内部固有値と外部共鳴から撞球台の形状を決定できるか？

東京都立大学理学研究科　岡田雄一郎，首藤啓
ATR 環境適応通信研究所　原山卓久
早稲田大学理工学部　田崎秀一

1　太鼓の形は聞き分けられるか？

本稿では40年ほど前にKacが提起した「太鼓の形は聞き分けられるか？」という有名な問題を再考したいと思います [1]. Kacの問題はHelmholtz方程式の境界値問題の固有値列からその境界の形状が決定できるか？という逆問題であり，Helmholtz方程式の境界値問題として記述される物理系一般に関係します．とくに量子カオスの観点から研究されることの多い量子撞球系もその一例で，この場合Kacの問題はエネルギースペクトルから撞球台の形状を決定できるか？と言い換えることができます．通常量子カオスでは,「最近接間隔分布がPoisson分布であれば可積分系，Wigner分布であればカオス系」というように，量子エネルギースペクトルが持つ統計性と対応する古典系が持つ力学的性質の間の “generic” な量子古典対応を問題にしますが，Kacの問題はそもそも我々はエネルギースペクトルの情報だけから古典撞球系の性質を決定づけているところの撞球台の形状を一意に決定できるものなのか？という量子古典対応の存在に対する原理的な問かけにもなっています．ところで，このKacの問題は今から10年ほど前，Gordonらがエネルギースペクトルが完全に一致するにも関わらず形状の異なる等スペクトル撞球台対を具体的に構成したことにより，否定的に解決されました [2]．その後，Busérらによりさらに幾つかの等スペクトル撞球台対が構成されました [3]．これまでに構成されたこれらの等スペクトル撞球台対は全て共通の基本領域を鏡映により何度か折り広げて得られる撞球台のペアであり，その等スペクトル性は「固有関数の移植」という方法で統一的に説明されています [3]．また，これらの等スペクトル撞球台対以外に等スペクトルな平面撞球台対が存在するか否かは今のところ知られていません．

さて，このような聞き分けられない太鼓，つまり等スペクトル撞球台対の存在は撞球台の形状を決定するためにはエネルギースペクトルの情報だけは不十分だということを示しています．では，エネルギースペクトルに加えどんな情報が分かれば我々は撞球台の形状を一意に決定できるのか？これが本稿で扱いたい問題です．既に否定的に解決されたKacの問題を修正し，本稿では「撞球台内部のエネルギースペクトルと同時に，撞球台を撞球台外部からやってくる入射波に対する散乱体と考えたときの散乱共鳴から撞球台の形状が決定できるか？」という問題を提起したいと思います．以下にこの修正が境界積分法のフォーマリズムから自然に導かれること，およびこの修正された問題に関する数値計算の結果を示します．

2 Fredholm 行列式の零点

Dirichlet 境界条件のもとで Helmholtz 方程式:

$$\nabla^2 u(r) + k^2 u(r) = 0 \quad r \in \Omega, \tag{1}$$

$$u(r) = 0 \quad r \in \partial\Omega. \tag{2}$$

を考えます．ここで Ω は有界な平面領域であり，境界 $\partial\Omega$ は区分的に C^2 級と仮定します．

まず u を Dirichlet 問題 (1,2) の非自明解と仮定したとき，u が満たすべき積分方程式を導きましょう．平面 $\mathbf{R}^2$ における Helmholtz 方程式 (1) の基本解として $G_0(r, r'; k) := -\frac{i}{4}H_0^{(1)}(k|r-r'|)$ を用いると，Green の定理により u は一重層ポテンシャルによる表現:

$$u(r) = -\int_{\partial\Omega} G_0(r, r(s); k)\frac{\partial u}{\partial \nu}^{-}(s)ds \quad r \in \Omega \tag{3}$$

を持つことが分かります．ここで s は弧長パラメータ，ν_s は境界上の点 $r(s)$ における外向き法ベクトル，$\frac{\partial u}{\partial \nu}^{-}(s)$ は $lim_{h\to+0}[\nu_s \cdot \nabla u(r(s) - h\nu_s)]$ を表します．(3) に対して一重層ポテンシャルの飛び公式を用いると，

