量子ドットにおけるフラクタル的量子伝導現象

半導体微細加工技術を利用して作られた、カオティックキャビティー中での低温磁気伝導度を詳細に解析することで、カオスやフラクタル挙動に関する実験がこの十数年来行われてきている。ちょうど十年前、スタンフォード大学のマーカスらによる量子ドット内でのカオス挙動の実験が有名であり、スタジアム型キャビティー内での電子の運動軌道面積分布から決定される、零磁場近傍での負の磁気抵抗ピーク形状により、カオス挙動を議論している。また、バリスティック伝導を示す量子ドットや量子ドット列における、磁気伝導度ゆらぎのフラクタル挙動が最近報告され、その統計的あるいは階層構造的自己相似な振る舞いが注目されている。本報告においても、このようなフラクタル的な量子伝導の実験例についていくつか紹介するとともにその問題点について考察した。

千葉大学工学部　落合勇一

はじめに

半導体ヘテロ接合面に生じる２次元電子系（２ＤＥＧ）を微細加工して作製されるサブミクロンスケールの量子ドット中での電子のダイナミックスは、その弾性散乱長がドットの大きさよりも長くできるので、弾道的（バリスティック）になるとともに、電子が波動的に振舞う量子効果も無視できない。しかしながら、その電子波としてのフェルミ波長が数 10ｎｍとなるＧａＡｓ系では、弾性散乱長を１０μｍ程度まで長くできるので、古典的なバリスティック運動と考えてもよい。したがって、さし渡しが１ミクロン程度の量子ドット内では、電子波はバリスティックな古典粒子として何回転かしていると考えることができる。マーカスらはまさにこの点に注目して、円形ビリアード内での規則軌道運動、あるいはスタジアム形ビリアード内でのカオス的な運動を量子ドットによるカオティックキャビティー内で実現させようと考えた。[1]　このようなドット内では、カオス的な磁気伝導度ゆらぎが期待されるほかに、フラクタル的な伝導度ゆらぎを示す実験結果も報告されている。これらは、磁場の観測範囲を順次狭めたりあるいは広げたりしてみても、スケールフリーな統計的なフラクタルパターンを示す磁気伝導度ゆらぎや、階層構造的な自己相似性を示す磁気抵抗が観測されている。

量子ドット実験で重要なパラメータは、温度（T)、ドット内面積（A_B)、電子濃度（n_{2d})、そして電子波の出入口にある量子ポイントコンタクト（ＱＰＣ）での電子波モード数（n）である。量子ドット内の電子波ダイナミックスを考える際にはこれらのパラメータを基礎にして、電子波の位相干渉時間（τ_ϕ）やドット内電子波トラップ時間（τ_q)、量子ドットの平均エネルギー準位間隔（Δ）等が算定される。たとえば、τ_qはτ_ϕから推定されるので、ドット内での電子波の位相干渉効果に由来する磁気抵抗の量子ゆらぎを解析して求める。[2]　また、Δは$h^2/2\pi m^* A_B$で与えられドット内面積に反比例している。したがって、このような状況下での電子波ダイナミックスに対しては、半古典論的な取り扱いがよく使われている。

半導体キャビティーでのカオス実験

１０年程前、ジェラバードら[3]やバランジャーら[4]が予想し、マーカスら[1]やチャンら[5]の実験で示されたように、バリスティック系での零磁場ピークが、カオスやレギュラー軌道をそれぞれ生じる円形やスタジアム形のキャビティーを正しく認識するであろうか。この疑問に答える一つの解答が、アリゾナ州立大学バードらにより、量子ドット内面積をプランジャーゲートの電圧を調節して制御する矩形量子ドット[6]の磁気伝導実験によって得られている。この実験によれば、バリスティック系での零磁場ピークは、ゲート電圧を調節してドットの大きさを極くわずか変化させただけでも、非常に敏感に、線形なカスプ形（レギュラー）と緩やかなローレンツ形（カオス）との間の頻繁な転移を繰り返すこと

