Wigner-Dyson correlation without ensemble averaging

筑波大学 物理学系　谷口 伸彦 [1]

はじめに

乱れた電子系や不規則境界を持つビリヤード系 (量子カオス系) のエネルギー準位相関は、十分「カオス的領域」においてランダム行列理論から得られる普遍的な Wigner-Dyson 相関に従う。この conjecture は Bohigas-Giannoni-Schmit[1] によるものであり、以後多くの量子カオス系において数値的に実証されてきた。ランダムポテンシャルを持つ乱れた電子系に対しては、有効場理論を用い、解析的にこの conjecture を確認する事ができる [2]。乱れた電子系 (拡散領域) のダイナミクスを記述するため、ランダムポテンシャルについてアンサンブル平均をとった理論を作ると、いくつかのステップを経た後、次のような $Q^2 = I$ という拘束条件をもつ超行列上の有効理論「超行列非線形シグマ模型」が得られる (数係数は対称性による)。

$$F[Q] = \frac{\pi\nu}{2}\mathrm{Str}\int\left[-i\omega^{+}\Lambda_3 Q + \frac{D_0}{2}(\nabla Q)^2\right]d\mathbf{r} \quad \rightarrow \quad F_{\mathrm{0D}}[Q] = \frac{\pi}{4\Delta}\mathrm{Str}\left[-i\omega^{+}\Lambda_3 Q\right] \tag{1}$$

この模型において、0 次元近似 ($Q =$ 定超行列) を行い、Q についての積分を実行すると DOS 相関が Wigner-Dyson 相関に等しくなる事を示す事ができる。従って BSG conjecture (= 普遍的な Wigner-Dyson 相関の存在) を正当化するためには、有効場理論において $F_{\mathrm{0D}}[Q]$ の存在と近似の妥当性を示せば良い。従来使われている「ランダムポテンシャルに関するアンサンブル平均」の処方箋の元では、拡散的ダイナミクスしか記述できないため、空間的に広がった相関を持つポテンシャルや弾動的ダイナミクスを持つ系に対し有効理論を適用するには、より広い枠組が必要とされる。以上のような観点から、スペクトル平均や一連の (ユニタリ等価な) ハミルトニアン族についての平均を考える事により、$F_{\mathrm{0D}}[Q]$ を正当化する試みが行われて来た [3]。本講演では、系の対称性を用いたより一般的な定式化を行い、アンサンブル平均の役割りについて考察する。

有効理論の不変性

標準的な手法に沿って、2 体の Green 関数 $G^{R}_{\omega/2}G^{A}_{-\omega/2}$ (アンサンブル平均なし) を生成する generating function として作用を定義する。等エネルギー面での有効理論であるため、正

[1] E-mail: taniguch@cm.ph.tsukuba.ac.jp

しい規格化をするためには、アンサンブル平均の有無を問わず、超対称化が必須となる。そのため2体のGreenグリーン関数G^RG^Aを生成するため、場として$\psi=(b_R,f_R,b_A^\dagger,f_A^\dagger)^T$, $\bar{\psi}=(b_R^\dagger,f_R^\dagger,-b_A,f_A)^T$ を導入すると、微視的作用は次式の形になる(Λ_3はRA空間で$\Lambda_3=\mathrm{diag}(1,-1)$)。

$$iS=i\int\bar{\psi}(\mathbf{r})\left(\frac{i\omega^+}{2}\Lambda_3-H\otimes I\right)\psi(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}\,;\quad H=\mathbf{v}\cdot(-i\nabla)+V(\mathbf{r}) \tag{2}$$

有限系では対称性の破れは起きない。$F_{0\mathrm{D}}[Q]$を得る最も簡便な方法は、$\omega\to 0$での対称性$\psi\to T\psi$, $\bar{\psi}\to\bar{\psi}T^{-1}$を外場$\omega$の方向$\Lambda_3$が破っているため、それを陽に回復させることである。

$$iS[T]=i\int\bar{\psi}(\mathbf{r})\left(\frac{i\omega^+}{2}T\Lambda_3T^{-1}-H\otimes I\right)\psi(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} \tag{3}$$

言い換えれば、ωは「スピン」$\bar{\psi}\Lambda_3\psi$とのZeeman couplingであり、Tによる対称性の回復は、通常のスピンにおいて$|j,m\rangle$ $(m=-j,\ldots,j)$の状態和をとることに対応している。この$S[T]$をωについて展開すれば(初項として)$F_{0\mathrm{D}}[Q]$が得られる。

量子ダイナミクスとアンサンブル平均の役割

以上は0次元近似の正当性を仮定した議論であるが、その正当化には、無視していた空間依存性(=ダイナミクス)の影響を評価しなくてはならない。つまり各点$\mathbf{r}$における回転$T(\mathbf{r})$を考える必要がある。このような空間依存性を考慮すると、有効場理論はexactなGreen関数によって定義された(空間依存した)輸送係数をもつ非局所模型となること示す事ができる。無次元コンダクタンス$g\gg 1$の場合には、slow modeとfast modeを分離する事ができ、有効理論として、従来の拡散的シグマ模型$F[Q]$が再現される。また、半古典近似をとれば、弾道的シグマ模型[4]が自然に得られる。つまり、種々のアンサンブル平均の操作は、系のダイナミクスを粗視化するための有用な近似法の一種である、とみなす事ができる。

参考文献

[1] O. Bohigas, M. J. Giannoni and C. Schmit, Phys. Rev. Lett. **52** (1984), 1.

[2] K. B. Efetov, Adv. Phys. **32** (1983) 53.

[3] A. Altland *et al.* in *Supersymmetry and Trace Formulae*, eds. I. V. Lerner *et al.* NATO ASI Series B **370** (1999, Kluwer Academic); M. R. Zirnbauer, *ibid.*

[4] A. V. Andreev *et al.*, Phys. Rev. Lett. **76** (1996), 3947.