

# カオス写像素子模型

## — 乱流相における集団周期運動の発現, そのユニバーサリティ —

明治大学理工学部 物理 島田徳三<sup>\*)</sup>

大域的結合写像素子模型で我々が最近見いだした興味深い現象を報告する. この模型はカオス的な振る舞いを持つ写像素子を全体の平均場を通して結合させたものである. 素子に固有な非線形性が高く, 素子間の相互作用が極めて弱い模型の領域は, 従前, 乱流相と呼ばれ, 素子はほとんど独立・無秩序に運動すると考えられていた. しかし実際には, 素子の非線形性と結合定数の間に一定の条件があると素子の持つ周期窓の影響が同期現象をして通して顕在化し, 少数クラスターの形成とそれらの周期運動が起こる. さらに大域的結合設定をリラックスして, 距離に依存する相互作用の場合を考察する.

### §1. 大域的結合写像素子模型

#### 1.1. 模型の発展方程式

均質的な大域的結合写像素子模型 (GCML: Globally Coupled Map Lattice) では格子  $\Lambda$  上の<sup>\*\*)</sup>  $N$  個の同一の写像素子 ( $f(x) = 1 - ax^2$ ) を平均場  $h(t)$  を通して結合させ, 式

$$x_P(t+1) = (1 - \epsilon)f(x_P(t)) + \epsilon h(t), \quad P \in \Lambda, \quad \text{但し, } h(t) \equiv \frac{1}{N} \sum_{Q \in \Lambda} f(x_Q(t)) \quad (1)$$

で発展させる. この模型の物理は金子によって開拓された. 模型のパラメータ  $(a, \epsilon)$  の平面での相図を与えた論文<sup>1)</sup>, 乱流相で素子間の弱い相関の指摘した論文<sup>2)</sup>などが本研究の出発点となっている.

非線形パラメーター  $a$  を例えば 1.90 に選ぶ. このとき結合定数  $\epsilon$  が大きい ( $\epsilon \geq 0.4$ ) と素子たちが完全に同期し, 一体化して, 高い非線形性 ( $a = 1.9$ ) のままランダムな運動をする.  $\epsilon \approx 0.25 - 0.28$  では系の素子が 2 つのクラスターに分かれ, 平均場の揺らぎを押さえて互いに逆位相の安定な周期運動をする.<sup>1), 3)</sup> もう少し  $\epsilon$  を減らしていくとクラスター数が  $2 \rightarrow 3 \rightarrow \dots$  と漸増する. 最後に結合定数がきわめて弱い領域 ( $\epsilon \leq 0.12$ ) では, ごくおおざっぱにみると, 素子たちは, バラバラに (クラスター数  $N_c \propto N$ ), ランダム運動をするように見える. 実は, このような状態でも, 平均場の時間揺らぎの解析から素子たちの中の弱いコヒーレンスを検出できる.<sup>2)</sup> さらに, 我々はこのように結合定数が弱い領域でも, 一定の条件の下ではこの相関がきわめて顕著になることを見いだした. ‘乱流相’は, むしろ, このような周期性の発現に支配された領域とみた方が全体像がつかみやすい.

<sup>\*)</sup> E-mail: tshimada@gravity.mind.meiji.ac.jp.

詳しい報告は, シミュレーションプログラム等も含めて <http://www.isc.meiji.ac.jp/tshimada> に置いたので閲覧ください. なお研究会の余暇に, 東海大牧野浩典氏に ppt への OLE-TeX による大変便利な入力法を教えていただいた.

<sup>\*\*)</sup> GCML ではどの写像も全く対等なので距離の概念がない. 従って, GCML の格子  $\Lambda$  は零次元である. しかし, 後段の議論に便利のように  $\Lambda$  を明示した.

