Euler-Poincaré 形式による渦のトポロジーと力学

福本 康秀 (Yasuhide Fukumoto)
(九州大学 大学院数理学研究院/宙空環境研究センター)*

1 はじめに

流れが織りなす渦巻き模様の芯の部分には流体が激しく自転運動する領域があり，この領域をさして**渦**という．領域内の点 $\boldsymbol{x}$, 時刻 t における流体の速度を $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$ としよう．流体要素の自転は，大きさが自転角速度の 2 倍で自転軸方向を向く**渦度** (***vorticity***) とよばれるベクトル $\omega = \nabla \times \boldsymbol{u}$ によって特徴づけられる．粘性 (= 内部摩擦) が無視できる状況では，流体粒子によってつくられる曲面を貫く渦度の総量は時間的に一定不変である．このことは,「流体粒子によってつくられる閉曲線に沿う流速の線積分 (= 循環) が時間的に一定不変である」という **Kelvin の循環定理** としてよく知られている．渦度が集中した管状領域を渦管という．Kelvin の循環定理より,「渦管は流体とともに動きかつ強さ (= 循環) は一定不変である」ことが帰結する．

60 年代に入って，非粘性流体の運動の積分として**ヘリシティ**が発見された．速度と渦度の内積の全領域 $\mathcal{D}$ での体積積分 $\int_{\mathcal{D}} \boldsymbol{u} \cdot \nabla \times \boldsymbol{u}\, dV$ で与えられる量である．断面積無限小の渦管 (= **渦糸**) の集まり以外には渦度をもたない状況では，渦糸の結び目や絡み目が解けないことを暗示する [1]．すなわち，渦糸もっと一般に渦線のトポロジーは保たれる．渦線とは，接線の方向が渦度ベクトルの方向と一致する曲線のことである．しかし，この事実は，それより遥か以前の 19 世紀後半に，Kelvin や Tait のよく知るところであった．Kelvin は元素の違いを (エーテルの) 渦糸の結び目の違いで表そうとする試みに熱中した．19 世紀半ば頃から原子の実在が徐々に確信されるようになり，モデル建設への機運が高まっていった．が，量子力学誕生以前の当時に知られていた不変的なものとしては，渦糸の循環や結び目・絡み目ぐらいしかなかった．Kelvin の渦原子理論そして Maxwell にも刺激されて，Tait は比較的完全な結び目・絡み目型のリストまで作ってしまった [2]．

では，だれが最初に渦線のトポロジーが保たれることに気づいたのだろうか？　起源をたどると，渦運動をターゲットにした恐らく史上最初の論文 [3] にまでさかのぼる．Helmholtz が示した「渦線は流体に**凍りついている** (***frozen into the fluid***)」という事

*〒 812-8581 福岡市東区箱崎 6-10-1　e-mail: yasuhide@math.kyushu-u.ac.jp

実から，Tait と Kelvin がそのことを嗅ぎとって，大いなる興奮を覚えたに違いない．この話を Helmholtz のアイデアから始めようと思う．

循環とヘリシティは，他の保存量，エネルギー，運動量 (インパルス) や角運動量 (インパルスのモーメント) とは質を異にする．非粘性の流体の速度場は Euler 方程式にしたがう．これは Newton の運動法則から導かれるもので，運動量保存則の微分形といってもよい．循環とヘリシティの保存のためには，速度場が必ずしも Euler 方程式にしたがう必要はない．任意の流体運動でよいのである．ただし若干の説明を要する．速度場と渦度場を切り離して，渦度場は速度場の回転とは別物であるとして扱うのである．渦度場が凍結場であることをあらわす方程式から出発すると，渦度場のベクトル・ポテンシャルに対する **Euler-Poincaré 方程式**とよばれる偏微分方程式にたどり着く．これは Euler 方程式の拡張で，循環とヘリシティの保存を保証する最も一般的な枠組みを提供する．ここでのヘリシティとは，渦度とそのベクトル・ポテンシャルの内積の積分のことである．ヘリシティの発見は時代的には後になるが，本稿では循環とヘリシティをエネルギーや運動量・角運動量より上位におくことを試みる．

§2 では，循環とヘリシティの保存を中心に据えて，Helmholtz の法則から Euler-Poincaré 方程式にいたる道筋やそこから帰結される事柄について述べる (第 1 回目)．§3 では，Euler-Poincaré 方程式を産み出す変分原理を紹介する (第 2 回目)．第 3 回 (§4) では流れの安定性への応用の試みについて触れる．変分原理から出発すると，循環やヘリシティの保存が自動的に保証されるという利点があるし，何より操作性に優れている．

目次

2 渦のキネマティックス

「キネマティックス (kinematics)」は運動学と訳されるが，速度場 $\boldsymbol{u}$ が Newton の運動法則に必ずしもしたがっていない場合でも成り立つような側面をさしていう．これに対比させて用いられる用語は「ダイナミックス」である[1].

2.1 Helmholtz の法則

質量保存則も速度場の具体形によらずに成立するので，キネマティックスの範疇に属する．表記法の導入も兼ねて，渦度場に対する Helmholtz の法則の説明の前に，密度場に対する連続の式の導出をスケッチしよう．

流体によって満たされている領域 $\mathcal{D}$ とし，その境界 $\partial\mathcal{D}$ は滑らかであると仮定する．時刻 $t=0$ において点 $\boldsymbol{X}$ から出発する流体粒子の軌道を $\boldsymbol{x}(t)=\varphi_t(\boldsymbol{X})$，あるいは計算の便宜上 $\boldsymbol{x}(t)=\varphi(\boldsymbol{X},t)$ とかこう．ながれ $\varphi_t:\mathcal{D}\to\mathcal{D}$ は微分同相写像であると仮定する．流体粒子の定義と，軌道速度-流速場 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$ の関係

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(\boldsymbol{X},t) = \boldsymbol{u}(\varphi(\boldsymbol{X},t),t) \tag{2.1}$$

とは密接不可分である．境界 $\partial\mathcal{D}$ 上の流体粒子はつねに境界上を運動するという境界条件

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})=0 \quad \text{for} \quad \boldsymbol{x}\in\partial\mathcal{D} \tag{2.2}$$

が要求される．ここで，$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$ は境界での外向き単位法線ベクトルである．

時刻 $t=0$ において領域 $V_0\in\mathcal{D}$ を占めていた流体粒子たちが，時刻 t において領域 V_t まで運ばれたとしよう．同じ流体粒子たちによって構成されるので，V_0 と V_t を占める流体の質量は変わらないはずである．流体の密度場を $\rho(\boldsymbol{x},t)(>0)$ とかくと，この質量保存則は

$$\int_{V_t}\rho(\boldsymbol{x},t)\,dV=\int_{V_0}\rho(\boldsymbol{X},0)\,dV_X \tag{2.3}$$

と表される．右辺では，とくに $\boldsymbol{X}$ (***Lagrange* ラベル**) による積分であることを強調するために，積分記号を dV_X とかいた[2]．左辺において変数変換を行い，(2.3) が任意の領域 V_0 について成り立つことに注意すると，

$$\rho(\varphi(\boldsymbol{X},t),t)J(\boldsymbol{X},t)=\rho(\boldsymbol{X},0) \tag{2.4}$$

が得られる．ここで，$J(\boldsymbol{X},t):=\partial(x,y,z)/\partial(X,Y,Z)$ は変換 $\boldsymbol{x}=\varphi(\boldsymbol{X},t)$ のヤコビー行列式である．よく知られた恒等式

$$\frac{\partial}{\partial t}J(\boldsymbol{X},t)=J(\boldsymbol{X},t)\,\nabla\cdot\boldsymbol{u} \tag{2.5}$$

[1]「ダイナミックス」にはもともと「力」という意味合いがあった．

[2]流体粒子個々の運動を調べる方法を **Lagrange 的記述**という．各流体粒子は $t=0$ における位置 $\boldsymbol{X}$ で識別できるので，これを Lagrange ラベルとよぶ (§3.1 参照)．

を用いると，(2.4) から連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{u}) = 0 \tag{2.6}$$

が導ける．Lagrange 微分 $D/Dt := \partial/\partial t|_{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla$ を用いると，(2.6) は

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0 \tag{2.7}$$

ともかける．一連の導出手続きについては文献 [4] を参照されたい．

Newton の運動法則すなわち運動量保存則から，速度場 $\boldsymbol{u}$ に対する Navier-Stokes 方程式が導かれる．以下ではつねに次を仮定する．

仮定 1　流体は • 非粘性で • バロトロピー的である． • 外力は保存力である．

バロトロピー的とは，密度 ρ が圧力 p だけに依存するということで，$P := \int dp/\rho(p)$ とおくと，単位質量当たりの流体が受ける圧力勾配による力は $-(\nabla p)/\rho = -\nabla P$ というポテンシャル形に還元される．このとき，Navier-Stokes 方程式は次の形の Euler 方程式に帰着する：

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\, \boldsymbol{u} = -\nabla\,(P + \Phi)\ . \tag{2.8}$$

ここで，$\Phi = \Phi(\boldsymbol{x}, t)$ は単位質量当たりの流体に働く外力 (体積力) のポテンシャル関数である．

渦度場 $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x}, t)$ を $\boldsymbol{\omega} := \nabla \times \boldsymbol{u}$ とおく．定義より，

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0 \tag{2.9}$$

である．一般に発散 (divergence) $\mathrm{div} = \nabla \cdot$ のないベクトル場を**ソレノイダル・ベクトル場**という．方程式 (2.8) に回転 $\mathrm{rot} = \nabla \times$ を作用させると，$\boldsymbol{\omega}$ の発展方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nabla \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{\omega}) \tag{2.10}$$

が得られ，さらに連続の式 (2.6) と組み合わせることで，

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\right) = \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \nabla\right) \boldsymbol{u} \tag{2.11}$$

の形に導かれる．方程式 (2.10) または (2.11) を**渦度方程式**とよぶ．

さて，流体粒子からなる無限小線要素は $d\boldsymbol{x}$ と同一視できるだろう．すなわち，

$$d\boldsymbol{x} = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial X_A} dX_A = \left(d\boldsymbol{X} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{X}}\right) \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X}, t) \tag{2.12}$$

と表される．大文字の添字 A は Lagrange ラベル $\boldsymbol{X}$ に対して用いる．また，同一項に同じ添字 A が 2 度あらわれるときには，A について 1 から 3 まで和をとるものと約束す

る．この式を t について微分し，右辺において変数変換 $\boldsymbol{X} \to \boldsymbol{x}$ を行い，$\partial/\partial|_{\boldsymbol{X}} = D/Dt$ であることに注意すると，

$$\frac{D}{Dt} d\boldsymbol{x}(t) = (d\boldsymbol{x}(t) \cdot \nabla)\, \boldsymbol{u} \tag{2.13}$$

を得る．

Helmholtz [3] は (2.11) と (2.13) が酷似していることに着目した．式 (2.13) を定数倍 (定数を c とする) したものを (2.11) から引けば，

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} - c\, d\boldsymbol{x}\right) = \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} - c\, d\boldsymbol{x}\right) \cdot \nabla \boldsymbol{u} \tag{2.14}$$

となることからわかるように， 初期 $t = 0$ において $\boldsymbol{\omega}/\rho = c d\boldsymbol{x}$ であるすると，この関係はいつまでも保たれる．方向が渦度ベクトルの方向と一致する曲線を**渦線**という．渦線の各切片が流体線要素のように振舞うことがわかった．

Helmholtz の定理　粘性のないバロトロピー流体において，体積力が保存力であるならば，各渦線はつねに同じ流体粒子群から構成され，流体とともに運動する．すなわち渦線は流れに**凍結している** (***frozen into the fluid***).

