宇宙論における量子カオス

宇宙論的スケールにおける重力ポテンシャルの摂動的揺らぎのモード関数は、Helmholtz 型方程式に従い、自由粒子のエネルギー定常状態の波動関数として解釈することが可能である。空間がコンパクトで負の定曲率を持つ系に対して半径の大きい球面上では、低エネルギー固有状態のモード関数の値は、よい近似でランダムガウス的に揺らぐことが判明した。将来の宇宙背景輻射の温度揺らぎの観測によって、この疑似ランダム的な揺らぎの兆候を捕捉することが可能になるかもしれない。

国立天文台　井上 太郎 [1]

1　宇宙のトポロジー

1.1　一様等方モデル

現在標準的な宇宙モデルは空間的に一様等方で定曲率であり、Friedmann-Robertson-Walker(FRW) モデルと呼ばれる。宇宙の大きさを表すスケール因子を a としよう。宇宙の空間的な膨張は一般相対性理論から、物質密度 ρ と空間曲率 K を用いて次の様に記述される。

$$H^2 + K/a^2 = 8\pi G\rho/3 + \Lambda/3, \qquad H \equiv \frac{1}{a}\frac{da}{dt} \tag{1}$$

ここで、G は重力定数、t は時間、Λ は宇宙項である。無次元化された膨張速度 H はハッブルパラメーターと呼ばれる。FRW モデルは、ハッブルの法則、宇宙背景輻射及び軽元素合成の 3 つの観測事実を首尾よく説明する。H、K、ρ、Λ の値を観測的に決定する試みが長年にわたり成されている。

近年の遠方の Ia 型超新星の光度、銀河団の個数密度や宇宙背景輻射の温度揺らぎの観測 [1, 2] は、平坦で且つ宇宙項が存在するモデルを示唆している。しかし、宇宙項の物質密度は時間によらず一定であるので、宇宙初期にはその量に対する微調整が必要とされる。従って、理論的には必ずしも自然なものとはいえない。若し、宇宙項が存在しないとすれば、空間の曲率はやや負の方にずれた値を取ることになる。

[1]E-mail: tinoue@th.nao.ac.jp

1.2　宇宙は有限か無限か？

宇宙論の教科書を繙くと、曲率が正の場合は有限、ゼロ又は負の場合は無限であるという記述が成されている場合が多い。だが、これは正しくない。実は曲率がゼロ又は負の場合であっても空間を閉じさせることは可能である。例えば、平坦な無限の空間中に立方体の箱を考え向かい合う境界面を同一視してみる。すると観測者を出発した光はいつかは再び観測者の元に帰ってくることになる。この光の空間上の経路は閉じたループを成し、連続変形によって1点につぶすことは出来ない。つまり、非自明なトポロジーを持つことになる。空間は一様で平坦であるにも拘わらず、その体積は有限である。天体の分布は、見かけ上、無限の空間中である周期境界条件を課した場合と同等である。

空間の「形」であるトポロジーを指定しない限り、曲率だけでは、空間が有限か無限かは決まらない。曲率が負であっても、空間は閉じている場合もあるので、負曲率（双曲型）のモデルを「オープン」宇宙モデルと呼ぶことは適切ではない[3]。

1.3　閉双曲宇宙モデル

今後，閉じた有限の体積をもつ負の定曲率空間を空間成分にもつ宇宙モデルを閉双曲宇宙モデルと呼ぶことにする。周期境界条件を設定するためのセルはある種の多面体で表される。曲率半径で規格化すると、その体積には下限が存在することが知られている。つまり、曲率半径のスケールが入るので、平坦なモデルと異なり、現在の地平長〜曲率半径であれば、セルの大きさが現在の地平長ぐらいであることを自然に説明することが可能になるかもしれない。量子宇宙論によると、体積の小さい宇宙が生成する確率が高いという議論もある[4]。