### 1.2. 乱流相での少数クラスター状態の自発的形成

一般に素子たちが自発的に引き込みを起こしているときは平均化の相互作用のために系の非線形性は有効的に減少する。また、素子(ロジスティック写像)は周期窓を無数に持つ。そこで、もし同期引き込みの下の有効非線形性  $b$  ( $a \rightarrow b \equiv ar$ ,  $r < 1$ ) が、単一素子の周期窓の区間に入ると、系は周期窓の周期性を反映した運動を行う。もっとも幅が広く顕著なのは周期3の窓 ( $b \in [1.75, 1.79]$ ) である。図1(a)では、系は殆ど素子数の等しい3クラスターに分かれ、互いに位相が  $2\pi/3$  ずれた3

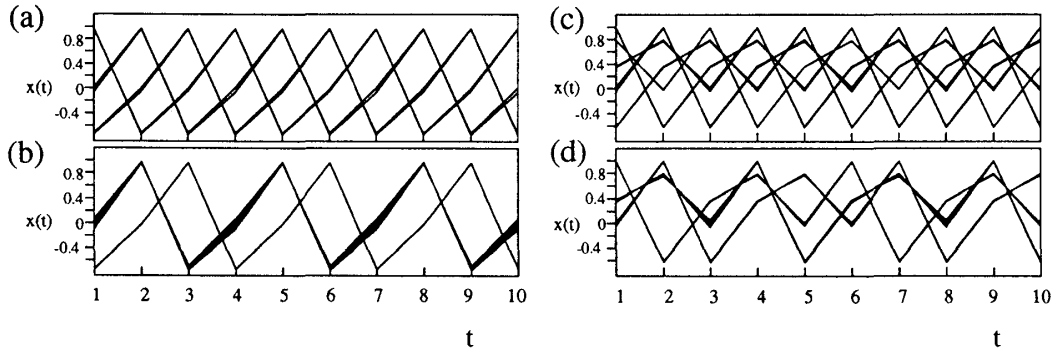


Fig. 1.  $N = 10^4$  GCML で自己形成されたクラスター・アトラクター。ランダムスタートから 1000 回 iteration し、それ以降の 10 ステップを示す。(a)  $p3c3$  MSCA. パラメータ  $(a, \epsilon)$  は  $(1.90, 0.0352)$ 。正確には  $p6c6$  への分岐で最安定化している。(b)  $p3c2$   $(1.90, 0.046)$ , (c)  $p5c5$  MSCA  $(1.663, 0.0118)$ , (d)  $p5c3$   $(1.663, 0.0120)$ 。

周期3クラスター ( $p3c3$ ) 運動をしている。我々はこのような状態を MSCA (Maximally Symmetric Cluster Attractor) と呼んだ。<sup>5)</sup> (b) は、結合定数をやや大きくした場合で、クラスター軌道は (a) と殆ど変わっていないが、強いパンチのため一つのクラスターが欠落した  $p3c2$  運動をしている。(c), (d) はそれぞれ  $p5c5$  MSCA と  $p5c3$  クラスター・アトラクターを示す。このようなクラスター状態の特徴付けでは平均場時系列の 2 乗分散 ( $MSD \equiv \delta^2 h \equiv \sum (h(t) - \bar{h})^2 / T$ ) が有効である。クラスターへの素子数分配の対称性が高い MSCA では平均場は殆ど揺らがない ( $\delta^2 h \approx 10^{-6} - 10^{-4}$ )。逆にクラスター欠如が起こっている  $p > c$  状態では 2 乗分散は極めて高い ( $\delta^2 h \approx O(1)$ )。GCML 乱流相での周期クラスター形成は、3 グループではほぼ同時に報告された。<sup>4)-6)</sup>

量子的なカオス現象を考えると、古典解はきわめて大切である。対称性が自発的に破れた場の理論では真空は完全に同期した状態であるが、我々の見いだした状態は、カオス系の量子場理論では新しいタイプの真空状態を考えなければならないことを示唆している。

### 1.3. 周期窓の foliation

それでは、どのような条件の下でこのような周期クラスターが発生するのだろうか？ それには、MSCA では素子数分配の対称性のため、平均場が殆ど揺らがないという事実が鍵になる。実際、(1) で  $h(t) \equiv h^*$  とおいて、素子全体にわたって共通に (時間によらない) スケール変換:  $y_P(t) = (1 - \epsilon + \epsilon h^*)^{-1} x_P(t)$  をすると、これらは標準形:  $y_P(t+1) = 1 - by_P^2(t)$  で発展し、非線形性パラメータは確かに  $a$  から有効値  $b$ :

$$b = ar, \quad r = (1 - \epsilon)(1 - \epsilon(1 - h^*)) \approx (1 - \epsilon)^2 \quad (2)$$