非粘性のときに限って，異なる時刻の渦線たちを対応づけることが許され，渦線の運動を論ずることが可能になる点に留意しておく必要がある．また，Helmholtz は，流体線要素の発展とのアナロジーから,「渦線が伸ばされると，渦度 (正確には ω/ρ) が強くなる」ことも指摘している．この対応を利用すれば，(2.11) の積分が

$$\frac{\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X},t),t)}{\rho(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X},t),t)} = \left(\frac{\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{X},0)}{\rho(\boldsymbol{X},0)} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{X}}\right) \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X},t) \tag{2.15}$$

となることも (2.12) より直ちにわかる．これを ***Cauchy* 積分**という．

見方を換えると，Helmholtz の定理は，(2.11) において $\boldsymbol{\omega}$ と $\boldsymbol{u}$ が無関係であるとしても，任意のベクトル場 $\boldsymbol{u}$ に対して成立する．ただし，渦度 $\boldsymbol{\omega}$ は ソレノイダル・ベクトル場 (2.9) であるとする．この場合でも，(2.11) の積分は (2.15) である．定義 (2.1) から，$\boldsymbol{\varphi}_t$ は $\boldsymbol{u}$ によって生成される微分同相写像である．さらに，質量保存則 (2.4) もながれ写像 φ_t の詳細によらずに成立する．ここで，あらためて，凍結場を定義しておこう．

定義　$\mathcal{D}$ 上で定義されたスカラー場 $\rho(\boldsymbol{x},t)$ とソレノイダルなベクトル場 $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x},t)$ が，$\mathcal{D}$ の任意の自己微分同相写像 φ_t に対して，(2.4) と (2.15) をみたすとき，これらを**凍結場** (***frozen-in field***) とよぶ．

式 (2.4) と (2.15) のいずれにおいても，写像 $\varphi_t = \varphi(\ ,t)$ の時間 t 依存性は落としてもよいことに気づかれたい．

自己微分同相写像 $\varphi_t : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ は，$\mathcal{D}$ に含まれる流体粒子たちの並べ替え行っていると解釈できる．その際，方向 (右手系) を保つ．渦線は流体粒子からなる曲線と同一の振

る舞いをするので，$t=0$ での渦線 $C(0)$ は，時刻 t において，$C(t)=\varphi_t(C(0))$ にうつる．渦線自身の上にも渦度ベクトルの方向を正とする自然な向きが入り，φ_t はこの向きも保つ．これは結び目の同型についての定義

定義 結び目 K を他の結び目 K' に移すような $\mathbb{R}^3$ の自己同相写像 h があるとき，K は K' に**同値**であるという．さらに，h および制限 $h|K: K \to K'$ が向きを保存しているならば，それらは**同型**であるといい，$K \cong K'$ と表される．

および絡み目の同型に対する定義とほぼ同じ内容である (例えば，文献 [5, 6] 参照)．互いに同型な絡み目 (結び目) は同じ**絡み目型 (結び目型)** に属するという．Helmholtz の法則はとりもなおさず，

系 渦線の絡み目型・結び目型は時間的に不変である[3]．

ことを意味しているのである．

渦線のトポロジーが保たれるという著しい性質は渦度場が凍結場であるという性質のみに由来するのであって，本来の定義 $\boldsymbol{\omega}=\nabla\times\boldsymbol{u}$ およびそこから導かれる $\boldsymbol{u}$ に対する Euler 方程式とは無縁である．流体力学においては，渦が流れに及ぼす影響の解明は重要課題の一つであるが，本稿ではこれを棚上げにして，もっぱら，流れに受動的に翻弄されるだけの凍結場としての渦度場がもつ性質を追求していこう．

2.2 Kelvin の循環定理

流れ φ_t によって変形を受ける無限小流体要素の体積 $dV(t)$ の時間変化率 $DdV/Dt=(\nabla\cdot\boldsymbol{u})dV$ と (2.13) とを組み合わせると，無限小流体面要素の面積ベクトル $d\boldsymbol{S}=\boldsymbol{n}dA$ の時間変化率が

$$\frac{D}{Dt}dS_i=(\nabla\cdot\boldsymbol{u})dS_i-dS_j\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \tag{2.16}$$

と導ける [7]．ここで, $\boldsymbol{n}$ は勝手に選んだ単位法線ベクトルである．これを用いると，流体粒子からなる任意の向きづけられた曲面 $S(t)$ に対して，

$$\frac{d}{dt}\int_{S(t)}\boldsymbol{\omega}\cdot d\boldsymbol{S}=\int_{S(t)}\left[\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t}-\nabla\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{\omega})\right]\cdot d\boldsymbol{S} \tag{2.17}$$

となって，(2.10) より直ちに次の定理が示せる．

定理 流体粒子からなる任意の向きづけられた曲面 $S(t)$ を貫く渦度の総量は一定不変である．

$$\int_{S(t)}\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x},t)\cdot d\boldsymbol{S}=\int_{S(0)}\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{X},0)\cdot d\boldsymbol{S}_X\,. \tag{2.18}$$

ここで，$S(t)=\varphi_t(S(0))$ をみたす．

[3]現在の時刻を t として，写像の族 $\{\varphi_\tau|\tau\in[0,t],\ \varphi_0=\mathrm{id}\}$ は $\mathcal{D}$ 内での**同位変形** (*ambient isotopy*) を与える．このとき，$C(t)$ は $C(0)$ に**全同位である** (*ambient isotopic*) という．

この定理は Cauchy 積分と等価である．式 (2.18) は (2.15) の積分形に他ならない[4]．

ここで領域 $\mathcal{D}$ が単連結であるとしよう．渦度場に対して，境界条件

$$\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{n}=0 \quad \text{on } \partial\mathcal{D} \tag{2.19}$$

を課すと，滑らかなソレノイダル・ベクトル場 $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x},t)$ に対するベクトル・ポテンシャル $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$ が領域 $\mathcal{D}$ 全体で定義できる．

$$\boldsymbol{\omega}=\nabla\times\boldsymbol{v}\,. \tag{2.20}$$

しかし，これは一意的には決められない．

$$\boldsymbol{v}'(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)+\nabla\Lambda(\boldsymbol{x},t)\,. \tag{2.21}$$

も同じ渦度場を与える．ゲージ変換である．流体粒子からなる閉曲線 $C(t)$ に沿ってのベクトル・ポテンシャル $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$ の**循環** $\Gamma(C(t))$ を次式によって定義する．

$$\Gamma(C(t)):=\oint_{C(t)}\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{x}\,. \tag{2.22}$$

閉曲線 $C(t)$ を流体粒子からなる曲面 $S(t)$ の縁 $(S(t)=\partial C(t))$ にとって，(2.18) に対して Stokes の定理を適用すると，

Kelvin の循環定理　流体粒子からなる任意の閉曲線 $C(t)$ に沿う循環 $\Gamma(C(t))$ は一定不変である．

$$\oint_{C(t)}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)\cdot d\boldsymbol{x}=\oint_{C(0)}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{X},0)\cdot d\boldsymbol{X}\,. \tag{2.23}$$

ここで，積分経路は $C(t)=\boldsymbol{\varphi}_t(C(0))$ をみたす．

を得る．この形の循環定理は，任意の微分同相写像 $\boldsymbol{\varphi}_t$ に対して成立することに気づかれたい．当然，$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$，したがって $\boldsymbol{v}$ が Euler 方程式 (2.8) にしたがう場合も含むが，もっと一般的な状況を考えている．

では，拡張されたダイナミックスとはどんなものであろうか？ベクトル・ポテンシャル $\boldsymbol{v}$ の発展方程式を導いてみよう．変数変換 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X},t)$ を施すと，(2.23) の左辺は

$$\oint_{C(0)}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X},t),t)\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial X_A}\,dX_A \tag{2.24}$$

となり，(2.23) が任意の閉曲線 $C(0)$ に対して成り立つことから，$\mathcal{D}$ 上のある関数 $\chi=\chi(\boldsymbol{X},t)$ が存在して，

$$v_i(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X},t),t)\frac{\partial\varphi_i(\boldsymbol{X},t)}{\partial X_A}=v_A(\boldsymbol{X},0)+\frac{\partial\chi(\boldsymbol{X},t)}{\partial X_A} \tag{2.25}$$

[4]渦度 2 次形式 (2.35) を用いると，(2.18) はコンパクトに $\varphi_t^*(\omega)=\omega$ とかける (式 (2.36))．これを座標を用いて書き下し，(2.4) を利用して簡単化すると (2.15) に到達する．

という関係が成り立つ．これは **Cauchy 積分 (2.15) のベクトル・ポテンシャル版**とみなすことができる．関数 χ の存在は，$\boldsymbol{v}$ がゲージ変換の自由度をもつことと符号する．変数 $(\boldsymbol{X},t)$ を互いに独立とみて (2.25) を t について偏微分する．速度場の定義 (2.1) を代入して，さらに変数変換 $\boldsymbol{X}=\varphi_t^{-1}(\boldsymbol{x})$ を施すと，$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$ の発展方程式

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\,v_i+v_j\frac{\partial u_j}{\partial x_i}=\frac{\partial\phi}{\partial x_i} \tag{2.26}$$

が得られる．ここで $\phi:=\partial\chi/\partial t$ である．渦度場が凍結場であるという属性だけから導かれるという点で，(2.26) はベクトル・ポテンシャルの時間発展を記述する最も一般的な方程式といえる．Holm らにしたがって，(2.26) を **Euler-Poincaré 方程式**とよぼう [8]．とくに $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}$ とおくと，(2.26) は Euler 方程式 (2.8) に帰着する．ただし，$\phi=-(P+\Omega)+\boldsymbol{u}^2/2$ である．

実は (2.26) は，電磁流体力学 (MHD) における磁場のベクトル・ポテンシャルに対する方程式と同じものである．式 (2.26) を

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}=\boldsymbol{u}\times(\nabla\times\boldsymbol{v})+\nabla\,(\phi-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}) \tag{2.27}$$

とかきあらためた形は MHD でよくお目にかかる．

2.3 ヘリシティ

速度場と渦度場の内積の空間積分として定義されるヘリシティが Euler 方程式のもとで一定不変であることはよく知られている (例えば，[1] を参照)．本小節では，「ヘリシティが任意の微分同相写像のもとで不変である」ことを証明しよう．そのためには，定義を拡張する必要がある[5]．

定義

$$\mathcal{H}[\boldsymbol{\omega}]:=\iiint_{\mathcal{D}}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\omega}\,dV \tag{2.28}$$

を凍結場 $\boldsymbol{\omega}$ のヘリシティ (*helicity*) という．

形は 3 次元球面 S^3 の ***Hopf* 不変量** (Whitehead の積分) と同じである [10, 11]．

まず，ヘリシティが渦度場だけで決まるのであってベクトル・ポテンシャル $\boldsymbol{v}$ の選び方によらないことを確認しよう．ゲージ変換された (2.21) の方をとり，(2.9) を利用すると，

$$\iiint_{\mathcal{D}}\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{\omega}\,dV=\iiint_{\mathcal{D}}[\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\omega}+\nabla\cdot(\boldsymbol{\omega}\Lambda)]\,dV \tag{2.29}$$

となる．Gauss の定理を用いて第 2 項を表面積分に直すと，境界条件 (2.19) より落ちるので，ゲージ関数 Λ からの寄与はない．

[5]発見は，流体の渦度に対するものより，MHD における磁場に対するものの方が先行する [9]．

つぎにヘリシティが位相不変量であることを積分形のままで示してみよう．記述を軽くするために，$\rho_0 := \rho(\boldsymbol{X}, 0)$, $\rho_t := \rho(\boldsymbol{x}, t)$, $\boldsymbol{\omega}_0 := \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{X}, 0)$, $\boldsymbol{\omega}_t := \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x}, t)$ と略記しよう．すると，Cauchy 積分 (2.15) の第 i 成分は

$$\frac{\omega_{ti}}{\rho_t} = \frac{\omega_{0A}}{\rho_0}\frac{\partial x_i}{\partial X_A} \tag{2.30}$$