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}^{-}(t) = -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial G_0(r(t), r(s))}{\partial \nu}(t)\frac{\partial u}{\partial \nu}^{-}(s)ds + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial \nu}^{-}(t) \tag{4}$$

が得られます．従って，u が Dirichlet 問題 (1,2) の解であれば，第二種同次型積分方程式:

$$\phi(t) - \int_{\partial\Omega} K(t, s; k)\phi(s)ds = 0, \tag{5}$$

$$K(t, s; k) := -2\frac{\partial G_0(r(t), r(s); k)}{\partial \nu}(t). \tag{6}$$

が非自明な解 $\phi(t) = \frac{\partial u}{\partial \nu}^{-}(t)$ を持つことが分かりました [4]．

今度は逆に積分方程式 (5) が非自明な解 ϕ を持つとき，ϕ を密度関数とする一重層ポテンシャル:

$$u(r) = -\int_{\partial\Omega} G_0(r, r(s); k)\phi(s)ds \quad r \in \mathbf{R}^2\backslash\partial\Omega \tag{7}$$

が常に Dirichlet 問題 (1,2) の解になるか否かを検討してみましょう．ここで一重層ポテンシャル u は領域の内部と外部の双方に対して定義されており，またそれぞれの領域で自動的に Helmholtz 方程式を満足していることに注意します．また良く知られているように，u の法線微分の内側および外側からの極限は，

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}^{\pm}(t) = -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial G_0(r(t), r(s))}{\partial \nu}(t)\phi(s)ds \pm \frac{1}{2}\phi(t) \tag{8}$$

という飛びを持ち，一方 u の値自身は境界を込めて連続です．とくに今の場合，密度関数 ϕ が積分方程式の解であることにより，外部領域 $\mathbf{R}^2\backslash\bar{\Omega}$ では Neumann 条件:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}^{+}(t) = 0 \tag{9}$$

が成り立っています．さて，領域Ωを含む十分大きな半径Rを持つ円盤D_Rを取り，$D_R\backslash\bar{\Omega}$に Green の定理を適用することで，(9) から

$$\int_{\partial D_R}[|\frac{\partial u^+}{\partial \nu}|^2+|k|^2|u|^2]ds+2Im(k)\int_{D_R\backslash\Omega}[|k|^2|u|^2+|\nabla u|^2]dr=0 \tag{10}$$

が得られます．$Im(k)\geq 0$であれば$R\to\infty$を考えることにより，外部領域$\mathbf{R}^2\backslash\bar{\Omega}$で$u\equiv 0$が従います．これにより，一重層ポテンシャルの境界$\partial\Omega$での連続性から，$u$は内部領域$\Omega$で Dirichlet 問題の解であることが分かります．ここで，uが内部領域Ωでも恒等的に0になってしまう可能性にも注意しなくてはなりませんが，もしそうであるとすると，飛び公式 (8) より$\phi\equiv 0$が従い，ϕが積分方程式 (5) の非自明解であるという仮定に矛盾します．従って$Im(k)\geq 0$である限り，uは必ず内部 Dirichlet 問題の非自明解になります．一方$Im(k)<0$のとき，uは外部領域$\mathbf{R}^2\backslash\bar{\Omega}$で Neumann 条件 (9) を満たす Helmholtz 方程式の非自明解になります．非自明性は以下のように確かめられます．もしuが外部領域で恒等的に0になると仮定すると，一重層ポテンシャルの連続性によりuは内部 Dhiriclet 問題の解でなくてはなりませんが，今度は$Im(k)<0$より内部領域Ωで$u\equiv 0$が従い，これがϕが非自明解であるという仮定に矛盾します．従って$Im(k)<0$であるならば，uは確かに外部領域$\mathbf{R}^2\backslash\bar{\Omega}$で Neumann 問題の非自明解になります．この外部領域における Neumann 問題の非自明解は，$Im(k^2)$の符号に応じて時間とともに指数関数的に増加または減少する準安定状態と解釈できます．以上により，**積分方程式 (5) の非自明解は，上半平面および実軸で内部 Dirichlet 問題の固有関数と一対一に対応すること，のみならず，下半平面では外部 Neumann 問題の準安定状態に対応すること**が分かりました．