へ (結合定数  $\varepsilon$  が大きければ大きいほど) 減少している.  $x_P$  と  $y_P$  は互いに相似である. 従って,  $x_P$  が周期  $p$  の MSCA を作っているなら,  $y_P$  のパラメータ  $b$  は  $p$  周期の窓の区間内にいなければならない. また, この相似性から  $y_P$  の周期平均  $\bar{y}_b$  は  $h^*$  と

$$\bar{y}_b = \langle y_P \rangle_A = (1 - \varepsilon + \varepsilon h^*)^{-1} h^* \quad (3)$$

の関係にある. \*) (2) と (3) から  $h^*$  を消去すれば周期  $p$  の MSCA を作る GCML のパラメータ  $(a, \varepsilon)$  は  $(a, \varepsilon)$  平面で, 窓内の点  $(b, 0)$  から流れ出す曲線:

$$(a, \varepsilon)^b(r) = \left( \frac{b}{r}, 1 - \frac{r\bar{y}_b}{2} - \sqrt{r(1 - \bar{y}_b) + \left(\frac{r\bar{y}_b}{2}\right)^2} \right)$$

の上になければならないことがわかる. 図 2 参照. 測定結果は, 確かに曲線に沿って MSD の値はほとんど一定であることを示す. ( $a = 1.8, 1.9, 2.0$  の 3 つの MSD 曲線を比較されたい.) それぞれの周期窓のダイナミクスがこの曲線を伝わって伝播し, 曲線全体は周期窓分布の無数のレプリカを作っていくので, 我々はこの

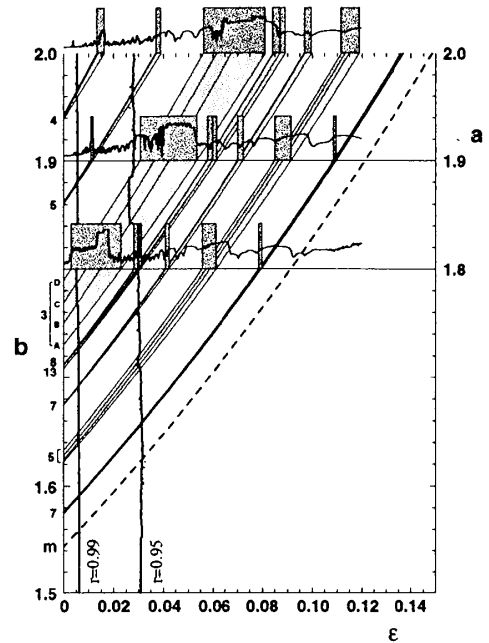


Fig. 2. 周期窓ダイナミクスの foliation 曲線群.

解析的に導いた曲線を周期窓ダイナミクスの foliation 曲線と呼んでいる. \*\*) 周期窓に近い領域 ( $r \geq 0.95$ ) では必ずクラスターが形成されるが, 曲線に沿ってもっと下流域になると同期が外れて素子達はばらばらに運動する. ここに顕著な規則性がみられる:—おおよそ  $r \approx 0.95$  を閾値として

- (1) 上流 ( $r \geq 0.95$ ) で  $p > c$  クラスター形成が起こっている曲線の下流 ( $r \leq 0.95$ ) では, 平均場時系列の 2 乗分散は上流と同様非常に大きく, 時系列のヒストグラムは周期軌道を反映して必ず多峰形になっている.
- (2) 上流で MSCA の場合, 下流ではヒストグラムは必ず単純な Gauss 分布になっている. MSCA では, クラスター間の素子数の分配の対称性から, 軌道の振巾の情報は平均場  $h(t)$  から消去され, 平均場時系列のヒストグラムは  $h^*$  を中心とする鋭い単峰ピークである. 下流で観測されたガウス分布は, 上流での集団ダイナミクスが下流にも継続されていることを示している. 一方, 2 乗分散は, 上流での値  $10^{-4} - 10^{-2}$  と比べると, 素子たちの引き込みが壊れて  $10^{-4} - 10^{-2}$  に上昇しているが, この値は, 集団にわたるコヒーレンスの存在を反映して, 素子数  $N$  を大きくしても大数の法則 ( $\delta^2 h \approx 1/N$ ) に従わず一定値になる.