閉双曲空間における自由粒子の測地線流は強いカオス性を示すことが数学的に証明されている。この性質にヒントを得て、初期宇宙において、非一様非等方な計量の揺らぎのカオス的混合が起こり、ほぼ一様等方な宇宙が生まれたというシナリオも提案された[5]が、曲率半径程度のスケールにおける揺らぎの性質がカオス的混合を示すかどうかは、必ずしも自明ではなく、定量的な議論も全く成されていない。それどころか、摂動的な性質さえも全く明らかにされてはいない。

通常、摂動的な計量（重力ポテンシャル）の揺らぎは背景空間のラプラシアンの2乗可積分な固有関数（モード関数）で展開される。なぜなら、摂動レベルでは、揺らぎの時間発展は、モード関数の独立な重ね合わせで表現されるからである。閉双曲空間上のモード関数の性質はいかなるものであろうか？

2　宇宙マイクロ波背景輻射

1964年にPenziasとWilsonによって偶然発見された宇宙マイクロ波背景輻射は今日のビッグバン宇宙論を裏付ける決定的な観測的証拠と考えられている。それ

は、我々の宇宙の大きさが現在のおよそ千分の一で、温度が約三千度の時、プラズマ状態であった電子と陽子が再結合して中性水素になり、それまで電子と相互作用していた光子が「脱出」して、我々の基に届いた、ビッグバンの残り火である。

1989年に打ち上げられたCOBE（宇宙背景輻射探査衛星）に搭載されたFIRAS（遠赤外絶対分光光度計）から得たデータから、輻射の振動数に関するエネルギー分布は160GHz（波長1.88mm）で最大値をとる絶対温度2.73度の黒体輻射の分布と60GHzから600GHzの範囲において約3千分の1以下しかずれていないことが判明した。この事実は、初期宇宙において、非常に高い精度で熱平衡状態が保たれていたことを物語っている。又、COBEのDMR（示差マイクロ波放射計）は、宇宙背景輻射の天空上の空間的な温度揺らぎは、大角度スケール(10度以上）で絶対温度にして10万分の2ないし3度程度であることを明らかにした。我々の宇宙は非常に良い精度で等方的である。

この相対的には10万分の1程度という僅かなずれは、宇宙の晴れ上がり時における、重力ポテンシャルの空間的な揺らぎを表している。この揺らぎの統計的性質を基にして、宇宙に含まれている物質の総質量や種類、膨張率、揺らぎの初期条件といった情報を得ることが出来る。理論的な予言が出来れば，宇宙のトポロジーに対しても制限をつけることが可能になる。そのためには、トポロジーが揺らぎに及ぼす影響を詳細に調べる必要がある。

3 H-Gビリアード系における古典論と量子論

前述の通り、閉双曲空間における自由粒子の古典系は、厳密なカオスを示す理想的な系である。さらに、量子古典対応が厳密に求まるという優れた特徴を備えており、古くから多くの研究が成されてきた[6, 7, 8, 9]（Hadamard-Gutzwiller model）しかし、多くの数値計算の結果、カオス的な系に特徴的な性質が量子系に鮮明には現れなかった。その理由として、系の持っている「隠れた対称性」が考えられる。[2] それは空間Mの持つ対称性ではなく、有限個のMで敷き詰められるような、より大きな空間の対称性である。この対称性を表す群（commensurator）は、離散等長群が数論的な場合は$PSL(2,C)$上に「稠密」に存在することがMargulisによって明らかにされた。従って、数論的な系では固有値や固有関数の統計はランダム行列理論の予言に従わないことが予測される。では、非数論的な場合はどうであろうか？この場合は、$PSL(2,C)$上に「離散的」に存在するので、カオス的な系に特徴的な性質がより鮮明に現れる可能性がある。

3.1 周期軌道と対称性

この「隠れた対称性」の効果を調べるため、AurichとSteinerは、非数論的な3次元orbifoldに対して、周期軌道スペクトルの縮退度を数値的に調べた[]。ここで、