とかける．そのベクトル・ポテンシャル版 (2.25) の両辺に $\partial\varphi_A^{-1}/\partial x_j = \partial X_A/\partial x_j$ をかけると (添字をつけなおした後),

$$v_{ti} = v_{0B}\frac{\partial X_B}{\partial x_i} + \frac{\partial \chi}{\partial x_i} \tag{2.31}$$

となる．この 2 つの式を辺々かけて i について和をとると，$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{\omega}$ との内積の時間発展が

$$\boldsymbol{v}_t \cdot \boldsymbol{\omega}_t \frac{\rho_0}{\rho_t} = \boldsymbol{v}_0 \cdot \boldsymbol{\omega}_0 + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{X}} \cdot (\chi \boldsymbol{\omega}_0) \tag{2.32}$$

と書き下せてしまう．最後の項では (2.9) を使った．領域 $\mathcal{D}$ 全体にわたる $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\omega}$ の積分において，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X}, t)$ によって変数を $\boldsymbol{X}$ に変え，(2.32) と (2.4) を利用すると，(2.28) は次のように変形される．

$$\begin{aligned}\iiint_{\mathcal{D}} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x},t)\,dV &= \iiint_{\mathcal{D}} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X},t),t)\cdot\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X},t),t)J(\boldsymbol{X},t)\,dXdYdZ \\ &= \iiint_{\mathcal{D}} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{X},0)\cdot\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{X},0)dV_X + \iint_{\partial\mathcal{D}} \chi\,\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{X},0)\cdot d\boldsymbol{S}_X\,. \end{aligned} \tag{2.33}$$

ここで，$\boldsymbol{\varphi}_t(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$ を用いた．境界条件 (2.19) に留意すれば，目的の結果にたどり着く．

定理　ヘリシティは $\mathcal{D}$ の任意の自己微分同相写像 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X}, t)$ のもとで不変である．

$$\mathcal{H}[\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x}, t)] = \mathcal{H}[\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{X}, 0)]\,. \tag{2.34}$$

この定理および Kelvin の循環定理は純粋にトポロジー的である；証明には，$\boldsymbol{\omega}$ や $\boldsymbol{v}$ の時間 t 依存性，したがってこれらを支配する微分方程式は不要である．渦管たちのトポロジーに関して，管同士の絡み目・結び目のみならず，管を構成する内部の渦線たちの絡み具合も含めたすべてではないが豊富な情報をヘリシティから引き出すことができる [12]．

渦のキネマティックスは微分形式と Lie 微分によって簡潔に表現され，ゆえにそのからくりを垣間見ることができる [11, 13]．体積 3 次形式を $\mu := dx \wedge dy \wedge dz$ として，質量 3 次形式 $\rho_t \mu$ および渦度 2 次形式 $\omega := i_{\boldsymbol{\omega}_t}\mu$ を導入する．記号 $i_{\boldsymbol{\omega}_t}$ は内部積で，成分でかくと，

$$\omega := \omega_3(\boldsymbol{x},t)dx\wedge dy + \omega_1(\boldsymbol{x},t)dy\wedge dz + \omega_2(\boldsymbol{x},t)dz\wedge dx = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\omega_k(\boldsymbol{x},t)dx_i\wedge dx_j \tag{2.35}$$

となる．ここで，ϵ_{ijk} は完全反対称テンソルである: $\{ijk\}$ が $\{123\}$ の偶置換なら 1, 奇置換なら -1, それ以外では 0. すると，質量保存則 (2.4) および Cauchy 積分 (2.15) は，微分同相写像 $\varphi_t : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ による引き戻し (= 変数変換) φ_t^* を用いて，

$$\varphi_t^*(\rho\mu) = \rho\mu\,, \quad \varphi_t^*(\omega) = \omega \tag{2.36}$$

とあらわせる[6]．写像 $\boldsymbol{\varphi}_t$ を単に φ_t とかいた．これらの Lie 微分

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_{\boldsymbol{u}}\right)\rho\mu\ = 0\,, \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_{\boldsymbol{u}}\right)\omega = 0 \tag{2.37}$$

のうち，前者は連続の式 (2.6) を与え，後者は，(2.6) と組み合わせることで渦度方程式 (2.11) となり，Helmholtz の定理に導かれる．1 次微分形式 (*form potential*) $\alpha = v_i(\boldsymbol{x}, t)dx_i$ を $d\alpha = \omega$ となるように導入すると，後者の積分

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_{\boldsymbol{u}}\right)\alpha = d\phi \tag{2.38}$$

に相当するものが得られる．これが Euler-Poincaré 方程式 (2.26) であり，Kelvin の循環定理につながる．Lie 微分 (2.37) の後者と (2.38) の 2 つを合体させた

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_{\boldsymbol{u}}\right)\alpha \wedge d\alpha = d(\phi\, d\alpha) \tag{2.39}$$

がヘリシティ $\int_{\mathcal{D}} \alpha \wedge d\alpha$ の保存を導く．あるいは，(2.36) の後者の積分

$$\varphi_t^*(\alpha) = \alpha + d\chi \tag{2.40}$$

ともとの式との外積をとって，

$$\varphi_t^*(\alpha \wedge d\alpha) = \alpha \wedge d\alpha + d(\chi \wedge d\alpha) \tag{2.41}$$

とやった方が直接的である．式 (2.40) が (2.25) に，(2.41) が (2.32) に対応する．

Euler-Poincaré 方程式 (2.26) という拡張されたダイナミックスよりも，そこにおいて $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{u}$ と特化した Euler 方程式 (2.8) の方がはるかに複雑である．渦度 $\boldsymbol{\omega}$ の速度 $\boldsymbol{u}$ への跳ね返りという要素が加わり，その速度が新たな渦度の運動を引き起こすという具合に，非線形の度合いが格段に増大する[7].

粘性散逸は流体運動をもっと複雑なものにする．短い時間スケールでの渦管のつなぎ換えを引き起こし，渦のトポロジーは刻々変化していく．ヘリシティはもはや保存量ではない．詳しい記述は文献 [14] にある．

[6]このとき，$\rho\mu$ および ω は流れ場 $\boldsymbol{u}$ によって **Lie 輸送される** (***Lie transported***) という．
[7]非線形項が定量的に大きくなるということを必ずしも意味しない．

3 変分原理

Newton の運動法則の一つの表現である Euler 方程式は変分原理から導き出すことができるが，Euler-Poincaré 方程式 (2.26) に対する変分原理も無理なく構成できる．

流体運動はあらゆるスケールの階層が複雑に絡み合う巨大な力学系をなす．そこで，現実の流れに対処するためには，計算可能なレベルまで方程式を簡単化しなければならない．大胆な簡単化はモデル化ともよばれる．系統的な簡単化を行うための漸近展開法がいろいろと編み出されてきた．概して，ベクトル場である微分方程式よりもスカラー場である作用汎関数を操作する方が効率的で，高次まで正確に行える．例えば，Hamilton 力学系における平均化法 (method of averaging) の活躍を思い浮かべられたい．Holm らは乱流モデルの構築にこのアイデアを積極的に活用しようとしている．

以下では基盤となる変分原理を紹介する．記述は文献 [8] と [15] に負う．

3.1 Hamilton の最小作用の原理

このはじめの小節では，**仮定 1** (§2.1) に加えて，

仮定 2 流体は • 非圧縮

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0 \tag{3.1}$$

で，かつ • 密度は一様である．

を要請する．簡単のため，密度を $\rho \equiv 1$ とおく．

領域 $\mathcal{D}$ の自己微分同相写像 $\varphi_t(\boldsymbol{X}) = \varphi(\boldsymbol{X}, t)$ と関数 $\tilde{p}(\boldsymbol{X}, t)$ の汎関数として，ラグランジアン L および作用汎関数 S を

$$L[\varphi_t, \tilde{p}] \ := \ \int_{\mathcal{D}} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - \Phi(\varphi, t) + \tilde{p}(J-1) \right\} dV_X\,, \tag{3.2}$$

$$S[\varphi_t, \tilde{p}] \ := \ \int_{t_0}^{t_1} L[\varphi_t, \tilde{p}]\, dt \tag{3.3}$$

ととれる．ここで，$\Phi(\boldsymbol{x}, t)$ は単位質量あたりの流体に働く体積力のポテンシャルである．$J = J(\boldsymbol{X}, t)$ は変換 $\boldsymbol{x} = \varphi_t(\boldsymbol{X})$ のヤコビー行列式で (§2.1)，(3.2) の最後の項は非圧縮という要請をみたすように導入された．関数 $\tilde{p}(\boldsymbol{X}, t)$ は Lagrange の未定‘乗数’の働きをするのだが，最終的には圧力に化ける．ここで，Lagrange ラベル $\boldsymbol{X}$ を固定しての流体粒子の軌跡 $\boldsymbol{x}(t) = \varphi(\boldsymbol{X}, t)$ の変分 $\delta\varphi$ に対して，境界条件

$$\begin{aligned} &\delta\varphi(\boldsymbol{X}, t_0) = \delta\varphi(\boldsymbol{X}, t_1) = \boldsymbol{0} \quad \text{for} \ \ \boldsymbol{X} \in \mathcal{D}, \\ &\delta\varphi(\boldsymbol{X}, t) \cdot \boldsymbol{n} = 0 \quad \text{on} \ \ \partial\mathcal{D} \quad \text{for all } t \in (t_0, t_1) \end{aligned} \tag{3.4}$$

を課す．この条件をみたす $\delta\varphi$ と $\delta\tilde{p}$ に対して作用 S が極値をとることを要請すると，φ に関する Euler-Lagrange 方程式と $J \equiv 1$ が導かれる．前者が Euler 方程式 (2.8) となる．圧力は $p(\boldsymbol{x},t) = \tilde{p} \circ \varphi_t^{-1}(\boldsymbol{x})$ によって与えられる．ここに至るまでには若干の計算を要するが，詳細は割愛する．

Newton の運動法則に忠実な流体運動の記述の仕方は，個々の流体粒子の運動を追いかけるという **Lagrange 的記述**である．上の変分原理は個々の流体粒子 ($\boldsymbol{X}$ がそのラベル) の軌跡の変分を考えているという点で，古典力学における質点系に対する Hamilton の最小作用の原理に忠実である．

しかし我々が風を感じ流れをみる際，個々の流体粒子の運動をいちいち識別したりはしないしできない．知りたいのはある時刻 t の空間のある点 $\boldsymbol{x}$ での速度 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$ であったり，圧力 $p(\boldsymbol{x},t)$ であったりする．これを **Euler 的記述**という．屋外での観測や室内実験での測定でまず得やすいデータはこちらの方であろう．力学という観点からは Lagrange 的記述が本質的であるが，人間による流体運動の認識の仕方としては，Lagrange 的記述は Euler 的記述に比べてかなり冗長である．以下では，変分原理においても，より Euler 的な見方に移行してみよう．もちろん，Lagrange 的記述が縁の下でどっかりとすわっているのだが．