初期に, 乱流相 GCML では平均場の測定から大数の法則は破れていて, 中心極限定理が成り立つ, ということが ‘隠れた相関’ として大きな話題になった.<sup>2)</sup> 実は, 上記のように, この ‘異常’ 統計が起こるのは必ず MSCA 形成の下流域であり, 軌道情報があからさまに見えず相関が隠れた Gauss 分布となるのは集団ダイナミクスの対称性に起因していると考えられる.<sup>5), 7)</sup>

\*) MSCA では, (任意の) クラスター軌道の周期平均は特定時刻での系の平均場  $h^*$  に等しい. この事実と  $x_P, y_P$  の相似性から (3) の第一の等式が成立する.

\*\*)  $r = 0.99$  等,  $r \approx 1$  に設定すると, MSD 曲線は素子の周期窓をきわめて忠実に反映する. この場合, GCML は, いわば巨大数の素子のコヒーレンスで, ごく巾の狭い周期窓を MSD 曲線に映し出す拡大鏡となる.

## §2. 非局所結合写像素子模型と周期性発現のユニバーサリティ

### 2.1. 模型と測定結果

前節の GCML の発展方程式 (1) で平均場  $h(t)$  を局所的な平均場  $h_P(t)$ :  $h_P(t) = \sum_{Q \in \Lambda} W_{PQ} f(x_Q(t))$  に置き換える. 相互作用の素子間距離 ( $\rho_{PQ}$ ) への依存性は, 冪形, 指数形, カットオフ形の基本的な 3 つのタイプを考える:

$$W_{PQ} = c(\delta_{PQ} + (1 - \delta_{PQ})w(\rho_{PQ})),$$

$$w(\rho) = \begin{cases} 1/\rho^\alpha & \dots \text{POW}_\alpha \text{ 模型} \\ \exp(-(\rho - 1)/\rho_0) & \dots \text{EXP}_{\rho_0} \text{ 模型} \\ \theta(\kappa - \rho) & \dots \text{CML}_\kappa \text{ 模型.} \end{cases}$$

定数  $c$  は, 重みの規格化:  $\sum_{Q \in \Lambda} W_{PQ} = 1$  が満たされるように決める. このとき  $\sum_{P \in \Lambda} h_P(t) = h(t)$  となる. 模型は, それぞれ, 大域形極限 ( $\alpha = 0, \rho_0 \rightarrow \infty, \kappa \rightarrow \rho_{\max}$ ) と隣接相互作用極限 ( $\alpha \rightarrow \infty, \rho_0 = 0, \kappa = 1$ ) を内挿する. 図 3 は  $a = 1.90$  の  $\text{POW}_\alpha$  で, ランダム初期状態からの平均場時系列を  $100(\varepsilon) \times 50(\alpha)$  の格子点それぞれで計算し,  $t = 10^3 - 2 \times 10^3$  の間隔での 2 乗分散を  $\alpha\varepsilon$ - 平面上の曲面として表したものである.  $\alpha = 0$  の切断面が GCML の MSD 曲線 ( $\delta^2 h$  を  $\varepsilon$  の関数として表したもので, この曲線の峰谷のそれぞれが素子の周期窓のダイナミクスを反映している.  $0 \leq \alpha \leq 0.12$  では, GCML と全く同様な峰谷がみられる ( $r \geq 0.95$  では GCML と同じく周期クラスター形成が起こっている).  $\alpha$  が増加して隣接相互作用の極限に近づくと, すべての  $\varepsilon$  に共通に峰谷が消えていく. この消え方は, ‘空間の次元が高いほど遅い’. つまり  $D = 1$  で

任意の  $\alpha$  の MSD 曲線を選ぶと, これと同じものが  $D = 2, 3$  でも  $\alpha', \alpha''$  でみられ,  $\alpha < \alpha' < \alpha''$  である. 他の模型でも適当なパラメータ値でこれと同じ MSD 曲線がみられる. 測定結果をまとめると

(R-I)  $\text{POW}_\alpha$ :  $D = 1, 2, 3$  で  $\alpha < \alpha' < \alpha'' \approx 1 : 2 : 3$  である ( $\alpha \leq 1.0$  の範囲).