[2]正確には、空間の有限被覆空間の対称性として定義される。

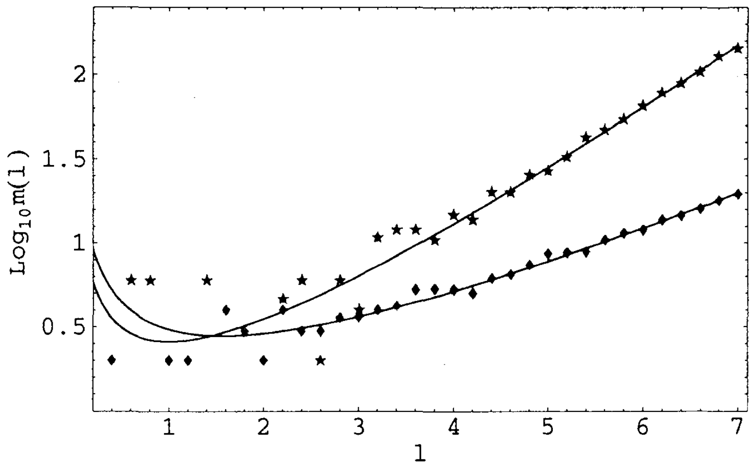

図 1: 局所的に平均化された ($\Delta l = 0.2$) 素周期軌道の縮退度の平均と分散 ($1-\sigma$) のプロット。星は数論的（体積 0.94）、ダイヤモンドは非数論的（体積 1.4）な閉双曲 3-多様体に対するプロットを表す。実線は最小二乗法による fitting curve（前者は $a\exp(l)/l$、後者は $\exp(bl)/(cl)$ の形を仮定。a, b, c はパラメーター）。データは $3.0 < l < 7.0$ を使用。

縮退度 $m(l)$ とは、同じ長さ l をもつ素周期軌道の数である。数論的な系では、l は $2\cosh(l) =$（代数的整数）を満たす。一方、長さ l 以下の素周期軌道の数 $N(l)$ は、漸近的に $N(l) = \exp(2l)/l$ と書かれる。従って、数論的な系では l の近傍で平均化された縮退度は、$\langle m(l)\rangle \propto \exp(l)/l$ と近似される。一方、非数論的な系で、このような縮退度の指数関数的発散が起こるかどうかは自明ではない。ところが、非数論的な 3 次元 orbifold の場合は、同様な指数関数的発散がみられた。3 次元多様体の場合はどうであろうか？

図 1 に示すように、筆者による数値計算の結果、非数論的な 3- 多様体の場合も、縮退度に指数関数的発散があることが判明した [11]。しかし、その発散は、数論的な場合に比べやや弱い（$\sim \exp(0.6l)$）。この結果は、非数論的な系であっても、commensurator が $PSL(2, C)$ 上にかなり密に分布していることを示唆している。もしそうだとすると、閉双曲空間を非対称化しても，古典的にカオス的な系に対する予言を期待するのは無理ということになる。

3.2 モード関数の疑似ランダム性

今度は量子論を考えよう。閉双曲空間に対応した周期境界条件を課した Helmholtz 型方程式

$$(\nabla^2 + k^2)u_k(\mathbf{x}) = 0 \tag{2}$$

を考える。この方程式を解析的に求めることは困難であるが、普遍被覆空間上（無限の単連結双曲空間）の Green 関数は解析的に求められるので、境界要素法を用いれば、数値計算によって解くことは可能である。モード関数 $u_k(\mathbf{x})$ の定量的な振

る舞いをみるため、モード関数を規格直交化した後、普遍被覆空間上の 2 乗固有関数 $X_{\nu l}(\chi)Y_{lm}(\theta,\phi)$ で展開してみよう。擬球面座標（R,χ,θ,ϕ）では、展開係数 $\xi_{\nu lm}$ を用いて以下のように記述される。