領域 $\mathcal{D}$ の微分同相写像 $\boldsymbol{x} = \varphi_t(\boldsymbol{X})$ の逆写像を $\boldsymbol{l}_t := \varphi_t^{-1} : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$，あるいは計算の便宜上 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{l}(\boldsymbol{x},t)$ とかこう．これは，流体粒子の時刻 t における位置 $\boldsymbol{x}$ から時刻 $t=0$ の位置 $\boldsymbol{X}$ への写像なので，$\boldsymbol{l}(\boldsymbol{x},t)$ を **Lagrange ラベル関数**とよぶ．第 Ai 成分を $\partial l_A(\boldsymbol{x},t)/\partial x_i$ とする 3×3 行列を $\hat{D}$ とかこう．その行列式 $D := \det \hat{D}$ は，$D = 1/J$ をみたす．式 (2.5) の左辺が Lagrange 微分 $\partial/\partial t|_{\boldsymbol{X}} = D/Dt$ であることに注意すると，(2.5) は

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \nabla\cdot(D\boldsymbol{u}) = 0 \tag{3.5}$$

と等価になるので，D を密度とみたてることができる[8]．流体体積要素の変数変換 $dV_X = DdV$ からも理解されよう．速度場の定義 (2.1) および $\varphi_t(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$ に注意して，作用 (3.3) の積分変数を $\boldsymbol{x}$ に置換えると，

$$S[\boldsymbol{l}_t, p] = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{\mathcal{D}} \left\{\mathcal{L}(\boldsymbol{u}, D) + p(1-D)\right\} dV \tag{3.6}$$

となる．ここで，$p(\boldsymbol{x},t) := \tilde{p}\circ\varphi_t^{-1}(\boldsymbol{x})$ で，ラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ は

$$\mathcal{L} = D\left(\frac{\boldsymbol{u}^2}{2} - \Phi\right) \tag{3.7}$$

で与えられる．

速度場 $\boldsymbol{u}$ は流体運動の配位空間の元ではないので，$\boldsymbol{u}$ の変分 $\delta\boldsymbol{u}$ を独立にとることは許されない．まずは，$\delta\boldsymbol{u}$ を $\delta\boldsymbol{l}$ に関係づけることから始めなければならない．定義

[8] Lagrange 微分 D/Dt の D と $D = 1/J$ とを混同しないように．

$\boldsymbol{l}(\varphi(\boldsymbol{X},t),t)=\boldsymbol{X}$ を t について偏微分すると，

$$\frac{\partial l_A}{\partial t}+\frac{\partial l_A}{\partial x_j}\frac{\partial \varphi_j}{\partial t}=0 \tag{3.8}$$

となる．最後の項に (2.1) を代入し，両辺に $\partial x_i/\partial l_A=\partial\varphi_i/\partial X_A$ をかけて A について 1 から 3 まで和をとると，

$$u_i=-(\hat{D}^{-1})_{iA}\frac{\partial l_A}{\partial t} \tag{3.9}$$

を得る．ここで，$(\hat{D}^{-1})_{iA}:=\partial x_i/\partial l_A$ である．式 (3.9) にもとづいて速度場の変分 $\delta\boldsymbol{u}$ を計算すべきである．

補題 Lagrange ラベル関数の変分 δl_A に応じた速度場の変分 δu_i は次式で与えられる．

$$\delta u_i=-(\hat{D}^{-1})_{iA}\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\delta l_A\,. \tag{3.10}$$

証明

定義 $\hat{D}\hat{D}^{-1}=I$ より，$\delta(\hat{D}^{-1})_{iA}=-(\hat{D}^{-1})_{iB}\delta\hat{D}_{Bj}(\hat{D}^{-1})_{jA}$ である．ここに，I は 3×3 単位行列である．これを用いると，(3.9) の変分は

$$\delta u_i=-(\hat{D}^{-1})_{iA}\frac{\partial}{\partial t}\delta l_A+(\hat{D}^{-1})_{iB}\delta\hat{D}_{Bj}(\hat{D}^{-1})_{jA}\frac{\partial l_A}{\partial t} \tag{3.11}$$

となる．後は，第 2 項において，$\delta\hat{D}_{Bj}=\partial\delta l_B/\partial x_j$ と (3.9) を代入すればよい．

□

恒等式

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(D(\hat{D}^{-1})_{iA}\right)=0 \tag{3.12}$$

を利用すると，$\hat{D}$ の行列式 D の変分 $\delta D=D(\hat{D}^{-1})_{iA}\delta\hat{D}_{Ai}$ が次のようにまとめられる．

補題 変分 δl_A に応じた行列式 D の変分 δD は次式で与えられる．

$$\delta D=\frac{\partial}{\partial x_i}(D(\hat{D}^{-1})_{iA}\delta l_A)\,. \tag{3.13}$$

作用 (3.6) の変分 δS を，境界条件

$$\begin{aligned}&\delta\boldsymbol{l}(\boldsymbol{x},t_0)=\delta\boldsymbol{l}(\boldsymbol{x},t_1)=\boldsymbol{0}\quad\text{for}\ \ \boldsymbol{x}\in\mathcal{D}\,,\\&\delta\boldsymbol{l}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{n}_X=0\quad\text{on}\ \ \partial\mathcal{D}\quad\text{for all}\ t\in(t_0,t_1)\end{aligned} \tag{3.14}$$

をみたす $\delta\boldsymbol{l}$ および δp に関してとる．公式 (3.10) と (3.13) 利用して部分積分を行うと，表面項は境界条件 (2.2) および (3.14) より消える．ただし，境界面要素 $d\boldsymbol{S}=\boldsymbol{n}\,dA$ の変数変換

$$D(\hat{D}^{-1})_{iA}n_i dA=n_A dA_X \tag{3.15}$$

を用いる必要がある[9]. 残った体積積分は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right)(\hat{D}^{-1})_{iA}=\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{\boldsymbol{X}}\frac{\partial\varphi_i(\boldsymbol{X},t)}{\partial X_A}=\frac{\partial u_i}{\partial x_k}(\hat{D}^{-1})_{kA} \tag{3.16}$$

などを用いると，最終的に

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{t_0}^{t_1}dt\int_{\mathcal{D}}\left\{D(\hat{D}^{-1})_{iA}\delta l_A\left[\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{D}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_i}\right)+\frac{1}{D}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(p-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial D}\right)\right]\right.\\ &\qquad \left.+\delta p(1-D)\right\}dV\end{aligned} \tag{3.17}$$

のようにまとめられる．こうして，次の結論に導かれた．

定理　境界条件 (3.14) をみたす変分 $\delta\boldsymbol{l}$ および δp に関して，作用 S が極値をとるための必要十分条件は，$\mathcal{L}$ および D がつぎの方程式系をみたすことである．

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{D}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_i}\right)+\frac{1}{D}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(p-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial D}\right) = 0, \tag{3.18}$$

$$D = 1. \tag{3.19}$$

2 番目の式は (3.5) とあわせると，仮定 2 (式 (3.1))，すなわち非圧縮の条件を与える．1 番目の方程式 (3.18) にラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ の具体形 (3.7) をほうりこむと，期待通り，Euler 方程式 (2.8) になる．では，ラグランジアン密度をとくに指定しないとき，どのように見えるだろうか？

$$v_i := \frac{1}{D}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_i} \tag{3.20}$$

とおいてでてくるのは Euler-Poincaré 方程式 (2.26) である．ポテンシャルは $\phi=-p+\partial\mathcal{L}/\partial D$ である．

さて，ラグランジアン

$$\ell[\boldsymbol{u},D] := \int_{\mathcal{D}}\left[\mathcal{L}(\boldsymbol{u},D)+p(1-D)\right]dV \tag{3.21}$$

と最終的な方程式 (3.18) のレベルでは，流体粒子の軌跡 $\boldsymbol{x}=\varphi_t(\boldsymbol{X})$ もその逆写像 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{l}_t(\boldsymbol{x})$ も生では登場しない．しばらく定数 $D(=1)$ を忘れると，表立って出てくるのは $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$ のみである．速度場は，(2.1) より，

$$\boldsymbol{u}(\ ,t) := \frac{\partial\boldsymbol{\varphi}_t}{\partial t}\circ\boldsymbol{\varphi}_t^{-1} \tag{3.22}$$

とあらわすことができる．流体運動は流体粒子たちの並べ替えとみなすことができ，流体の状態は時々刻々の流体粒子たちの配置を指定すれば決まる．ゆえに，流体運動の配

[9] $X_A=l_A(\boldsymbol{x},t)$ によって，$dS_A:=\frac{1}{2}\epsilon_{ABC}dX_B\wedge dX_C$ の変数変換 $\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{x}$ を行うと，(3.15) が導ける．

位空間は微分同相写像群 Diff($\mathcal{D}$) で，その元が $\boldsymbol{\varphi}_t$ である[10]．時間微分 $\partial\boldsymbol{\varphi}_t/\partial t$ は $\boldsymbol{\varphi}_t$ における接空間 $T_{\varphi_t}\mathrm{Diff}(\mathcal{D})$ に属し，(3.22) ではそれを $\boldsymbol{\varphi}_t$ による右移動で戻しているので，(3.22) は単位元における接空間 $T_{id}\mathrm{Diff}(\mathcal{D}) \cong T\mathrm{Diff}(\mathcal{D})/\mathrm{Diff}(\mathcal{D})$，すなわち Diff($\mathcal{D}$) の Lie 環 $\mathcal{G}(\mathcal{D})$ の元となる．

$T\mathrm{Diff}(\mathcal{D})$ からその商空間 $\mathcal{G}(\mathcal{D})$ に話が還元されたことにはラグランジアンが Diff($\mathcal{D}$) の元による右移動で不変であるという対称性が効いている．時間 t によらないある元を $\boldsymbol{\eta}(\in \mathrm{Diff}(\mathcal{D}))$ とする．ラグランジアンの積分変数を Lagrange ラベル座標にもどすと (3.2) になるが，これは $dV_X = dV_Y$ をみたす変数変換 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{Y})$ のもとで不変である．仮定よりヤコビー行列式 $|\partial(\boldsymbol{\eta})/\partial(\boldsymbol{Y})| = 1$ であることを利用すると，

$$L[\boldsymbol{\varphi}_t \circ \eta, \tilde{p} \circ \eta; J \circ \eta] = L[\boldsymbol{\varphi}_t, \tilde{p}; J] \tag{3.23}$$

となるからである．このことは，ラグランジアンを Diff($\mathcal{D}$) による商空間 $\mathcal{G}(\mathcal{D})$ 上で (3.21) のように考えてもよいことを正当化するが，速度場が右不変ベクトル場であることが本質的に効いている．形式的には，

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_t \circ \boldsymbol{\eta}}{\partial t} \circ (\boldsymbol{\varphi}_t \circ \boldsymbol{\eta})^{-1} = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_t}{\partial t} \circ \boldsymbol{\varphi}_t^{-1} \tag{3.24}$$

を意味する．$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}_t(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{\varphi}_t \circ \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{Y})$ と，現在の位置 $\boldsymbol{x}(t)$ が共通でありさえすれば，$\boldsymbol{\varphi}_t$ を用いようが，$\boldsymbol{\varphi}_t \circ \boldsymbol{\eta}$ を用いようが同じ速度場 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ を与えるという内容である．操作の内容から，変換 $\boldsymbol{\eta}$ に関する不変性は **粒子ラベつけ替え対称性** (***particle relabeling symmetry***) とよばれる．この対称性のおかげで，無限次元 Lie 群で割った空間 $\mathcal{G}(\mathcal{D})$ にまで記述を縮めることが可能になる．