(R-II)  $\text{CML}_\kappa$ : カットオフ範囲  $\kappa$  に含まれている素子数  $K(\kappa)$  が同じであれば, 次元によらず, 同じ強さの周期性発現が起こる.

(R-III)  $\text{EXP}_{\rho_0}$  も大域, 局所両極限を内挿する\*).  $\text{EXP}_{\rho_0}$  と  $\text{CML}_\kappa$  は,  $\kappa \approx 2\rho_0$  で等価になる.

### 2.2. 作業仮説

GCML の発展は, 次の 2-ステップ過程の繰り返しである:

(1)  $x_P(t) \rightarrow z_P(t) \equiv f(x_P(t))$ : 素子の非線形性のため素子の値は分散する.

(2)  $z_P(t) \rightarrow x_P(t+1) = (1-\varepsilon)z_P(t) + \varepsilon h(t)$ : 素子達は系平均場  $h(t)$  に  $1-\varepsilon$  の割合で収束される.

\* わざわざ断るのは, predictability 解析<sup>8)</sup> で  $\text{EXP}_{\rho_0}$  模型は  $\rho_0$  によらず隣接相互作用模型と同等だという ‘迷信’ があるからで, predictability についても,  $\text{EXP}_{\rho_0}$  が大きな  $\rho_0$  では GCML 的な振る舞いを持つことを確認した.

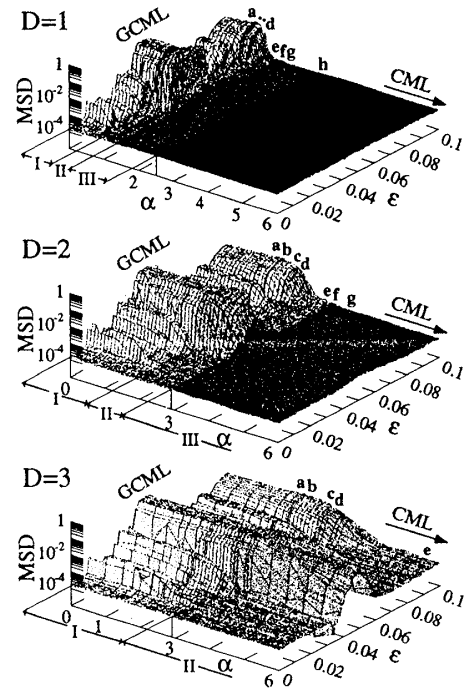


Fig. 3.  $a = 1.90$  冪形非局所模型での  $(\alpha, \varepsilon)$  平面上の MSD 曲面. 素子数は  $D = 1, 2, 3$  で順に  $51^2, 51^2$  and  $13^3$ . GCML と差異のない領域を白色, 周期 3 の窓の影響のみが見られる領域を淡いグレイ, 隠れた相関の領域をグレイ, 全く相関がみられない領域を黒色で識別している. (a)-(h) は, 主立った周期窓 ( $p = 5, 3, 8, 7, 5'$ ) の発現で特徴付けした曲線を示している.

一般の非局所 CML では、第 2 ステップで、各素子が自分の位置での局所平均場  $h_P$  に収束されるということのみ異なる。GCML を「ランダム・プリズム入りの凹レンズ」と「単一焦点の凸レンズ」の繰り返しからなる光学系だとすれば、非局所 CML では凸レンズの方もいささかフォーカスのぼけたものになっている。そこで、一般の非局所 CML での周期性発現は、空間の次元や相互作用の詳細によらず、局所平均場  $h_P$  の系平均場  $h$  の周りでの揺らぎ  $\langle \delta^2 h_P \rangle_A$  で決まる、と考えられる。これを作業仮説として採用しチェックを行おう。

