バレー法：非摂動的な解析とN重超対称性

(Valley method: non-perturbative analyses and N-fold supersymmetry)

大阪大学大学院 理学研究科　田中 敏晶[1]

1 半古典論（近似）の妥当性と適用限界

「量子カオス」の意味するところが、量子論特有の現象としてのカオスであれ古典的にカオスが現れる系における量子論的な現象であれ、そのような現象にアプローチする際に近似の導入はほとんど不可避と言ってよい。このことは系の自由度が増えれば尚更の事である。そして「量子カオス」という対象に関して最も中心的な役割りを果すと考えられるものは半古典論（近似）である。およそ近似を導入する意味は大きく分けて二つある。一つは、完全に解析的にアプローチ出来る系は一部の例外を除いて殆ど存在しないから近似を導入せざるを得ないという現実的な理由からであり、もう一つは、近似の結果を通して系に対する物理的な解釈を可能にするという側面である。この後者の役割りは非常に重要で、なぜならば「exact な」結果と称せられる数値計算の結果だけを頼りにその系のダイナミクスを正しく理解するのはそれ程容易な事ではないからである。例えば古典的にカオスが現れる系に対応する量子系のスペクトルや波動関数を数値的に求めたとしても、古典系における可積分／非可積分性という解析的な性質の相違が量子系においてどのように作用しているのかを、得られた数値データの山から正しく理解するのは困難な問題であろう。一方、対象とした系に対して何らかの近似が良いという事が確認されたなら、適用した近似が系のダイナミクスにおいて本質的な役割りを果す部分を抽出しているという事であるから、「近似が良い」という事実を通じて系のダイナミクスに対する理解と物理的解釈を深めることが可能になる。しかしこの事は、単に何らかの近似を適用して得られた結果を考察するだけではなく、その近似の妥当性も注意深く吟味する事が同時に不可欠である事を意味する。

「近似の妥当性」という側面から半古典論を見るとき、最も注意を払わなければならないのは次の事であろう。すなわち半古典論とは、運動方程式の解として与えられる古典的な配位が対応する量子系において最も主要な寄与を与える、という前提の元に成立する近似であるという事である。しかしながらこのような前提は、実は比較的多くの力学系で破綻しているのである。この事を見るには虚時間形式の経路積分が最も適している。経路積分によれば、量子論的な分配関数はあらゆる配位 $q(\tau)$ に対する $e^{-S_E[q(\tau)]}$ という量の足

[1]E-mail: ttanaka@het.phys.sci.osaka-u.ac.jp

しあげによって与えられる。ここで q は粒子の位置座標、τ は虚時間、S_E は Euclid 化された作用である。したがって作用をより小さくする配位ほど分配関数に主要な寄与を与える。運動方程式の解として与えられる古典的な配位は作用の停留点であるから、もしその点が大域的な最小点であれば確かに古典的な配位は量子論的に最も主要な寄与を与えることになる。また、古典的配位が τ に依存する場合は停留点の周りに平坦な方向（ゼロモード）が必ず存在するが、そのゼロモードに沿った配位全体が大域的な最小であれば、それらを集団座標にとって足しあげてしまうことによって半古典論の妥当性は損われない（インスタントン計算でお馴染の方法である）。以上の場合は半古典論の前提が満されている場合である。しかしながら古典的な配位が作用の鞍点になっているような場合、すなわち古典的配位からの量子論的な揺らぎに負モードが含まれる場合は明らかに半古典論の前提が破綻する。なぜなら古典的配位から負モードに沿って動いて得られる配位は古典的な作用よりも小さな作用を与えるからである。そしてこの負モードは、特に量子トンネル効果が系のダイナミクスに重要となるような系においてしばしば現れる。その典型的な例は、バウンス解と呼ばれる古典解が存在する場合である。このように、半古典論というまことしやかな近似理論と言えども決して強固な土台の上に建てられたものではない事が見て取れるであろう。従って、例えば Gutzwiller の跡公式など、導出過程で何らかの意味での半古典近似を伴うような方法を適用する場合にもその妥当性に常に細心の注意を払う必要があることが理解されよう。

また、このように虚時間形式の経路積分の立場から古典／量子対応を考察する事は量子カオスの研究において重要であると考えられる。およそ経路積分においては（ほとんど至る所微分不可能といった）極度に病的なものも含めてあらゆる配位を系によらず足しあげる訳であるから、その中にはもちろんあらゆるカオティックな配位も含まれている。もし考えている系が古典的にはカオティックである場合、そうで無い場合、それに応じてそのような配位が経路積分において主要な寄与を与えるか否かは非自明な問題である。従ってこのような場合にも無反省に半古典論を適用するのではなく、経路積分をする関数空間においてどのような配位が量子論的に最も重要であるかを評価する必要がある。そのような研究の蓄積によって初めて古典カオス／量子カオス対応を正しく理解する道の一端が開けるのではないかと考えられる。