では，商空間での変分原理を組織だって行う手立てはあるのだろうか？まずは，自由な剛体の運動という次元の低い (が極めて重要な) 典型例で学んでみよう．

3.2 剛体の自由回転運動

外力の作用を受けない剛体の運動について考えよう．全体としての並進運動は無視できて，固定点まわりの回転運動だけが問題になる．剛体の運動状態は，時々刻々の剛体を構成する無数の粒子たちの配置を指定すれば決まるが，「剛体内の任意の 2 点間の距離は不変である」という制約のおかげで自由度は激減する．結局，剛体にくっついた座標軸 (frame) の姿勢だけを指定すればよいので，配位空間は SO(3) で，自由度は 3 である．SO(3) は，行列式が 1 の 3×3 直交行列たちのなす集合である．座標系として典型的に用いられるのが Euler 角 (θ, φ, ψ) である．

固定点を原点とする剛体にくっついた座標系，これを**物体座標系**あるいは**物体系**とよぶことにするが，に乗っかると，剛体の姿勢の変化に振り回されるわずらわしさを軽減できる．直交座標軸 $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, X_3)$ を固定点 O まわりの慣性モーメントテンソルの主軸

[10]正確には，仮定 2 のもとでは，配位空間は体積保存微分同相写像群 SDiff($\mathcal{D}$) である．

と一致させ，主慣性モーメントの各成分を I_1, I_2, I_3 とする．物体系では，これらは定数である．剛体の角速度の物体系での表示を $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ とすると，O まわりの角運動量の物体系での表示は $\boldsymbol{M} = (I_1\Omega_1, I_2\Omega_2, I_3\Omega_3)$ と簡単にかける．

原点が O と一致し実験室に固定された直交座標系 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ を**実験室系**あるいは単に**空間系**とよぶことにする．空間系 $\boldsymbol{x}$ と物体系 $\boldsymbol{X}$ の間は，SO(3) のある元 $R(t)$ によって $\boldsymbol{x} = R(t)\boldsymbol{X}$ の関係で結ばれている．この関係は空間系での角運動量 $\boldsymbol{m}(t)$ と物体系での角運動量 $\boldsymbol{M}(t)$ との間にも当てはまる: $\boldsymbol{m}(t) = R(t)\boldsymbol{M}$．これに「角運動量が保存される」，すなわち，$d\boldsymbol{m}/dt = 0$ (Newton の運動法則) を適用すると，

$$\left(R^{-1}\frac{d}{dt}(R\boldsymbol{M})\right) = \dot{\boldsymbol{M}} + R^{-1}\dot{R}\boldsymbol{M} = 0 \tag{3.25}$$

を得る．ドット $\dot{}$ は，時間 t についての微分をあらわす．ここで，3×3 交代行列 $\hat{\Omega}$ を

$$\hat{\Omega} := R^{-1}\dot{R} \tag{3.26}$$

によって定義すると，

$$\hat{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Omega}\times \tag{3.27}$$

であることがわかり [16, 17][11]，(3.25) は

$$\dot{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{\Omega} \tag{3.28}$$

となって，**Euler の方程式** としてよく知られた形になる．

$$\begin{aligned} I_1\dot{\Omega}_1 &= (I_2 - I_3)\Omega_2\Omega_3\,, \\ I_2\dot{\Omega}_2 &= (I_3 - I_1)\Omega_3\Omega_1\,, \\ I_3\dot{\Omega}_3 &= (I_1 - I_2)\Omega_1\Omega_2\,. \end{aligned} \tag{3.29}$$

これらは，3 変数 $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ に対する 3 本の 1 階連立常微分方程式系である．もともとの Newton の運動方程式は，3 変数 (例えば Euler 角 θ, ϕ, ψ) のそれぞれに対して 2 階の常微分方程式を連立させた系，すなわち 6 本の 1 階連立常微分方程式系であったので，方程式の数は半分に減ったことになる．定義 (3.26) をみると，$\hat{\Omega}$ は SO(3) の接ベクトル $\dot{R}\,(\in T_R\mathrm{SO}(3))$ を R^{-1} によって単位元 e 上の接空間 $T_e\mathrm{SO}(3) = so(3)$ 上にまで戻したもので，Euler 方程式 (3.29) は so(3) 上の方程式になっている．もともとの運動方程式は $T\mathrm{SO}(3)$ 上の軌道を記述するものであったが，$T\mathrm{SO}(3)/\mathrm{SO}(3) \cong T_e\mathrm{SO}(3)$ によって，記述が縮められたわけである．

[11]Euler 角を用いて計算すれば，具体的に確かめられる．

しかし，これではつじつまが合わない．方程式系 (3.29) を解いて $\boldsymbol{\Omega}(t)$ を求めた後，さらに $R(t)^{-1}\dot{R}(t)=\hat{\Omega}(t)$ を積分して $R(t)$ を求める手続きが残される．これを**再構成問題** (*reconstruction problem*) という[12].

角速度に対応する交代行列の定義 (3.26) と流体の速度場の表式 (3.22) の類似性に気づかれたい．違いは，接ベクトルを単位元上にまで写像するときに，左移動によるか右移動によるかという点だけである．剛体の場合，空間系から物体系への写像が SO(3) の左移動によるところに由来する．流体の場合，流体粒子のラベルのつけ替え (= 変数変換) が Diff($\mathcal{D}$) の右移動となるからである．左右の違いを別にすれば話は平行に進む [16, 17]. 目指すところの $\mathcal{G}(\mathcal{D})$ 上での変分原理に行く前に，so(3) の場合をみてみるのは思考の経済になろう．Euler 方程式 (3.29) を so(3) 上の変分原理から導こうとする試みは遠く Lagrange [20] にまでさかのぼるらしい [8, 21].

剛体 $\mathcal{B}$ のもつ運動エネルギーは

$$K:=\frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}}\rho(\boldsymbol{X})|\dot{R}\boldsymbol{X}|^2dV_X=\frac{1}{2}{}^t\boldsymbol{\Omega}\,\mathbb{I}\,\boldsymbol{\Omega} \tag{3.30}$$

のように物体座標系でかくと簡単になる．ここで，$\rho(\boldsymbol{X})$ は剛体の質量密度，対角行列 $\mathbb{I}=\mathrm{diag}(I_1.I_2,I_3)$ は慣性モーメントテンソルである．左上つき添字 t は転置をあらわす．$\boldsymbol{\Omega}$ をたてベクトルと認識すると，${}^t\boldsymbol{\Omega}$ は横ベクトルである．

ラグランジアンは運動エネルギーだけからなるので，作用としては，

$$S:=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left(I_1\Omega_1^2+I_2\Omega_2^2+I_3\Omega_3^2\right)\,dt \tag{3.31}$$

ととれるであろう．素朴に，角速度について変分 $\boldsymbol{\Omega}\to\boldsymbol{\Omega}+\delta\boldsymbol{\Omega}$ をとると，

$$\delta S=\int_{t_0}^{t_1}\left(I_1\Omega_1\delta\Omega_1+I_2\Omega_2\delta\Omega_2+I_3\Omega_3\delta\Omega_3\right)\,dt \tag{3.32}$$

となり，任意の $\delta\boldsymbol{\Omega}$ に対して $\delta S=0$ とを要請しても，$\Omega_1=\Omega_2=\Omega_3=0$ が出てくるだけで, (3.29) には届かない．

角速度 $\boldsymbol{\Omega}\,(\in\mathbb{R}^3)$ は Lie 環 so(3) の元 $\hat{\Omega}$ に対応している．一般に (3.27) にしたがって，3×3 交代行列 $\hat{a},\hat{b}$ ($\in$ so(3)) に対応するベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ ($\in\mathbb{R}^3$) とすると，

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\hat{a}\hat{b}),\quad \widehat{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})}=[\hat{a},\hat{b}] \tag{3.33}$$

が成立することが確かめられる．括弧は行列の交換子積 $[\hat{a},\hat{b}]:=\hat{a}\hat{b}-\hat{b}\hat{a}$ で，so(3) の Lie 括弧を与える．関係式 (3.33) によって so(3) が 3 次元ユークリッド空間 E^3 と同一視できること，すなわち，so(3) $\cong E^3$ であることはよく知られている．

[12] この過程で**幾何学的位相 (角度)** (*geometric angle*) が生まれる [18, 19].

剛体運動の配位空間は SO(3) であって，その Lie 環 so(3) 上でいきなり変分をとったところに無理がある．角速度の変分 $\delta\mathbf{\Omega}$ は自由ではない．角速度は $\hat{\Omega} = R^{-1}\dot{R}$ によって $SO(3)$ の元 R と束縛されている．この束縛条件を破らないよう，変分 $\delta\mathbf{\Omega}$ を R の変分 δR と関係づけてとらなければならない．

直交行列 R $(\in \mathrm{SO}(3))$ の変分 δR $(\in T_R\mathrm{SO}(3))$ を単位元上に写したものを $\hat{\Sigma} := R^{-1}\delta R\,(\in \mathrm{so}(3))$ とおくと，対応するベクトル $\mathbf{\Sigma}$ は

$$\delta\mathbf{\Omega} = \dot{\mathbf{\Sigma}} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{\Sigma} \tag{3.34}$$

をみたしていることがわかる．実際，$R^{-1}R = RR^{-1} = I$ より，$\delta R^{-1} = -R^{-1}\delta RR^{-1}$．これおよび R^{-1} の時間微分に対する類似の式を利用すると，

$$\begin{aligned} \delta\hat{\Omega} &= -R^{-1}\delta RR^{-1}\dot{R} + R^{-1}\delta\dot{R}, \\ \dot{\hat{\Sigma}} &= -R^{-1}\dot{R}R^{-1}\delta R + R^{-1}\delta\dot{R} \end{aligned} \tag{3.35}$$

が得られ，これらを差し引けばよい．

物体系の角速度 (3.26) は時間によらない SO(3) の元 A による左移動 $R(t) \to AR(t)$ で不変である．したがって，ラグランジアンも SO(3) による左移動に関して不変である．運動エネルギー K そのものであるラグランジアンは，当初 TSO(3) 上の関数として，$R(t)\,(\in \mathrm{SO}(3))$ に対して，$K = L(R, \dot{R})$ と与えられた．式 (3.30) の意味するところは，so(3) 上の関数 $l(\mathbf{\Omega}) = L(R, \dot{R})$ にまで還元できたということであるが，背後にこの対称性がある．

定理　TSO(3) 上の Hamilton の最小作用の原理は，so(3) 上の**還元された変分原理** (***reduced variational principle***) と等価である．すなわち，境界条件 $\mathbf{\Sigma}(t_0) = \mathbf{\Sigma}(t_1) = 0$ をみたす $\mathbf{\Sigma}(t)$ を用いて (3.34) の形であらわされる変分 $\delta\mathbf{\Omega}$ に関して，作用 $S[\mathbf{\Omega}] := \int_{t_0}^{t_1} l(\mathbf{\Omega})\, dt$ が極値をとるための必要十分条件は，$\mathbf{\Omega}(t)$ が Euler の剛体運動方程式 (3.29) をみたすことである．

拘束をもつ系の変分原理とみなせることから，***Lagrange-d'Alembert* の原理**といってもよい．

証明

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \mathbb{I}\mathbf{\Omega} \cdot \delta\mathbf{\Omega}\, dt = 0 \tag{3.36}$$

に (3.34) を代入して，部分積分を行えばよい．

□

角運動量

$$\boldsymbol{M} := \mathbb{I}\Omega = \frac{\partial l}{\partial \Omega} \tag{3.37}$$