が示された。しかし、この場合τ_qの値から考えると電子波はキャビティー内を高々１０回程度周回するにすぎない。もし、マーカスらが提唱したように、キャビティーがカオス形からレギュラー形と変化してそれが零磁場ピークに反映されると考えるならば、矩形キャビティーの形そのものがほとんど変化しないこのような場合においてカオス・レギュラー転移が何回も繰り返す実験結果の解釈は彼の説明ではかなり難しい。さらに、バードら[6]は矩形ドットのポテンシャル・プロファイルを考慮に入れた計算機シミュレーションにより、キャビティー内電子波の伝播を波動関数スカーで解析し、ゲート電圧依存しているキャビティーの大きさに対応して、零磁場近傍での磁気抵抗ピークが頻繁に形状変化しうることを示した。また、同じ頃サウスウエールズ大学のテイラーやミコリッヒ等のグループ[7]による、正方形ドット内に丸い散乱体を導入した、いわゆるシナイビリアードの低温磁気伝導実験においても、ゲート電圧変化に敏感な零磁場ピークの形状変化の様子が報告されている。以上と前後して、ＮＥＣの二瓶ら[8]によるアンチドット系でのカオティック軌道の実験や、高磁場中での共鳴ダイオードにおけるカオス軌道の観測などの報告がなされたが、量子ドット系でのカオス軌道の実証についてはまだ結論に至っていない。量子ドットのように、キャビティー内で何回も散乱するのでなく、量子細線のような隙間を電場で偏向されながら通過していく電子波のモデル計算が原山ら［9］によりなされていて、条件によってはダイナミックスがカオス的になることが示されている。本来この種の量子ドットの伝導実験は開放系であるため、このような設定で実験を行う方が、カオスの実証のためにはより実現性が高いように考えられる。

磁気伝導ゆらぎのフラクタル挙動

種々の単一量子ドットの零磁場近傍での磁気伝導ピークを詳細に調べてみると、ゲート電圧変化に敏感で、頻繁にかつ複雑に形状変化し、カオス・レギュラーの区別が簡単に判別することができないことがわかった。そして前述のように、シナイビリアードでの低温磁気伝導実験でも、量子ドット系でのカオティック軌道の実証についてはまだはっきりした結論がえられてない。ところが、このシナイビリアード実験の磁気伝導度ゆらぎにおいて、４重の自己相似階層構造を示す磁気抵抗が観測された。これまでのフラクタル挙動としては、金属細線や量子細線での伝導度ゆらぎを相関関数等で解析する統計的な方法が用いられていた。その後、このテイラーやミコリッヒ等のグループ［10]はこのようなカオティックキャビティーでの磁気抵抗の伝導度ゆらぎのフラクタル挙動を自己相似階層構造によるフラクタル性の解析だけでなく、これまでの統計的なフラクタル性も含めて複数のアプローチで解析している。そのひとつは、海岸線のフラクタル次元、D_F、を解析するときと同じように、磁気抵抗パターンをメッシュで区切った単位ボックス域を変数とし、その中の占める領域を統計的に数えるボックスカウンティングである。別の方法はケツメリック[11]の提案した、量子ゆらぎの相関関数解析であり、このゆらぎの分数ブラウン運動との類似性からそのべき乗則によりフラクタル次元D_Fを算定している。テイラーらによる一連の仕事からわかったことは、D_Fが平均エネルギー準位間隔Δと、温度Tやτ_qに依存したエネルギー準位幅 Wとの比$Q=\Delta/W$でスケールされる、という結果である。このスケール則では、このQが０に近づく古典極限とQが１０以上の量子域で、D_Fが１となり、両者の中間あたり（Q～１）で、すなわち半古典論的特性が一番顕著になるところで、D_Fは最大値（１．５７）をとるというのが特徴的である。そして、このスケール則はキャビティーの形状や大きさにはよらず、n_{2d}やポテンシャル形状にもほとんど依存しないようであると報告している。しかしながら、自己相似階層構造のフラクタル挙動と統計的なフラクタル性の起源との関連性についてはまだ明らかにされていない。