積分方程式 (5) を可解にするkの特徴付けに関しては，Fredholm 理論が知られています [5]．Fredholm 理論によると，以下に定義する **Fredholm 行列式 D(k) が 0 になるとき，かつそのときに限り同次型積分方程式 (5) が非自明解を持つ**ことになります．Fredholm 行列式の定義は以下の通りです．

$$D(k):=1+\sum_{n=1}^{\infty}D_n(k), \tag{11}$$

$$D_n(k):=\frac{(-1)^n}{n!}\int_{\partial\Omega}dx_1\cdots\int_{\partial\Omega}dx_n\begin{vmatrix}K(x_1,x_1;k) & \cdots & K(x_1,x_n;k)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ K(x_n,x_1;k) & \cdots & K(x_n,x_n;k)\end{vmatrix}. \tag{12}$$

ここで Fredholm 行列式 (11) が無限級数で定義されていることに注意してください．境界$\partial\Omega$がC^2級であれば，積分核$K(x,y;k)$は空間変数に対して連続，従って有界であり，アダマールの不等式を用いてこの級数の一様収束性が証明できます．この級数の一様収束が一旦保証されれば，Fredholm 行列式$D(k)$は正則関数の一様収束列の極限として$\mathbf{C}\backslash(-\infty,0]$で正則関数であることは明らかでしょう [6]．

ここまでの議論は，以下の表1のようにまとめられます．本稿では積分方程式の非自明解が定義する一重層ポテンシャルの観点から Fredholm 行列式の零点の意味を導きましたが，この結果は Fredholm 行列式の内側外側分解から導かれる Fredholm 行列式の解析性に関する既出の結果に完全に符合しています [7]．

表 1: Fredholm 行列式の零点の意味付け

零点の場所	零点の意味	一重層ポテンシャル
上半平面	(上半平面に零点は存在しない)	
実軸	固有値	固有状態（内部）
下反平面	共鳴	準安定状態（外部）

3 Kacの問題再考

Kacの問題に戻りましょう．Kacの問題は内部Dirichlet問題の固有値列から領域の形が決定できるか？というものでした．これをFredholm行列式の言葉で言い換えると，Fredholm行列式の実軸上の零点集合から形状が決定できるか？ということに他なりません．そしてこのKacの問題に対する答えは否でした．つまり，実軸上の零点集合だけでは形状は決定できないというわけです．しかしFredholm行列式は下反平面にも零点を持ち得ます．具体的な領域に対する数値計算を実行してみると下半平面に実際に零点が沢山存在することがすぐに分かります．そしてこれら下反平面に存在するFredholm行列式の零点は，外部Neumann問題の共鳴に対応しています．内部Dirichlet問題の固有値も，外部Neumann問題の共鳴も，ともに領域の形状から直接定議されるFredholm行列式という正則関数の零点として特徴付けられます．従って，内部Dirichlet問題の固有値では捉えられない等スペクトル撞球台対の形状の違いが外部Neumann問題の共鳴に反映されていることが十分に期待できます．この観点から「内部Dirichlet問題の固有値と外部Neumann問題の共鳴から領域の形状が決定できるか？」という新たな問題が自然に持ち上がってきます．これが本稿で提起したい問題です．