は so(3) の双対空間 so(3)* に属すると考えることができる．角運動量に対する Euler の方程式 (3.28) は，3×3 交代行列の形で，

$$\frac{d}{dt}\hat{M} = [\hat{M}, \hat{\Omega}] \tag{3.38}$$

とくくられて，so(3)* 上の軌道 $\hat{M}(t)$ を支配する式とみることができる．

以上の内容を一般の Lie 群 G とその Lie 環 $\mathfrak{g}$ にまで拡張することはむつかしくない．Lie 括弧 $[\,,\,]$ をもつ Lie 環 $\mathfrak{g}$ の元 ξ, η をとってきたとき，$\mathfrak{g}$ 上の随伴表現 (*adjoint representation*) $\mathrm{ad}_\xi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ が，$\mathrm{ad}_\xi \eta := [\xi, \eta]$ で与えられることを思い出そう．$\mathfrak{g}$ の双対空間 $\mathfrak{g}^*$ と $\mathfrak{g}$ の間の自然な対を $<\,,\,>$ $(\in \mathbb{R})$ とかいて，$\mathfrak{g}$ の余随伴表現 (*coadjoint representation*) $\mathrm{ad}^*_\xi : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$ を

$$< \mathrm{ad}^*_\xi \mu, \eta > := < \mu, \mathrm{ad}_\xi \eta > \tag{3.39}$$

でもって定義する．ここで，μ は $\mathfrak{g}^*$ の任意の元である．(3.34) の対応物が

$$\delta\xi = \dot{\eta} + [\xi, \eta] \tag{3.40}$$

となることも (3.35) と全く同じ計算で示せる．

定理 (***Lagrange-d'Alembert* の原理**) TG 上のラグランジアン $L(g(t), \dot{g}(t))$ $(g(t) \in G)$ が G-左不変で，したがって，$T_eG = \mathfrak{g}$ 上の還元されたラグランジアン $l(\xi(t)) = L(g(t), \dot{g}(t))$ が定義できるとする．ここで，$\xi(t) := g(t)^{-1}\dot{g}(t)(\in \mathfrak{g})$ である．

このとき，TG 上の Hamilton の最小作用の原理は，$\mathfrak{g}$ 上の還元された変分原理と等価である．すなわち，境界条件 $\eta(t_0) = \eta(t_1) = 0$ をみたす $\eta(t)(\in \mathfrak{g})$ を用いて (3.40) の形で規定される変分 $\delta\xi$ に関して，作用 $S[\xi] := \int_{t_0}^{t_1} l(\xi(t))\,dt$ が極値をとるための必要十分条件は，$\xi(t)$ が微分方程式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial l}{\partial \xi} = \mathrm{ad}^*_\xi \frac{\partial l}{\partial \xi} \tag{3.41}$$

をみたすことである．これを**基本 Euler-Poincaré 方程式**とよぶ．

証明

'拘束条件' (3.40) を代入した

$$\delta S[\xi] = \int_{t_0}^{t_1} \left\langle \frac{\partial l}{\partial \xi}, \delta\xi \right\rangle dt = \int_{t_0}^{t_1} \left\langle \frac{\partial l}{\partial \xi}, \dot{\eta} + \mathrm{ad}_\xi \eta \right\rangle dt = 0 \tag{3.42}$$

において，部分積分を行うだけである．

□

$G=\mathrm{SO}(3)$ のとき，(3.41) が角運動量 $\boldsymbol{M}$ に対する Euler の方程式 (3.28) に帰着することはいうまでもない．では，方程式 (3.41) が Poincaré の名前を冠するのはなぜか？ so(3) を一般の Lie 環にまで拡張できることを見抜いて，一般的な方程式を最初に書き下したのが Poincaré [22] だからである [8, 21][13].

3.3 等エントロピー流体に対する Euler-Poincaré 形式

領域 $\mathcal{D}$ を運動する流体に対しても，素朴な変分原理

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\int_{\mathcal{D}}\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^2\,dV=\int_{t_0}^{t_1}\int_{\mathcal{D}}\boldsymbol{u}\cdot\delta\boldsymbol{u}\,dV=0\quad\text{for }{}^{\forall}\delta\boldsymbol{u}\tag{3.43}$$

が自明な運動 $\boldsymbol{u}\equiv 0$ しか生まないという事情は剛体のときと何ら変わりはない (式 (3.32) 参照)．Diff($\mathcal{D}$) の Lie 環 $\mathcal{G}(\mathcal{D})$ の元である速度場 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$ の変分 $\delta\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$ を自由にとったところに問題がある．あくまで配位空間 Diff($\mathcal{D}$) 上の φ_t の変分に従属させなければならない．

$\mathcal{D}$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{v}$ のベクトル場 $\boldsymbol{u}$ に関する Lie 微分は

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v}=[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]=\left(u_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}-v_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\tag{3.44}$$

で与えられる．まん中の括弧の定義はベクトル場の括弧積 (Jacobi-Lie 括弧) $[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]:=(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}-(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}$ であるが，$\mathcal{G}(\mathcal{D})$ の Lie 括弧の役割もする．これを用いると，渦度方程式 (2.11) は

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\right)=\left[\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho},\boldsymbol{u}\right]\tag{3.45}$$

とかけて，so(3) の場合の (3.38) との類似性が一目瞭然となる．この類似にいち早く着目し，有限次元での Lagrange 形式や Hamilton 形式を，非圧縮性流体に対する無限次元の SDiff($\mathcal{D}$) にまで拡張することを推し進めたのが Arnold である [16, 17].

$\mathcal{D}$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ ($\in\mathcal{G}(\mathcal{D})$) に対して，$\mathcal{G}(\mathcal{D})$ 上の随伴表現 $\mathrm{ad}_{\boldsymbol{u}}:\mathcal{G}(\mathcal{D})\to\mathcal{G}(\mathcal{D})$ は

$$\mathrm{ad}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v}:=[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]\tag{3.46}$$

によって与えられる．運動エネルギーを念頭に入れると，$\mathcal{G}(\mathcal{D})$ の双対空間 $\mathcal{G}(\mathcal{D})^*$ は $\mathcal{D}$ 上の 1 次微分形式に質量要素 $\rho\,dV$ をひっかけたもの，すなわち，$\mathcal{G}(\mathcal{D})^*:=\Lambda^1(\mathcal{D})\otimes\mathrm{Den}(\mathcal{D})$ ととれる．ここに，$\Lambda^1(\mathcal{D})$ は $\mathcal{D}$ 上の 1 次微分形式たちのなす空間で，記号 $\otimes$ はテンソ

[13] Lagrange が自由な剛体に対する so(3) 上での還元された変分原理まで考えたという点で，*Euler-Lagrange-Poincaré* 方程式とよぶべきだが，変分原理の一般的な枠組でふつう使われる *Euler-Lagrange* 方程式と紛らわしくなるので，Lagrange の名前をはずしたとのことである [21].

ル積をあらわす．密度 ρ を吸収してつくった運動量密度を $m := m_i\,dx_i$ として，$\mathcal{G}(\mathcal{D})^*$ と $\mathcal{G}(\mathcal{D})$ との間の L^2 内積を

$$< m \otimes dV, \boldsymbol{u} >:= \int_{\mathcal{D}} \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{u}\, dV \tag{3.47}$$

とあらわすことにする．成分表示において $\boldsymbol{m} = \rho \boldsymbol{u}$ とおくことで，$\mathcal{G}(\mathcal{D})\ (\ni \boldsymbol{u})$ を $\mathcal{G}(\mathcal{D})^*\ (\ni \boldsymbol{m})$ と同一視できる．$\mathcal{G}(\mathcal{D})^*$ 上の余随伴表現 $\mathrm{ad}^*_{\boldsymbol{u}} : \mathcal{G}(\mathcal{D})^* \to \mathcal{G}(\mathcal{D})^*$ を

$$< \mathrm{ad}^*_{\boldsymbol{u}}(m \otimes dV), \boldsymbol{v} >:= -\int_{\mathcal{D}} \boldsymbol{m} \cdot \mathrm{ad}_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{v}\, dV \tag{3.48}$$

でもって定義する．so(3) のときの定義 (3.39) と符号を反対にとるのは，Diff($\mathcal{D}$) が右から作用することによる．Jacobi-Lie 括弧 (3.44) を用いた定義式 (3.46) を右辺に代入して，部分積分を行う．境界条件 (2.2) を思い出すと，第 i 成分が

$$[\mathrm{ad}^*_{\boldsymbol{u}}(m \otimes dV)]_i = \left(u_j \frac{\partial m_i}{\partial x_j} + m_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + m_i \nabla \cdot \boldsymbol{u} \right) \otimes dV \tag{3.49}$$

と求められる．

流体の運動を指定するためには，速度場以外にも密度や圧力など熱力学的変数を決める必要があって，剛体の場合に比べて余分な要素が加わる．圧縮性も許す場合には，単位質量当たりの内部エネルギー e がポテンシャルになって，ラグランジアンは

$$L[\dot{\boldsymbol{\varphi}}_t, \rho_0\, dV_X] := \int_{\mathcal{D}} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} \right)^2 - \Phi(\boldsymbol{\varphi}, t) - e(\rho, s) \right\} \rho_0\, dV_X \tag{3.50}$$

となる [23]．ここで，$\rho_0 := \rho(\boldsymbol{X}, 0)$ で，s は単位質量当たりのエントロピーである．以下では，バロトロピー流体の代わりに，その特別な場合として，エントロピーが流れに凍結していること (= 断熱)

$$\frac{Ds}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_{\boldsymbol{u}} \right) s = 0 \tag{3.51}$$

を仮定しよう．すなわち，**仮定 1** に代わって，

仮定 1'　流体は • 非粘性で • 断熱的 (3.51) で，しかもエントロピーは空間的に一様：$s =$ 一定 • 外力は保存力である．

を採用する．等エントロピー流体においても，$(\nabla p)/\rho = \nabla w$ なる関数 $w(\boldsymbol{x}, t)$ が存在する．ポテンシャルの役割を果たすのは単位質量当たりのエンタルピー $w := e + p/\rho$ である [4]．

圧力 p は

$$p = \rho^2 \left(\frac{\partial e}{\partial \rho} \right)_s \tag{3.52}$$

であることを思い出そう．作用の表現 (3.6) もヒントに，圧力 p たちのなす線形空間を V とおくと，その双対空間 V^* は質量要素 ρdV たちのなす空間ということになる[14]．質量保存則 (2.6) を天下り的に組み込んで，(2.36) のように，$\mathrm{Diff}(\mathcal{D})$ の V^* への右作用が引き戻しで与えられるとしよう．同じことを Euler 的描像で表現すると，$a(t) \in V^*$, $\boldsymbol{\varphi}_t \in \mathrm{Diff}(\mathcal{D})$ に対して，

$$a(t) = \varphi_{t*}(a_0) = \varphi_t^{*-1}(a_0) \tag{3.53}$$

となるが，具体的に書き下してしまえば (2.4) である．ラグランジアン (3.50) 中にある $e(\rho, s)$ には $\rho = \rho_0 \circ \boldsymbol{\varphi}_t^{-1}/J$ を代入しなければならない．

エントロピー s は気にしなくてよいので，ラグランジアン $L : T\mathrm{Diff}(\mathcal{D}) \times V^* \to \mathbb{R}$ は Euler 的変数を使って，

$$L[\dot{\boldsymbol{\varphi}}_t, \rho_0\, dV_X] = L[\boldsymbol{u} \circ \boldsymbol{\varphi}_t, \varphi_t^*(\rho\, dV)] \tag{3.54}$$

とかける．右辺の形から，L が時間によらない $\mathrm{Diff}(\mathcal{D})$ の元による右移動に関して不変であることは明らかである．こうして，還元されたラグランジアン $\ell : \mathcal{G}(\mathcal{D}) \times V^* \to \mathbb{R}$ を

$$\ell[\boldsymbol{u}, \rho\, dV] := L[\boldsymbol{u} \circ \boldsymbol{\varphi}_t, \varphi_t^*(\rho\, dV)]\,, \tag{3.55}$$