むしろこの実験で重要なのは、この自己相似階層構造の原因が、シナイビリアード中の散乱体にあることを指摘している点である。磁気抵抗ゆらぎの統計的なフラクタル挙動は

ビリアード中に散乱体がなくとも、内部のソフトなポテンシャル壁を仮定すれば説明可能であり、その自己相似階層構造に関しては散乱体の存在が不可欠であることを指摘している。そして、統計的なフラクタル性を有する磁気抵抗ゆらぎのモデルについては、キャビティー内のソフト壁ポテンシャルに散乱される電子波がコメンシュレイトなＡＢ軌道を何周かして、かつ大きさの異なる多くの周回軌道を足し合わせる、まさにＡＡＳ的な減衰余弦関数で表現できると仮定している。その延長上を考えると、よりフラクタル性が顕著のように思える自己相似階層構造はシナイビリアードの散乱体による後方散乱増大に起因した減衰係数の変化によって、伝導度ゆらぎに反映されると推測している。そして、このように考えた減衰余弦関数は自己相似階層構造を持っているワイエルシュトラウス関数に類似していることから、ポテンシャル壁での散乱過程がフラクタル性の起源と関係があるにちがいないと述べている。

同じ頃、大阪市立大学の川畑や中村[12]はこのようなカオティックキャビティーの位相空間モデルとしては、カオス・レギュラーの混合系が重要であることを提唱し、その磁気伝導度に寄与するＡＢ効果やＡＡＳ効果等の位相干渉効果について詳細な解析を行っている。さらに最近では、ブディヨノと中村[13]によって、伝導度ゆらぎの自己相似階層構造に関する考察が報告されている。これは、キャビティー入口のＱＰＣ近傍にサドル型ポテンシャルを考えて、久保公式を用いた半古典論による磁気伝導度計算である。ここでは、三角形のヘノン・ハイレス・ポテンシャルが生成させているサドル型ポテンシャルを考えることにより、周期倍加軌道分岐を用いて議論を進め、前述したようなワイエルシュトラウス型関数による磁気抵抗の理論式を導出可能であり、これが自己相似階層構造のもとになっていることを述べるとともに、カオス・レギュラー混合系の重要性についても指摘されている。このようなサドル型ポテンシャルはポテンシャル壁がソフトであり、自己相似階層構造の説明には、内部散乱体の存在よりもソフト壁の影響や周期倍加軌道分岐が重要であることが考えられる。

すなわち、磁気伝導度ゆらぎの実験結果にみられる自己相似階層構造であるが、テイラーやミコリッヒ等はこのようなフラクタル挙動が観測されるためには、キャビティー内の散乱体が不可欠であることを述べている。しかしながら、千葉大学と理研の共同でなされた量子ドット列キャビティーによる磁気伝導実験では、対称性のよいキャビティー形状ではその内部に散乱体がない場合、磁気抵抗に自己相似階層構造を認めることは困難であるが[14]、対称性が低い量子ドットで内部に散乱体がない場合、彼らの実験と同様に自己相似階層構造が存在することを示している[15]。この実験に使われた非対称なキャビティーは片側が大きなゲート電極となっているいくつかのＱＰＣからなり、中心のＱＰＣゲートを制御することによりキャビティーの大きさを変えることができる。観測された磁気伝導度には、前回の研究会にて報告したように３重の自己相似階層構造がいくつか現れている。さらに今回、大きさが少し異なる２つの量子ドットをＱＰＣで結合させた、結合量子ドットにおいても、より明瞭に自己相似階層構造が現れることが確認された。しかも図１にあるように、中心ＱＰＣにて両ドット間の結合度を制御することにより、Qの値が変化するとともに、それに対応してD_Fも変化し、サドル型ポテンシャルでのソフト性が自己相似階層構造的フラクタル挙動に大きく関与していることが推測できる。そして、この自己相似によるフラクタル次元は、この磁気伝導ゆらぎからボックスカウンティングの方法で計算される統計的なフラクタル次元とは常に一対一に対応していないようである。したがって、シナイビリアードのようなカオティックキャビティーでなくともフラクタル的な磁気伝導が現れることが判明し、ソフト壁のポテンシャルの存在やサドル型ポテンシャルでの周期倍加軌道分岐が重要であることを示唆している。そして、自己相似階層構造的フラクタル挙動と統計的なフラクタル挙動との相関も明らかでないので、これに関してはさらにデータを集めて詳細に検討する必要がある。さらにこの相関は、これまでの実験結果の解釈の