2 バレー法

「バレー法」は一言で表現するならば、虚時間形式の経路積分において古典的配位からの量子論的な揺らぎに負モードが現れる場合にも妥当な近似を与え得る拡張された集団座標の方法、と言うことができる。従って、上述したような半古典論が内包している最大の欠陥を克服した半古典論の拡張と見做すこともできる。負モードが現れる場合には、停留点から負モードの方向に沿った配位を集団座標にとって足しあげれば良い近似が得られそうだと直観的に考えることができるが、バレー法はまさにそのような近似を実現する方法

である。詳細については佐藤昌利氏の報告、及び文献 [1] を参照されたい。

3 三重井戸ポテンシャルの非摂動的解析

近似の妥当性を実際に具体的なモデルに適用する事によって理解することは常に重要である。しかしながらそのような目的の為に適したモデルをどのように選択するかという問題が起る。妥当性を理解するためには少なくともある程度は解析的に厳密な結果が得られているようなモデルが相応しいが、だからといって調和振動子系のようにダイナミクスに非自明な性質がないようなモデルでは自明な結果しか得られないことが多い。そこで提唱するのが「準可解なモデル」、あるいは「N 重超対称性なモデル」である。これらのモデルはスペクトルと波動関数の一部が（少なくとも代数的に）解くことができる、つまり部分的に解析的に厳密な結果が得られ、かつ非自明なダイナミクスを持ち得て、例えば非摂動的な量子補正によってN 重超対称性が力学的に破れるといった現象を引き起こす。この準可解性は８０年代半ば頃に導入された比較的新しい概念で、９０年代初頭までの研究成果については文献 [2] を参照されたい。N 重超対称性の一般論、及び準可解性との等価性については文献 [3] にまとめてある。

さて、この準可解性という観点から特に興味深いモデルとして以下のようなポテンシャルで与えられる一自由度量子系を考える。

$$V(q) = \frac{1}{2}q^2\left(1-g^2q^2\right)^2 + \frac{\epsilon}{2}\left(1-3g^2q^2\right) \tag{1}$$

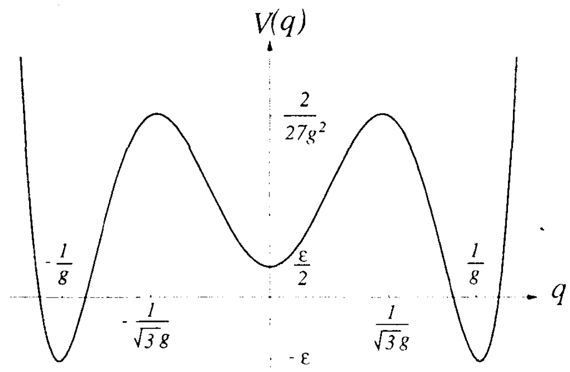

図 1: 式 (1) で与えられるポテンシャルの形状

これは図 1 で与えられるような三重井戸型ポテンシャルである。このモデルを従来の半古典近似をナイーヴに適用して解析するとたちまちに様々な破綻が生じることになる。まず $\epsilon \neq 0$ の場合は古典的な配位としてバウンス解が存在するが、これは前述したように負モードを含むために近似の妥当性もさることながらスペクトルに虚部を生じてしまう。上のモデルは量子崩壊のない、量子論的にも安定な系であるからこれは明かに非物理的な

結果となる。一方 $\epsilon = 0$ の場合は古典解はインスタントンで負モードを含まないから一見すると問題なさそうに見える。しかしながら二重井戸型ポテンシャルのときと同じように多重インスタントンの配位を希ガス近似を用いて足しあげてみると別の破綻が生じることが分る。それは量子トンネル効果が無い場合のスペクトルにおいて基底エネルギーに縮退が無いにも関らず、インスタントンによる量子補正によって分離した二つのエネルギー準位が得られてしまうのである。これはインスタントンという配位が最近接の井戸間のトンネルという局所的な情報しか持っていないため、エネルギー準位の縮退といったポテンシャルの大域的な構造に依存する問題に対して正しく対処することができないからなのである。逆に言えば、インスタントンの希ガス近似が二重井戸型ポテンシャルで上手くいったのは、最近接以上の構造をたまたま持っていなかったからに他ならない。実際にバレー法を適用してみると、左端と右端の井戸を結ぶバレーの配位が主要な、そして本質的な寄与を与え、それらの寄与を正しく取り込むことによって初めて物理的に正しい結果を与えることが分る。バレー法を用いたスペクトルの量子化条件は以下の通りである。

$$\frac{\alpha^2}{2}\left((-)^{E-\frac{1}{2}-\frac{\epsilon}{2}} \pm 1\right)\left(\frac{2}{g^2}\right)^{E-\frac{1}{2}-\frac{\epsilon}{2}} \Gamma\left(-E+\frac{1}{2}+\frac{\epsilon}{2}\right) \times \\ \times \left(-\frac{2}{g^2}\right)^{\frac{E}{2}-\frac{1}{2}+\epsilon/2} \Gamma\left(-\frac{E}{2}+\frac{1}{2}-\frac{\epsilon}{2}\right) = 1 \qquad (2)$$