すなわち，

$$\ell[\boldsymbol{u}, \rho\, dV] = \int_{\mathcal{D}} \left\{ \frac{1}{2}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)^2 - \Phi\,(\boldsymbol{x}, t) - e(\rho, s) \right\} \rho\, dV \tag{3.56}$$

によって定義することができる．

還元された空間 $\mathcal{G}(\mathcal{D}) \times V^*$ 内で計算をすませる方法を考えよう．そのためにまず，**ダイアモンド演算子** (***diamond operation***) $\diamondsuit : V \times V^* \to \mathcal{G}(\mathcal{D})^*$ を

$$< b \diamondsuit a, \boldsymbol{w} > := -\int_{\mathcal{D}} b\, \mathcal{L}_{\boldsymbol{w}} a \tag{3.57}$$

によって導入する．ここで，$a \in V^*$, $b \in V$, $\boldsymbol{w} \in \mathcal{G}(\mathcal{D})$ である．$\mathcal{G}(\mathcal{D})$ 上の変分 $\delta \boldsymbol{u}$ は形としては有限次元 Lie 環のときの (3.40) と同じで，$\boldsymbol{w}$ ($\in \mathcal{G}(\mathcal{D})$) に対して，

$$\delta \boldsymbol{u} = \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} + [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}] = \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} + \mathrm{ad}_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{w} \tag{3.58}$$

である[15]．V^* 上では，質量を一定に保つよう

$$\delta a = -\mathcal{L}_{\boldsymbol{w}} a \tag{3.59}$$

---

[14] 式 (2.36) の左にある $\rho\mu$ のことだが，わかりやすくするために，$\mu = dV$ とかいた．

[15] これは (3.10) とは異なる．(3.10) では現在の位置 $\boldsymbol{x}$ を固定して Lagrange ラベル $\boldsymbol{X}$ を変化させているのに対して，(3.58) では $\boldsymbol{X}$ を固定して $\boldsymbol{x}$ を変化させている．後者は文献 [23] にあるやり方と本質的に同じである．

なる変化 $a \to a + \delta a$ が起こらなければならない．密度 ρ について書き下すと，

$$\delta\rho = -\nabla \cdot (\rho \boldsymbol{w}) \tag{3.60}$$

ということである．変分 (3.58) と (3.59) のいずれも，Diff($\mathcal{D}$) 上の変分 $\delta\varphi_t$ から $\boldsymbol{w} := \delta\varphi_t \circ \varphi_t^{-1}$ とおくことで直接導くことができる．これで準備が整った．

定理 (***Lagrange-d'Alembert* の原理**) TDiff($\mathcal{D}$) $\times V^*$ 上のラグランジアンが Diff($\mathcal{D}$)-右不変で $\mathcal{G}(\mathcal{D}) \times V^*$ 上にまで還元できるとし，還元されたラグランジアンを $\ell[\boldsymbol{u}, a]$ とおく．ここで，Diff($\mathcal{D}$) のある元 φ_t に対して $\boldsymbol{u} = \dot{\varphi}_t \circ \varphi_t^{-1}$ で，$a \in V^*$ である．このとき，TDiff($\mathcal{D}$) $\times V^*$ 上の Hamilton の最小作用の原理を $\mathcal{G}(\mathcal{D}) \times V^*$ 上の変分原理にまで還元することができる：

境界条件 $\boldsymbol{w}(t_0) = \boldsymbol{w}(t_1) = 0$ をみたす $\boldsymbol{w}(t)(\in \mathcal{G}(\mathcal{D}))$ を用いて (3.58) の形で規定される $\mathcal{G}(\mathcal{D})$ 上の変分 $\delta\boldsymbol{u}$，および (3.59) の形で規定される V^* 上の変分 δa に関して，作用 $S[\boldsymbol{u}, a] := \int_{t_0}^{t_1} \ell[\boldsymbol{u}, a]\, dt$ が極値をとるための必要十分条件は，$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ が偏微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\delta\ell}{\delta\boldsymbol{u}} + \mathrm{ad}^*_{\boldsymbol{u}}\frac{\delta\ell}{\delta\boldsymbol{u}} - \frac{\delta\ell}{\delta a} \diamond a = 0 \tag{3.61}$$

をみたすことである．これを **Euler-Poincaré 方程式**とよぶ．

証明

作用 $S[\boldsymbol{u}, a]$ の変分に (3.58) および (3.59) を代入すると，要請すべき式は

$$\begin{aligned} \delta S[\boldsymbol{u}, a] &= \int_{t_0}^{t_1} \left(\left\langle \frac{\delta\ell}{\delta\boldsymbol{u}}, \delta\boldsymbol{u} \right\rangle + \int_{\mathcal{D}} \frac{\delta\ell}{\delta a}\delta a \right) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \left\langle \frac{\delta\ell}{\delta\boldsymbol{u}}, \frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial t} + \mathrm{ad}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{w} \right\rangle - \int_{\mathcal{D}} \frac{\delta\ell}{\delta a}\mathcal{L}_{\boldsymbol{w}} a \right\} dt = 0 \end{aligned} \tag{3.62}$$

となる．時間 t 微分については部分積分を行い，ad* の定義式 (3.48) とその成分表示 (3.49) および $\diamond$ の定義式 (3.57) を使えば，所望の結果 (3.61) に到達する．

□

Diff($\mathcal{D}$) では空間系で，so(3) では物体系で記述するのだが，(3.41) と比較すればわかるように，そのちがいは ad の前の符号のちがいに反映している．結果 (3.61) だけをみると，ラグランジアン ℓ の中身は何であってもよいし，V^* が何であるのか具体的な指定はない．Euler-Poincaré 方程式 (3.61) は連続体力学全般にひろく適用できることが期待される．

等エントロピー流体においては $a = \rho\, dV$ で，(3.56) および (3.52) より，

$$\frac{\delta\ell}{\delta\rho} = \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^2 - \Phi - \frac{\partial(\rho e)}{\partial\rho}\Big|_s = \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^2 - \Phi - w = \phi \tag{3.63}$$

となる[16]. ここで，右辺をまとめて ϕ とおいた．この式と Lie 微分 $\mathcal{L}_{\boldsymbol{w}}(\rho\, dV) = \nabla\cdot(\rho \boldsymbol{w})$ (式 (3.60) 参照) を定義式 (3.57) に代入して，部分積分を行うと，

$$\frac{\delta\ell}{\delta\rho} \diamondsuit \rho\, dV = (\rho\nabla\phi)\otimes dV \tag{3.64}$$

を得る．Euler-Poincaré 方程式 (3.61) に (3.48) と (3.64) を代入し，さらに連続の式 (2.6) も組み込むと，第 i 成分が

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\delta\ell}{\delta u_i}\right) + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\left(\frac{1}{\rho}\frac{\delta\ell}{\delta u_i}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\delta\ell}{\delta u_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial\phi}{\partial x_i} = 0 \tag{3.65}$$

と計算できる．この段階で，

$$v_i := \frac{1}{\rho}\frac{\delta\ell}{\delta u_i} \tag{3.66}$$

とおいたものは §1 で導いた Euler-Poincaré 方程式 (2.26) に他ならない．とくに，等エントロピー流体のときには

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \tag{3.67}$$

となることが (3.56) より具体的に計算できて，Euler 方程式 (2.8) を回復する．ただし，$P = w$ である．

循環 (2.22) は

$$\Gamma(C(t)) = \oint_{C(t)} \frac{1}{\rho}\frac{\delta\ell}{\delta\boldsymbol{u}}\cdot d\boldsymbol{x} \tag{3.68}$$

とあらわされる．**Kelvin の循環定理** (2.23)，すなわち，

$$\frac{d}{dt}\Gamma(C(t)) = 0 \tag{3.69}$$

は，(3.61) をかき改めた

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_{\boldsymbol{u}}\right)\frac{1}{\rho}\frac{\delta\ell}{\delta\boldsymbol{u}} = \frac{1}{\rho}\frac{\delta\ell}{\delta a}\diamondsuit a \tag{3.70}$$

から直ちにしたがい[17]，ひろく成り立っていることが理解されよう．表現 (3.68) は Noether の定理における保存量のようにみえてくる [23]．保存則の由来は粒子ラベルつけ替え対称性である．

また，(3.68) は Hamilton 力学系における Poincaré-Cartan の積分という見方もとれる [24]．§3.1 で導入した Lagrange ラベル関数 l_A をもちいると，古典力学とのアナロジーがもっと直接的になる [15]．l_A に正準共役な運動量を

$$p_A := \frac{\partial L}{\partial(\partial l_A/\partial t)} \tag{3.71}$$

[16]方程式 (3.61) との対応で $\delta l/\delta(\rho dV)$ と書きたいところだが，以下では，通常そうするように，汎関数微分の記号 $\delta l/\delta\rho$ に体積要素 dV で割ることを含める．

[17]バロトロピー流体 (含，等エントロピー流体) に対しては (2.38) である．

によって定義する．合成関数の微分規則において (3.9) を援用すると，Euler 的な運動量密度 $\delta\ell/\delta\boldsymbol{u}$ と Lagange 的な運動量 p_A との間の関係が

$$\frac{\delta\ell}{\delta\boldsymbol{u}} = -p_A\nabla l_A \tag{3.72}$$

のように求められる[18]．ここで，$\hat{D}_{Ai} = \partial l_A/\partial x_i$ を用いた．式 (3.68) に代入すると，循環は

$$\Gamma(C(t)) = -\oint_{C(t)} \frac{1}{\rho}p_A dl_A = -\iint_{S(t)} d\left(\frac{1}{\rho}p_A\right)\wedge dl_A \tag{3.73}$$

とあらわされる．最右辺の面積分は $C(t)$ を縁にもつ任意の向きづけられた曲面 $S(t)$ にわたって行う．

4　流れの安定性に対する WKB 法について

流れの安定性を調べるとっかかりは，加えられた撹乱の振幅を無限小とする線形安定性解析である．速度場を基本流 $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},t)$ と撹乱 $\tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x},t)$ にわけて，撹乱 $\tilde{\boldsymbol{u}}$ が増幅すれば基本流 $\boldsymbol{U}$ は線形不安定であるとする．後ほど取り上げる話題のために，コリオリ力も含めておく．全体として角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ で回転する座標系での縮まない流れの安定性について考えてみたい．地球の大気や海洋の大規模な流れを念頭においている．

Euler 方程式 (2.8) に $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{U} + \tilde{\boldsymbol{u}}$ および圧力 P に対する同様な分解を代入して，撹乱振幅について 2 次以上の項を省略すると，

$$\begin{aligned}\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{u}}}{\partial t} + (\tilde{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla)\boldsymbol{U} + (\boldsymbol{U}\cdot\nabla)\tilde{\boldsymbol{u}} + 2\boldsymbol{\Omega}\times\tilde{\boldsymbol{u}} &= -\nabla\tilde{p}, &(4.1)\\ \nabla\cdot\tilde{\boldsymbol{u}} &= 0 &(4.2)\end{aligned}$$

が残る．オーソドックスなアプローチは，$\tilde{\boldsymbol{u}},\tilde{p}\propto\exp(-i\omega t)$ 型の時間依存性を仮定し，領域 $\mathcal{D}$ 上での (4.1) および (4.2) の解で境界条件を満足する $\tilde{\boldsymbol{u}},\tilde{p}$ が存在するように ω を決める．いわゆるモード解析である．一つでも虚数部 $\mathrm{Im}\,[\omega] > 0$ なるモードがあれば，初期条件を選べば撹乱は指数関数的に増大できるので，基本流は線形不安定といえる[19]．残念ながら，$\mathcal{D}$ 上で大域的なモード解析を実行することは一般的な状況においては容易なことではない．離散スペクトルの計算自体複雑だが，それだけではすまない場合も多い．