$$u_\nu = \sum_{lm} \xi_{\nu lm} X_{\nu l}(\chi) Y_{lm}(\theta,\phi) \tag{3}$$

ここで $\nu = \sqrt{k^2-1}$ であり、双曲空間上で定義される波数である。また、Y_{lm} は（複素）球面調和関数である。モード関数の空間的な揺らぎの情報は展開係数 $\xi_{\nu lm}$ に全て含まれる。もし、この展開係数が「ランダム」であれば、モード関数の揺らぎも「ランダム」であることになる。系が古典的にカオス的であれば、エネルギー準位の高い極限では、揺らぎはガウス分布に従うランダム場として振る舞うことが期待される。数値計算の結果、驚くべきことに、エネルギー準位の低い場合であっても、良い近似で展開係数はガウス分布に従うランダム数とみなしてよいことが'明らかになった [12, 13]。より正確には、ある向きを持った観測点に対し，$l(l+1)+m+1$ の順に並べた展開係数は平均がゼロ、分散が ν^{-2} のガウス分布に従う。無論、「隠れた対称性」の固定点においては、展開係数の間に強い相関が生じてしまうので、全ての固有モードを完全なガウス的ランダム場としてみなしてよいわけではない。又、l が小さい場合は、ランダム性が弱くなる傾向があることも判明した。厳密には、$l >> 1$ の極限についてのみ成立する性質かもしれない。

このモード関数の疑似ランダム性の起源は一体何であろうか？十分小さい角度スケール $l >> 1$ の寄与を考えよう。この場合半径の非常に大きい球面 S 上での揺らぎを考えることと同等である。S をセル（Dirichlet 基本領域）内に引き戻すことを考えよう。すると S は ergodic にランダムにセル内を埋め尽くすであろう。従って、S 上の揺らぎは特別な方向を持たない。このことから、揺らぎは S 上ではガウス的なランダム場とみなせるだろう。l が小さくなれば、対応する球面の半径も小さくなるので、ランダム性は弱くなるであろう。しかし、厳密な数学的証明は未だ成されていない。

4 結論

紙面の都合で述べられなかったが、モード関数の疑似ランダム性から、閉双曲宇宙における宇宙背景輻射の温度揺らぎの統計的性質を予言することが可能になる。もし、大角度の温度揺らぎに等方的な skewness ゼロ kurtosis 正の非ガウス性があり、さらにスケール依存性が観測されれば、宇宙の空間成分が閉双曲空間のトポロジーを持つ強い示唆になるものと思われる [14]。

COBE のデータは 10 度以下の角度スケールに対しては、ノイズの大きさがシグナルよりも強くなり、天球上で、どの部分が冷たくどの部分が熱いのかを決定することは出来ない。直接に周期構造を探ったりによる方法や非ガウス性による、宇宙の「有限性」の探索のためには、ノイズの小さい精密な揺らぎの測定を天球上の広い範囲にわたって行う必要がある。

米航空宇宙局（NASA）が2001年6月に打ち上げたMAPが2003年1月にデータを公表する予定であり、我々は宇宙論的スケールに関する新しい情報を得ることが出来るだろう。我々の「標準的」宇宙モデルはどこまで正しいのであろうか？請うご期待。

参考文献

[1] S. Perlmutter, *et al*, Astrophys. J. **517**, (1999), 565.

[2] A. Melchiorri, *et al*, Astrophys. J. **536**, (2000), L63.

[3] 井上 太郎, 日本物理学会誌 **55**, (2000), 830-837.

[4] D.H. Coule, Phys. Rev. D **61** (2000), 063501.

[5] J.R. Gott, Mon. Not. R. Astron. Soc. **193**, (1980), 153.

[6] N.L. Balazs and A. Voros, Phys. Rep. **143**, (1986), 109.

[7] R. Aurich and F. Steiner, Physica D **39** (1989), 169.

[8] R. Aurich and F. Steiner, Physica D **43** (1990), 155.

[9] R. Aurich and F. Steiner, Physica D **48** (1991), 445.

[10] R. Aurich and J. Marklof, Physica D **92** (1996), 101.

[11] K.T. Inoue, Class. Quant. Grav. **18** (2001), 629.

[12] K.T. Inoue, Class. Quant. Grav. **16** (1999), 3071.

[13] K.T. Inoue, Phys. Rev. D **62** (2000), 103001.

[14] 井上　太郎, 博士論文, 京都大学 (2001).