, Invent. Math. **103**, 69 (1991); J. Amer. Math. Soc. 4, 657 (1991); Math. Ann. **294**, 395 (1992).

[8] V. F. Lazutkin and C. Simó, Int. J. Bif. Chaos **9**, 253 (1997).

[9] J.M. Greene and I.C. Percival, Physica D **3**, 530 (1981); I.C. Percival, Physica D **6**, 67 (1982).

[10] S. Marmi, J. Phys. A **23**, 3447 (1990).