短い波長の撹乱に限られるが，一般的な流れの各流線近辺の 3 次元線形安定性を手軽に調べることを可能にする方法が 90 年代に登場した．***WKB* 法**である [25]．上記の方法とは対極にあるので，**局所安定性解析**ともよばれる．まず，撹乱の形を波束型に仮定する．

$$\tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x},t)\exp\left[i\Phi(\boldsymbol{x},t)/\epsilon\right] + c.c. \tag{4.3}$$

[18] この形は Clebsch 変数による表現を連想させる．
[19] これは**スペクトル的不安定**とよばれる．

c.c. は複素共役項をあらわす略号である．位相 Φ の勾配が波数ベクトル $\boldsymbol{k}$，すなわち，$\boldsymbol{k} := \nabla\Phi$ であるので，小さなパラメータ ϵ の導入は波長が短いことを意図している．非圧縮性流体中においては波が存在し得ない．強いて波とよべるものがあるとすれば，基本流によって運ばれるものだけなので，

$$\frac{D\Phi}{Dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + (\boldsymbol{U}\cdot\nabla)\Phi = 0 \tag{4.4}$$

を仮定する．これをアイコナール方程式という．以上の設定のもとで，撹乱に対する Euler 方程式 (4.1), (4.2) は特性方程式系に帰着する．

$$\begin{aligned}
\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} &= \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},t)\,, \\
\frac{d\boldsymbol{k}}{dt} &= -k_j\nabla U_j\,, \\
\frac{d\boldsymbol{a}}{dt} &= -(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{U} + 2\left[\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{U}\right]\frac{\boldsymbol{k}}{k^2} \\
&\quad -2\left(\boldsymbol{I} - \frac{{}^t\boldsymbol{k}\,\boldsymbol{k}}{k^2}\right)\cdot\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{a}\,.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

ここで，$k := |\boldsymbol{k}|$, $\boldsymbol{I}$ は 3×3 単位行列である．初期条件をさまざまに変えて常微分方程式系 (4.5) を解いて，撹乱振幅 $|\boldsymbol{a}(t)|$ が増大することがあれば，基本流 $\boldsymbol{U}$ は不安定ということになる．時間 t について指数関数的に増幅する不安定のみならず，代数的に増幅する不安定も捕まえられる．

WKB 法の効力は，思いの外，強力である．「流線が楕円型に閉じた流れは不安定である」ことから始めて，さまざまな流れの安定・不安定性をそのメカニズムも含めて次々に明らかにしていった．最近でも，非回転系の場合であるが，渦輪の新しい不安定性を見つけるのに役立てることができた [26].

汎用性や使い勝手の点で，WKB 法は申し分ない．短波長という制約も，単純な系で計算できる実際の大域モードと比較してみると，長波長側への外挿が結構効く．が，いくつか疑問が残る.「いったい，アイコナール方程式 (4.4) とは何者だろうか？」さらに，この方法を非線形の方向に拡張しようとすると，とたんに指針を失う．振幅について 2 次以上の方程式を導けばすむというものでもなさそうである．基本流もそのままではいられず，撹乱による基本流の修正にまで目をやらなければならない.「WKB 法の非線形への拡張はどのようにすればよいのだろうか？」

このような疑問への答えを見出す手がかりが，気象学をはじめとする地球流体力学の分野で展開されている**波動・平均流相互作用** (***wave mean-flow interaction*** (***WMFI***)) の理論にある [27]. Gjaja と Holm は，回転成層流中の非線形波動に関して,「撹乱に比べて，平均流 $\boldsymbol{U}$ が時間的にも空間的にもゆっくりと変化する: $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}(\epsilon\boldsymbol{x}, \epsilon t)$」ことと「撹乱にともなう流体粒子の変位 $\alpha\boldsymbol{\xi}$ が小さい」ことを仮定して，平均流と撹乱を支配する方程式を，微小パラメター ϵ，α について最低次から逐次導出した．§3.1 の形式の変分原理

を頼りに，ラグランジアンのレベルで *Lagrange* 平均の操作を行うことによって，この手続きを高次まで手際よく自己無撞着に実行できるプログラムを提示した．Lagrange 平均は粒子ラベルのつけ替えと折り合いがつくので，平均操作下でも渦のトポロジーは保たれる．すなわち，平均流速場と平均渦度場に関する循環およびヘリシティは時間について一定不変である [13]．Euler 平均だとそうはいかない．上述の WKB 法は Euler 的記述に終始している．

WMFI 理論では，流体粒子の変位 $\boldsymbol{\xi}$ に対してやはり波束型

$$\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x},t)=\hat{\boldsymbol{a}}(\epsilon\boldsymbol{x},\epsilon t)\exp\left[i\frac{\phi(\epsilon\boldsymbol{x},\epsilon t)}{\epsilon}\right]+c.c. \tag{4.6}$$

を仮定する．そして，

$$\begin{aligned}\omega(\epsilon\boldsymbol{x},\epsilon t) &= -\frac{\partial}{\partial\epsilon t}\phi(\epsilon\boldsymbol{x},\epsilon t)=-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\phi(\epsilon\boldsymbol{x},\epsilon t)}{\epsilon}, &(4.7)\\ \boldsymbol{k}(\epsilon\boldsymbol{x},\epsilon t) &= \frac{\partial}{\partial\epsilon\boldsymbol{x}}\phi(\epsilon\boldsymbol{x},\epsilon t)=\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{x}}\frac{\phi(\epsilon\boldsymbol{x},\epsilon t)}{\epsilon} &(4.8)\end{aligned}$$

とおく．WKB 法の設定と似ているようであるが，(4.3) が撹乱速度場に対するものであるのに対して，(4.6) は撹乱を受けた流体粒子の変位に対するものであることに注意されたい．前者が Euler 的な量であるのに対して，後者は Lagrange 的な量なのである．

WMFI 理論において，撹乱からの跳ね返りはないとして平均場を固定して扱ったものが，流れの線形安定性の取り扱いに相当する．この仮定のもと，Gjaja-Holm 撹乱方程式中の Lagrange 的な量を Euler 的な量に翻訳すると，WKB 法との接点が見えてくる [28]．3 日目では，回転系での流れの安定性に関して最近考えていることについて触れる予定である．

謝辞

本稿を執筆するにあたっては多く方々から直接的・間接的に恩恵を受けている．とりわけ，Darryl D. Holm (Los Alamos National Laboratory & Imperial College of London) と Renzo L. Ricca (University College London) に感謝したい．Helmholtz (1858) の論文の重要性を強く説き，筆者の目をそれに向けさせたのは Ricca である．Euler-Poincaré の枠組の手ほどきをしてくれ，その魅力と有用性を伝授してくれたのは Holm である．また，服部裕司氏 (九工大) には流れの安定性に関し頻繁に有意義な議論をして頂いている．西晴子氏 (九大) には結び目理論についてご教示頂いた．本稿は，数理物理 Summer School 2003「流体力学・乱流の数理」の講演予稿に若干手を加えたものである．夏の学校で講演する機会を与えて下さった小嶋泉氏 (京大) と河東泰之氏 (東大) に感謝申し上げる．本研究は日本学術振興会・科学研究費補助金 基盤研究 (C)(2) より援助を受けている．

参考文献

[1] Moffatt, H. K. (1969) The degree of knottedness of tangled vortex lines, *J. Fluid Mech.* **35**, pp. 117–129.

[2] Ricca, R. L. &, Berger, M. (1996) Topological ideas and fluid mechanics, *Phys. Today* **35**, pp. 24–30. 木田 重雄 訳 (1997) パリティ.

[3] Helmholtz, H. von (1858) On integrals of the hydrodynamical equations, which express vortex-motion. *Crelle's J.* **55**. also *Phil. Mag. (4)* **33** (1867) pp. 485–513.

[4] Chorin, A. J. & Marsden, J. E. (1983) *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*, 3rd. ed. (Springer-Verlag).

[5] 河内 明夫 編著 (1990) 結び目理論 (シュプリンガー・フェアラーク東京).

[6] 村杉 邦男 (1993) 結び目理論とその応用 (日本評論社).

[7] Batchelor, G. K. (1967) *An Introduction to Fluid Dynamics* (Cambridge University Press).

[8] Holm, D. D., Marsden, J. E. & Ratiu, T. S. (1998) The Euler-Poincaré equations and semidirect products with applications to continuum theories, *Adv. Math.* **137**, pp. 1–81.

[9] Woltjer, L. (1958) A theorem on force-free magnetic fields, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **44**, pp. 489–491.

[10] Arnold, V. I. (1974, English translation 1986) The asymptotic Hopf invariant and its applications, *Sel. Math. Sov.* **5**, pp. 327-345.

[11] Arnold, V. I. & Khesin, B. A. (1998) *Topological Methods in Hydrodynmics*, Applied Mathematical Sciences **125** (Springer-Verlag).

[12] Moffatt, H. K. & Ricca, R. L. (1992) Helicity and the Călugăreanu invariant, *Proc. R. Soc. Lond. A* **439**, pp. 411-429.

[13] Holm, D. D. (2002) Variational principles, geometry and topology of Lagrangian-averaged fluid dynamics, In *An Introduction to the Geometry and Topology of Fluid Flows*, NATO Science Series II. Mathematics, Physics and Chemistry –Vol. **47**, ed. R. L. Ricca (Kluwer Academic Publishers, Netherlands 2001) pp. 271–291.

[14] Kida, S. & Takaoka, M. (1994) Vortex reconnection, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **26**, pp. 169–189.

[15] Holm, D. D. (1996) Hamiltonian balance equations, *Physica D* **98**, pp. 379–414.

[16] Arnold, V. I. (1966) Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluids parfaits, *Ann. Inst. Fourier Grenoble* **16**, pp. 319-361.

[17] Arnold, V. I. (1989) *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, 2nd ed. (Springer-Verlag).

[18] Levi, M. (1993) Geometric phases in the motion of rigid bodies, *Arch. Rat. Mech. Anal.* **122**, pp. 213–229.

[19] Fukumoto, Y. (1997) Stationary configurations of a vortex filament in background flows, *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **453**, pp. 1205–1232.

[20] Lagrange, J. L. (1788) *Mécanique Analytique* (Chez la Veuve Desaint).

[21] Marsden, J. E. & Ratiu, T. S. (1999) *Intoroduction to Mechanics and Symmetry*, 2nd ed. Texts in Applied Mathematical **17** (Springer-Verlag).

[22] Poincaré, H. (1901) Sur une forme nouvelle des équations de la mécanique, *C. R. Acad. Sci.* **132**, pp. 369–371.

[23] Bretherton, F. P. (1970) A note on Hamilton's principle for perfect fluids, *J. Fluid Mech.* **44**, pp. 19–31.

[24] Arnold, V. I., Kozlov, V. V. & Neishtadt (1988) *Dynamical Systems III.*, 2nd ed., Encyclopaedia of Mathematical Sciences **3** (Springer-Verlag).

[25] Lifschitz, A. & Hameiri, E. (1991) Local stability conditions in fluid dynamics, *Phys. Fluids A* **3**, pp. 2644–2651.

[26] Hattori, Y. & Fukumoto, Y. (2003) Short-wavelength stability analysis of thin vortex rings, *Phys. Fluids* **15**, pp. 3151–3163.

[27] Gjaja, I. & Holm, D. D. (1996) Self-consistent Hamiltonian dynamics of wave mean-flow interaction for a rotating stratified incompressible fluid, Physica **98D** 343–378.

[28] Fukumoto, Y. & Holm, D. D. (2003) *in preparation.*