### 2.3. ユニバーサリティ仮説の検証

乱流相では、結合定数はきわめて弱く設定されている。確かに一定条件の下では周期クラスターが発現するのだが、これは数十から数百ステップという写像素子系の時間スケール (Lyapunov 指数の逆数) からみるとずっと長い時間スケールで引き込みが行われるためである。従って格子上の素子の値のスナップショット分布には空間相関は殆ど含まれない (これは数値測定で確認済み<sup>7)</sup>)。そこで局所平均場の揺らぎ  $[\delta h_P(t) \equiv h_P(t) - h(t)]$  の格子上的 2 乗分散は、各素子の揺らぎ  $[\delta f(x_P(t)) \equiv f(x_P(t)) - h(t)]$  の格子上的 2 乗分散と、(重み付けの平均の) 大数の法則によって、

$$\langle \delta h_P^2(t) \rangle_A \approx \mathcal{F} \langle (\delta f(x_P(t)))^2 \rangle_A, \text{ 但し, } \mathcal{F} \equiv \sum_Q (\overline{W_{PQ}})^2 = \sum_Q (W_{PQ})^2 - \frac{1}{N}, \quad (4)$$

と任意の  $t$  で関係づけられ、局所平均場の揺らぎを平均化によって抑制する因子  $\mathcal{F}$  はモデルの結合定数で決まる。CML $_{\kappa}$  では、 $\mathcal{F} = 1/K - 1/N$  であり、(R-II) を端的に与える (実は結果 (R-II) を解析的に理解しようとしてこの仮説にたどり着いた)。POW $_{\alpha}$  模型については、 $D = 2, 3$  でサイト  $P$  から等距離の近傍系を球面 (円) でなく正 6 面体 (正 4 角形) で近似すれば  $\mathcal{F}$  を解析的に評価できる。例えば、 $\alpha = 1/2, 1, 3/2$  では、 $D = 1, 2, 3$  のいずれでも  $\mathcal{F} = \log N / 4N$  となる。これは (R-I) と一致する。作業仮説で (R-III) も説明でき、さらに、 $D = 1$  の POW $_{\alpha}$  の MSD 曲面のみを入力データとして、他の 8 通りのケース [ $3(\text{相互作用の種類}) \times 3(D = 1, 2, 3) - 1 = 8$ ] の MSD 曲面も大変よく再現できることもわかった。最近の論文<sup>7)</sup>を参照されたい。また、ここでの報告は写像素子の結合に限られているが写像素子の考察は流れ素子の結合系へも応用を持つ。<sup>9)</sup>

一つの素子でカオスは周期窓と共存する。その古典結合系で必然的に現れる MSCA のようなコヒーレント状態は、多数系の準古典状態の考察にも意味を持つのではないだろうか。—

ユニバーサリティ仮説の検証は共同研究者塚田将 (現日立ソフト) の努力で裏打ちされている。この機会に謝意を表したい。またオーガナイザーの諸先生には分野を超えた交流の機会を作ってくださったことに感謝を申し上げる。

### References

- 1) K. Kaneko, Phys. Rev. Lett. **63** (1989), 219.
- 2) K. Kaneko, Phys. Rev. Lett. **65** (1990), 1391.
- 3) T. Shimada and S. Tsukada, A resolution of the puzzle of the posi-nega switch mechanism in the globally coupled map lattice, in Proc. Int. Symp. Artificial Life and Robotics 1 (2001), 242 (nlin.CD/0012036).
- 4) T. Shibata and K. Kaneko, Physica **D124** (1998), 177.
- 5) T. Shimada and K. Kikuchi, Phys. Rev. **E62** (2000), 3489.
- 6) A. Parravano and M. G. Cosenza, Int. J. Bifurcation Chaos **9** (1999), 2331.
- 7) T. Shimada and S. Tsukada, Physica **D168** (2002), 126-135; Prog. Theor. Phys. **25** (2002), 108.
- 8) G. Paladin and A. Vulpiani, J. of Phys. **A 27** (1994), 4911.
- 9) H. Fujigaki, M. Nishi and T. Shimada, Phys. Rev. **E53** (1996), 3192.  
H. Fujigaki and T. Shimada, Phys. Rev. **E55**, 2426, (1997).