ここで提起した問題に完全に答えるには，任意の等スペクトル撞球台対について，共鳴すなわちFredholm行列式の下半平面に存在する零点が異なることを示せば十分です．しかし今のところ，これを一般的に証明するアイディアを我々は持っていません．ここでは従って，既に知られている具体的な等スペクトル撞球台対に関して，共鳴に由来するFredholm行列式の下半平面の零点が実際に異なっていることを確認してみることにします．固有関数の移植の方法により得られる既知の等スペクトル撞球台対は，その構成法から一般に非可積分系になるため，数値計算によりFredholm行列式の零点を調べることになります．図1に固有関数の移植の方法で等スペクトル性が証明されている撞球台対に関するFredholm行列式の零点の分布を示します．これを見ると，共鳴に由来する下半平面の零点の分布が明らかに異なっていることが見て取れます．すなわちこの等スペクトル撞球台対は，固有値によっては決してその形状の違いを判別することはできませんが，共鳴によればたちどころに形状の違いが判別できることが分かります．紙面の都合上，ここでは一つの例に対する結果しかお見せすることはできませんが，固有関数の移植の方法で得られる多数の等スペクトル撞球台対に対して同様の結果が得られています．

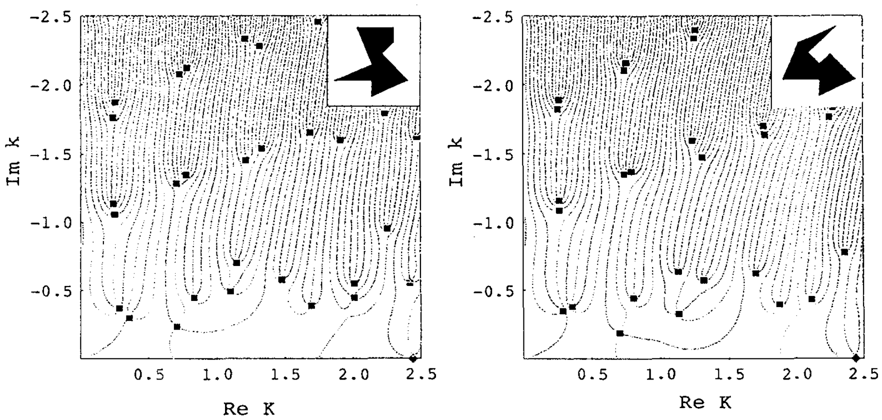

図 1: 等スペクトル撞球台対の Fredholm 行列式 $D(k)$ の零点．曲線は $D(k)$ の実部および虚部の零線を表し，従って交点■が零点を表す．

4 展望

本稿では Fredholm 行列式の零点として内部 Dirichlet 問題の固有値と外部 Neumann 問題の共鳴の両方を同時に問題にしましたが，内部問題の固有値に関係なく外部問題の共鳴だけから形が決定できるか？という問題も当然考慮されてしかるべきです．この問題は純粋な散乱理論の観点から既に問題とされており，散乱体の補足性と共鳴の分布の関係などいくつかの結果が知られていますが，共鳴から形が決まるか？'という問題自体は未解決です [8]．また，内部 Diriclet 問題に関しても，固有関数の移植という特定の構成法によらない等スペクトル性の完全な特徴付けは未だに知られていません．内部問題の固有値と外部問題の共鳴をともに Fredholm 行列式の零点ととらえる本稿の立場が，これらの内部問題および外部問題双方に別々に存在する未解決問題といかに関係してくるのか，非常に興味深いところです．

参考文献

[1] Kac M 1966 *Amer. Math. Monthly* **73** 1-23

[2] Gordon C, Webb D and Wolpert S 1992 *Invent. math.* **110** 1-22

[3] Buser P, Conway J, Doyle P and Semmler K D 1994 *Internat. Math. Res. Notices* **9**

[4] Berry M V and Wilkinson M 1984 *Proc. R. Soc. Lond. A* **392** 15-43

[5] 溝畑茂 1965 「偏微分方程式論」(岩波書店)

[6] Georgeot B and Prange R E 1995 *Phys. Rev. Lett.* **74** 2851-2854

[7] Tasaki S, Harayama T, Shudo A 1997 *Phys. Rev. E* **56** R13-16

[8] 井川満 1999 「散乱理論」(岩波書店)