さて、この三重井戸型ポテンシャルのもう一つの特徴は、$\epsilon = \pm(4\mathcal{N} \pm 1)/3$ ($\mathcal{N} = 1, 2, 3, \ldots$) という特別な場合に準可解になる事である。可解な準位に対応するスペクトルや波動関数は解析的な表式が得られるので、結合定数 g^2 による摂動展開はゼロでない収束半径を持つ（一種の非繰り込み定理)。バレー法の結果 (2) 式から、摂動級数の高次項の振舞いを調べることができるが、実際にその場合にのみ高次項の主要な発散の寄与が消失することが導かれる。さらに準可解性には大きく分けて二つの場合があり、それは可解な波動関数が規格化可能な場合とそうでない場合である。$\epsilon = (4\mathcal{N} \pm 1)/3$ のときが前者に相当し、$\epsilon = -(4\mathcal{N} \pm 1)/3$ のときが後者に相当する。前者の場合には可解な波動関数は厳密解を与えるので非摂動的な量子補正は存在しない（N 重超対称性が力学的に破れない)。実際にバレー法の結果 (2) 式からもその事が導かれる。また後者の場合には可解な波動関数は摂動的にしか正しい解ではないので非摂動的な量子補正が存在することになる（N 重超対称性が力学的に破れる)。バレー法の結果 (2) 式はそのような事実も正確に再現することが確認される。

このように (1) 式で与えられるモデルは実に豊富なダイナミカルな性質を持つ一方、準可解性を持つため、近似法の試金石として極めて有用なモデルであることが理解されよう。なお、バレー法による解析の詳細についてはこの報告の紙面ではとても解説できないので文献 [4] を参照されたい。

4 準可解性と可積分性

最後に、準可解なモデルはカオスの研究に直接関り得る事を指摘しておこう。一自由度系の場合は全て可積分であるから、量子論的な（準）可解性との関係を見出すことはできない。しかしながら最近、$sl(M+1)$ 代数によって構成できる M 体の準可解な量子系の分類に成功し、表 1 のような結果を得た [5]。

分類	準可解	可解
I	rational A Inozemtsev	rational A Calogero-Sutherland
II	rational BC Inozemtsev	rational BC Calogero-Sutherland
III	hyp./trig. A Inozemtsev	hyp./trig. A Calogero-Sutherland + external Morse potential
IV	hyp./trig. BC Inozemtsev	hyp./trig. BC Calogero-Sutherland
V	elliptic BC Inozemtsev (elliptic BC Calogero-Sutherland)	————————

表 1: （準）可解な量子多体系の分類

この表中にある Inozemtsev 模型は多体系の中で最も一般的な可積分系として知られている [6]。準可解性と可積分性とはもともとは完全に独立した概念であるが、表 1 の結果はこの二つの性質の間に何らかの密接な関係があることを強く示唆している。量子系においては可積分性という性質がスペクトルや波動関数といった量子論的に重要な量にどのような影響を与えるか理解が難しいが、準可解性ならば理解し易い。従ってもしこの二つの性質の間の関係が明かになれば、古典系における可積分性の破れを量子系においては準可解性の破れとして捉えることが出来るかも知れない。

参考文献

[1] H. Aoyama, H. Kikuchi, I. Okouchi, M. Sato and S. Wada, Nucl. Phys. **B553** (1999), 644.

[2] A. G. Ushveridze, *Quasi-exactly solvable models in quantum mechanics*, (IOP Publishing, Bristol, 1994).

[3] H. Aoyama, M. Sato and T. Tanaka, Nucl. Phys. **B619** (2001), 105.

[4] M. Sato and T. Tanaka, J. Math. Phys. **43** (2002), 3484.

[5] T. Tanaka, `hep-th/0202101`; `OU-HEP 415`.

[6] V. I. Inozemtsev, Phys. Lett. **A98** (1983), 316.
V. I. Inozemtsev and D. V. Meshcheryakov, Lett. Math. Phys. **9** (1985), 13.
V. I. Inozemtsev, Lett. Math. Phys. **17** (1989), 11.