基盤となっている、カオティックキャビティーの位相空間モデル、カオス・レギュラーの混合系、の存在確認とも関連しており大変重要な検討課題である。

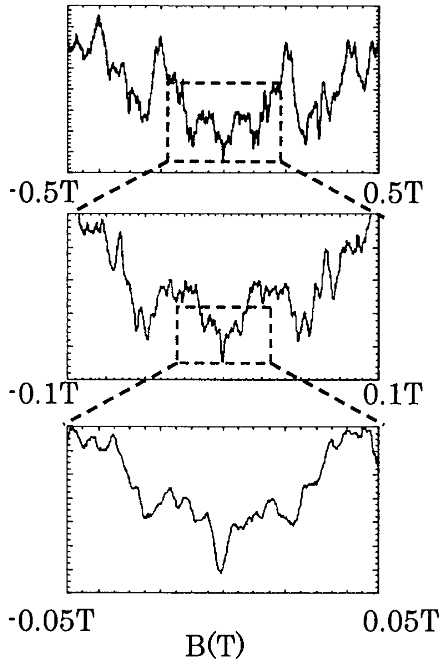
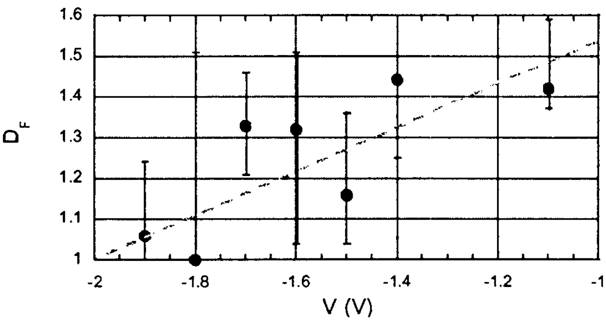


図1．結合量子ドットの磁気コンダクタンス（左）と自己相似フラクタル次元の結合度制御のゲート電圧依存性（下）



以上最近なされた量子ドットをカオティックキャビティーとする一連の磁気伝導実験についてまとめると、ドット形状を変化させて起こさせるカオス・レギュラー転移に関しては未解決であるが、伝導度ゆらぎにみられるフラクタル挙動に関しては、説得性のある結果が中間的ではあるが得られている。これらは、量子計算素子応用にも関係し、またナノ冷凍機に関連した量子ラッチェット[16]などの興味ある話題に進展していて、今後のカオス複雑系がナノサイエンスに貢献していく有力な研究指針のひとつであると考えられる。

文献

1. CW Marcus et al., Phys.Rev.Lett.,69(1992)506.
2. DK Ferry and SM Goodnick, Transport in Nanostructures, Cambridge Univ. Press,1997.
3. RA Jalabert et al., Phys.Rev.Lett.,65(1990)2442.
4. HU Baranger et al., Phys.Rev.Lett., 70(1993)3876.
5. AM Chang et al., Phys.Rev.Lett., 73(1994)2111.
6. JP Bird et al., Chaos, Solitons Fractals 8(1997)1299.
7. RP Taylor et al., Phys.Rev.Lett., 78(1997)1952.
8. F Nihey etal., Phys.Rev., B51(1995)4649.
9. Takahisa Harayama and Pierre Gaspard, Phys. Rev. E64(2001) 036215.
10. AP Micolich et al., Phys.Rev.Lett., 87(2001)036802.
11. R Ketzmerick, Phys.Rev., B54(1996)10841.
12. S Kawabata and K Nakamura, J.Phys.Soc.Jpn., 65(1996)3708.
13. A Budiyono and K Nakamura, private communucation.
14. Y.Ochiai et al., Semicond.Sci.Technol.13(1998)A13.
15. L-H Lin et al., in reparation.
16. H Linke et al., Proc. 25th ICPS., Osaka 2000 (Eds. N Miura and T Ando) 1009.